Lezione 24 ottobre 2024

giovedì 24 ottobre 2024 09:06

Visto: $Q \in Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ è singolare

$\iff \nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Supp. $Q \in Z_p(F)$ sia NON SINGOLARE
(ovvero SEMPLICE, ovvero LISCIO)

Quindi $\nabla F(Q) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e la generica retta interseca $Z_p(F)$ con molt. 1, cioè l'inters. è trasversale

Mi chiedo: in un punto liscio, esistono rette che hanno $I_Q(F, L) \geq 2$?

Ricordo:

$F(q_0 + t a_0, q_1 + t a_1, q_2 + t a_2) =: g(t)$

$\iff g'(0) = 0$

$ \overset{\shortparallel}{} \; {}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$

$\iff L = \overline{QA}$ e $A = (a_0 : a_1 : a_2)$

verifica

$${}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero: $\partial_{x_0} F(Q) \cdot x_0 + \partial_{x_1} F(Q) x_1 + \partial_{x_2} F(Q) \cdot x_2 = 0$

è l'eq. di una retta

$\Rightarrow$ c'è 1! retta L t.c. $I_Q(F, L) \geq 2$

Def.: Se $Q \in Z_p(F)$ è NON SINGOLARE, la retta ${}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ si chiama

RETTA TANGENTE a $Z_p(F)$ in Q

e si indica con $T_Q C$, dove

$C = (Z_p(F), F)$

Restringo all'aperto $U_0 = \mathbb{P}^2 \setminus Z_p(x_0)$

$U_0 \leftrightarrow \mathbb{A}^2$

Visto: negli esercizi: $I_Q(F, L) = I_q(_aF, {}_aL)$

se $j_0(q) = Q \in U_0$

COR.: $\boxed{Q \in Z_p(F) \cap U_0}$ è SINGOLARE

(LISCIO) $\iff$ $q \in Z(_aF) \subseteq \mathbb{A}^2$ è SINGOLARE
NON SING

(LISCIO, NON SING.)

Pb: trovare eq. retta tg in $q \in Z(aF)$

Siccome tutte le molt. di int. si mantengono quando mi restringo a $U_0 = \mathbb{A}^2$, la retta tg. affine si trova semplicemente deomogeneizzando risp. x_0:

$$\partial_{x_0}F(Q)\, x_0 + \partial_{x_1}F(Q)\, x_1 + \partial_{x_2}F(Q)\, x_2 = 0$$

$$f(x,y) = aF = F(1,x,y)$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(\partial_{x_1}F)(1,x,y)\\ \partial_x(F(1,x,y))\end{array}\right) =}$$

Infatti: $F = A_d \cdot x_1^d + A_{d-1}(x_0,x_2)\, x_1^{d-1} + \dots + A_1(x_0,x_2)\, x_1 + A_0(x_0,x_2)$

$$\partial_{x_1}F = d \cdot A_d\, x_1^{d-1} + (d-1) A_{d-1}(x_0,x_2)\, x_1^{d-2} + \dots + A_1(x_0,x_2)$$

$$(\partial_{x_1}F)(1,x,y) = d A_d \cdot x^{d-1} + (d-1) A_{d-1}(1,y)\, x^{d-2} + \dots + A_1(1,y)$$

$$\parallel$$

$$\partial_x(F(1,x,y)) = \partial_x\left(A_d x^d + A_{d-1}(1,y)\, x^{d-1} + \dots + A_1(1,y)x + A_0(1,y)\right)$$

Analog. $(\partial_{x_2}F)(1,x,y) = \partial_y(F(1,x,y))$

Invece $\partial_{x_0}F$? Poniamo $Q = (1 : q_1 : q_2)$

Ricorda Teo. di Eulero:

$$x_0\,\partial_{x_0}F + x_1\,\partial_{x_1}F + x_2\,\partial_{x_2}F = (\deg F)\cdot F$$

(ovvero dF)

Valuto in $Q = (1 : q_1 : q_2)$

$$1 \cdot \partial_{x_0}F(Q) + q_1 \cdot \partial_{x_1}F(Q) + q_2 \cdot \partial_{x_2}F(Q) = \underbrace{(\deg F)\cdot F(Q)}_{=0}$$

poiché $Q \in Z_p(F)$

cioè: $\partial_{x_0}F(Q) = -q_1 \cdot \underbrace{\partial_{x_1}F(Q)}_{= \partial_x aF(q_1,q_2)} - q_2 \cdot \underbrace{\partial_{x_2}F(Q)}_{= \partial_y aF(q_1,q_2)}$

$Q = (1 : q_1 : q_2) = j_0((q_1, q_2))$

$\Longrightarrow$ $T_Q C$: l'equazione di $j_0^{-1}(T_Q C)$ è data dalla deomog. della eq. proiettiva, e quindi:

$$a\left(\partial_{x_0}F(Q)\cdot x_0 + \partial_{x_1}F(Q)\cdot x_1 + \partial_{x_2}F(Q)\cdot x_2\right)$$

$$= \partial_{x_0}F(Q)\cdot 1 + \partial_{x_1}F(Q)\cdot x + \partial_{x_2}F(Q)\cdot y$$

$$= \left(-q_1\partial_x f(q_1,q_2) - q_2\partial_y f(q_1,q_2)\right) + \partial_x f(q_1,q_2)\cdot x + \partial_y f(q_1,q_2)\cdot y = 0$$

$$f = aF$$

Ovvero:

$$\boxed{\partial_x f(q_1,q_2)(x-q_1) + \partial_y f(q_1,q_2)(y-q_2) = 0}$$

EQ. AFFINE della RETTA TG : $t_q f$
alla curva $(Z(af), af)$ nel punto
$(q_1, q_2) = q$

CASO PART: la curva affine è grafico
di una funzione polinomiale

$y = p(x)$, $p(x) \in K[x]$

$f(x,y) = p(x) - y$

$\partial_x f = \partial_x p$

$\partial_y f = -1$

retta tg in (q_1, q_2)

$$\partial_x p(q_1)(x - q_1) + (-1)\cdot(y - q_2) = 0$$

cioè $y = q_2 + \partial_x p(q_1)(x - q_1)$

$y = p(q_1) + \partial_x p(q_1)(x - q_1)$

Def: Data $Z(f) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, una retta l si dice
ASINTOTO per $Z(f)$ se l è una retta

REALE (cioè ammette una eq. cartesiana con coeff. tutti reali) ed è tg a $Z(f)$ in qualche punto liscio all'infinito :

cioè : $\exists\, Q \in Z_p(hf) \cap Z_p(x_0)$
Q LISCIO

e $\ell = T_Q \bar{C}$

$$C = (Z(f), f)$$

$$\bar{C} = (Z(hf), hf)$$

Esempi : Coniche irriducibili

- parabola: $y = x^2$ $\quad f: x^2 - y = 0$

$$hf = x_1^2 - x_0 x_2 = F$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_1 \\ -x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{P}^2$ non corr. a nessun punto

⇒ non ci sono punti singolari

Def.: In questo caso la curva si dice LISCIA

Punti all'infinito : $\begin{cases} x_1^2 - x_0 x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0$

$Q = (0:0:1)$ unico punto

retta tg proiettiva

$${}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$${}^t\nabla F(Q) = (-1 \quad 0 \quad 0)$$

$$-1 \cdot x_0 = 0$$

$x_0 = 0$: la tg è la retta all'∞

⇒ se cons. $Z_p(F) \cap U_0$, non ci sono rette affini la cui chiusura proiettiva sia tg a un punto all'∞.

⇒ NO ASINTOTI.

- iperbole $x \cdot y = 1$

$xy - 1 = 0$

$x_1 x_2 - x_0^2 = 0$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} -2x_0 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{P}^2 \text{ MAI}$$

$\Rightarrow$ iperbole è liscia

Punti all'∞ : $\begin{cases} x_1 x_2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = 0$

$$\Downarrow$$

$(0 : 0 : 1)$

$(0 : 1 : 0)$

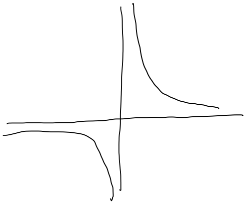
$\Rightarrow$ 2 punti $Q_1 = (0:0:1)$ e $Q_2 = (0:1:0)$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} -2x_0 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla F(Q_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla F(Q_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$T_{Q_1}\bar{C}$: $x_1 = 0 \xRightarrow[\text{deom.}]{} x = 0$

$T_{Q_2}\bar{C}$: $x_2 = 0 \xRightarrow[\text{deom.}]{} y = 0$



- ellissi: $x^2 + y^2 = 1$

cerchio

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

F : $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} -2x_0 \\ 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{MAI}$$

Punti all'∞ : $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0 \quad : x_1^2 = -x_2^2$

$= i \pm \sqrt{x_2^2}$

$(0 : i\sqrt{x_2^2} : x_2)$: $x_2 = 1$ $(0 : i : 1)$ $= Q_1$

$(0 : -i\sqrt{x_2^2} : x_2)$ $(0 : -i : 1)$ $= Q_2$

PUNTI CICLICI

$$T_{Q_1}\overline{C} : \begin{pmatrix} 0 & -2i & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2i\,x_1 + 2\,x_2 = 0 \qquad /:2$$

$$-i\,x_1 + x_2 = 0$$ Non è REALE

$$T_{Q_2}\overline{C} : \quad i\,x_1 + x_2 = 0$$

$\Longrightarrow$ il cerchio NON ha esintoti

Es: $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

$(x^2+1)\cdot y - (x^3-1) = 0$: trovare esintoti