TEOREMA [Rouché - Capelli]

UNO DEI 10 TEOREMI PIÚ IMPORTANTI DEL CORSO ⚠

i) $\underset{\in M_{n\times m}(K)}{A} \cdot \overset{M_{m\times 1}(K)}{\underset{\cup}{x}} = \underset{\in M_{n\times 1}(K)}{b}$ COMPATIBILE $\Longleftrightarrow$ $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$

A: matrice incompleta del sistema; $(A|b)$: matrice completa del sistema

ii) Se il sistema è COMPATIBILE $\Rightarrow$ lo spazio delle soluzioni ha DIMENSIONE $= m - \text{rank}(A)$

(se è uno spazio AFFINE e non VETTORIALE la dimensione è la stessa dello spazio vettoriale ottenuto traslando sull'origine).

Oss: questo teorema ESTENDE, cioè è PIÚ GENERALE, del TEOREMA FONDAMENTALE dell'ALGEBRA LINEARE.

Cor.: Ogni sistema OMOGENEO è COMPATIBILE [sapevamo già], perché $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|0)$.

Dim.: i) Da proposizione precedente, cioè il teorema fondam. dell'algebra lineare, sappiamo che $Ax=b$ COMPATIBILE $\Leftrightarrow$ $b \in \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})$.

Ma sappiamo anche che $b \in \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) \Leftrightarrow$
$$\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) = \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}, b)$$
Quindi mettendo insieme le due cose otteniamo:

$$Ax=b \text{ COMPATIBILE} \Leftrightarrow \underbrace{\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})}_{=:W} = \underbrace{\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}, b)}_{=:V}$$

Sappiamo anche che se $W \subseteq V$ FIN GEN $\Rightarrow$ W FIN GEN e $W = V \Leftrightarrow \dim W = \dim V$. Quindi abbiamo ottenuto:

$$Ax=b \text{ è COMPATIB.} \Longleftrightarrow \underbrace{\dim\left(\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})\right)}_{\substack{\| \\ \text{rank}(A) \\ \text{(PER DEF 1)}}} = \underbrace{\dim\left(\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}, b)\right)}_{\substack{\| \\ \text{rank}(A|b) \\ \text{(PER DEF 1)}}}$$

iii). Sia $S := \{x \mid Ax = b\}$ lo spazio affine delle soluzioni e $W := \{x \mid Ax = 0\}$ lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato. Per dimensione di S si intende in realtà **dim(W)**. La dimensione di W è data dal numero di parametri liberi necessari per descrivere le soluzioni di un sistema lineare, perché ogni parametro libero spazia fra tutti i valori del campo K e quindi contribuisce con il prodotto cartesiano di una addizionale copia del campo K (i.e. **aumenta la dimensione dello spazio delle soluzioni di uno**).
Quindi se ci sono **m incognite** e zero equazioni allora **dim(W) = m**. Ora, ogni equazione **diminuisce la dimensione dello spazio delle soluzioni di uno**, a patto che questa equazione non sia nulla e non sia

una combinazione lineare delle precedenti.
In altre parole il numero di **equazioni che contano per la riduzione delle dimensione** dello spazio delle soluzioni è uguale al numero delle equazioni che sono **LINEARMENTE INDIPENDENTI FRA LORO.**
Questo numero è chiaramente uguale al numero delle **RIGHE di A** che sono linearm. indipendenti fra loro, e quindi per la **Def 2** del rango questo numero è esattamente il **RANGO di A.**
Quindi $\mathbf{dim(W) = m - rank(A)}$ e traslando lo spazio vettoriale W sull'affine S abbiamo:

$$\dim(S) = \dim(W) = m - \mathrm{rank}(A)$$

$\blacksquare$

Esempio (⚠ Esercizio tipico d'esame):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = a \end{cases}$$

Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R} = K$ il sistema è compatibile e scrivere l'insieme delle soluzioni

$\Big\downarrow$ scriviamo la matrice completa del sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & a \end{array}\right)$$

$A \qquad b$

$\Big\downarrow$ Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} \operatorname{rank}(\tilde{A}) = 2 \\ \operatorname{rank}(\tilde{A}|\tilde{b}) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = -1 \\ 3 & \text{se } a \neq -1 \end{cases} \end{cases}$$

$\tilde{A} \qquad \tilde{b}$

PER TEOR. ROUCHÉ - CAPELLI il sistema è COMPATIBILE se e soltanto se $a = -1 \in K = \mathbb{R}$.

-M-

Poniamo $a := -1$. Allora, sempre per il teorema di ROUCHÉ-CAPELLI, lo spazio delle soluzioni (che è uno spazio affine non vettoriale per il teorema di struttura per le soluzioni dei sistemi lineari) ha DIMENSIONE $= n - \underbrace{\text{rank}(A)}_{=\text{rank}(\tilde{A})} = 4 - 2 = 2$.

Applicando il metodo della sostituzione all'indietro:

$x_2 + x_3 = 0 \implies x_2 = -x_3 \implies$ poniamo $x_3 := t_3 \in \mathbb{R}$ e quindi si ha $x_2 = -t_3$.

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \implies x_1 - 2t_3 + 3t_3 - 2x_4 = 1 \implies$ $x_1 - 2x_4 = 1 - t_3 \implies$ poniamo $x_4 := t_4 \in \mathbb{R}$ e quindi si ha $x_1 = 1 - t_3 + 2t_4$.

DUE PARAMETRI LIBERI!

Allora otteniamo:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - t_3 + 2t_4 \\ -t_3 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} \middle| \ t_3, t_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

MI ASPETTO DIM $=2$ E INFATTI ROUCHÉ-CAP. CI AVEVA GIÀ GARANTITO DIM $=2$

Potremmo conoscere la dimensione prima ancora di fare i conti!

t_3 e t_4 PRENDONO OGNI VALORE in $\mathbb{R}$

Oss:

$$\begin{pmatrix} 1-1\cdot t_3+2\cdot t_4 \\ 0-t_3 \\ 0+t_3 \\ 0 \quad\quad t_4 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$S = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{VETTORE di TRASLAZIONE dall'ORIGINE.}} + \underbrace{\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{=:W}$$

SPAZIO AFFINE

VETTORE di TRASLAZIONE dall'ORIGINE.

Se questo vettore fosse $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora S sarebbe uno spazio vettoriale e il sistema sarebbe **OMOGENEO**.

$=: W$ SPAZIO VETTORIALE DELLE SOLUZIONI del SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO, CHIARAMENTE $\dim(W)=2$ perché i due vettori che lo generano sono linearmente indipendenti