

Tutorato di Analisi 1

Foglio di esercizi 2

1. Dimostrare che le seguenti funzioni sono continue usando la definizione di continuità:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = x^5 + x$ nel punto $x = 0$

(d) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ nel punto $x = 0$

2. Supponiamo che $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sia una funzione continua tale che $x - 5 < f(x) < x + 1 \forall x \in \mathbf{R}$. Dimostrare che esiste un punto $x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) = 0$. Qual è l'immagine di f ?

3. Supponiamo che $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ sia una funzione continua. Dimostrare che f ha un punto fisso (cioè esiste un punto c tale che $f(c) = c$).

4. Dato X un insieme, consideriamo su X la seguente distanza:

$$\hat{d}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Dimostrare che ogni funzione $f : (X, \hat{d}) \rightarrow \mathbf{R}$ è continua.

5. Dimostrare che l'equazione $x^3 + x + 1 = 0$ ha una e una sola soluzione reale.

6. Sia $A \subseteq \mathbf{R}$ e siano $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ e $g : A \rightarrow \mathbf{R}$ funzioni continue. Sia $p(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $q(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Dimostrare che p e q sono continue.

7. Siano $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ funzioni continue tali che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbf{Q}$. Dimostrare che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.