Visto: Q sing. $\Leftrightarrow \nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ & retta tg in un punto liscio.

Vogliamo criterio affinché Q singolare abbia molteplicità $m \geq 2$.

$Q = (q_0 : q_1 : q_2)$, $A = (a_0 : a_1 : a_2) \neq Q$

$L = \overline{QA}$, $L \cap Z_p(F)$:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda q_0 + \mu a_0 \\ \vdots \\ x_2 = \lambda q_2 + \mu a_2 \end{cases}$$

Q corrisponde $\mu = 0$

$$F(\lambda q_i + \mu a_i) = F(\underbrace{\lambda q_0 + \mu a_0}, \lambda q_1 + \mu a_1, \underbrace{\lambda q_2 + \mu a_2})$$

$= G(\lambda, \mu)$

considero come polinomio in μ e scrivo Taylor in $\mu = 0$

$$= \underbrace{\overset{=0}{F(\lambda q_i)}}_{\text{omog. di grado } d} + \Big(\underbrace{\partial_{x_0} F(\lambda q_0, \lambda q_1, \lambda q_2)}_{\substack{\text{omogeneo in } \lambda \text{ (oppure nullo)} \\ \text{di grado } \deg F - 1 = d-1 \\ = \lambda^{d-1} \partial_{x_0} F(Q)}} \cdot a_0 + \partial_{x_1} F(\lambda q_0, \lambda q_1, \lambda q_2) \cdot a_1 + \partial_{x_2} F(\lambda q_i) \cdot a_2\Big) \cdot \mu +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \Big(\sum_{i,j=0}^{2} \overbrace{\partial_{x_i x_j} F(\lambda q_i)}^{\text{omog. (o nullo) di grado } d-2} a_i a_j \Big)}_{= (\partial_{\mu\mu} G)(\lambda, 0)} \mu^2 + \dots$$

raccolgo λ^{d-2}

$$+ \dots + \frac{1}{m!} \Big(\sum_{i_1, \dots, i_m = 0}^{2} \underbrace{\partial_{x_{i_1} \dots x_{i_m}} F(\lambda q_i)}_{\substack{\text{è omog. o nulla} \\ \text{ha grado } d-m}} \cdot a_{i_1} \cdots a_{i_m} \Big) \mu^m + \dots$$

$$F(\lambda q_i + \mu a_i) = \lambda^d \underbrace{F(Q)}_{\substack{=0 \\ \text{se } Q \in Z_p(F)}} + \lambda^{d-1} \mu \Big(\sum_{i=0}^{2} \partial_{x_i} F(Q) \cdot a_i \Big) + \frac{1}{2} \lambda^{d-2} \mu^2 \Big(\sum_{i,j=0}^{2} \partial_{x_i x_j} F(Q) a_i a_j \Big) +$$

$$+ \dots \frac{1}{m!} \lambda^{d-m} \mu^m \Big(\sum_{i_1, \dots, i_m = 0}^{2} \partial_{x_{i_1} \dots x_{i_m}} F(Q) \cdot a_{i_1} \cdots a_{i_m} \Big) + \dots$$

FORMULA DI TAYLOR OMOGENEA

CONSEGUENZA: Q è singolare di molt. m

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $F(\lambda q_i + \mu a_i)$ è divisibile per μ^m e non è divisibile per μ^{m+1}

$\Longleftrightarrow$ tutte le derivate parziali k-esime di F, con $k \leq m-1$, si annullano in Q, ed esiste almeno una derivata parziale m-esima che non si annulla in Q.

Infatti: $\Updownarrow$

$$\sum_{i_1, \dots, i_k = 0}^{2} \partial_{x_{i_1} \dots x_{i_k}} F(Q) \cdot a_{i_1} \cdots a_{i_k} = 0 \quad (*)$$

$\forall$ $A = (a_0 : a_1 : a_2) \neq Q$

$\in \mathbb{P}^2 \setminus \{Q\}$

$\Longleftrightarrow$ tutti i coeff. $\partial_{x_{i_1} \dots x_{i_k}} F(Q) = 0$

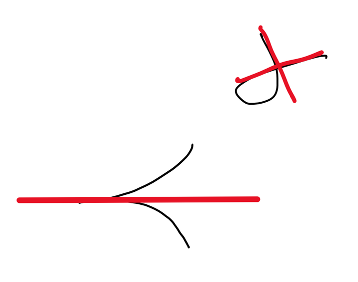
(altrimenti $(*)$ determinerebbe una curva di grado k; in particolare, non si annullerebbe su $\mathbb{P}^2 \setminus \{Q\}$ (supp. $\mathbb{K}$ infinito; ma noi stiamo cons. $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, in part. infinito))

Def.: Se Q è singolare per $Z_p(F)$, di molt. m; allora la curva proiett. di eq.

$$\sum_{i_1, \dots, i_m = 0}^{2} \underbrace{\partial_{x_{i_1} \dots x_{i_m}} F(Q)}_{\text{non sono tutti nulli}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} = 0$$

si dice CONO TANGENTE a $Z_p(F)$ in Q

Vedremo: è unione di m rette (non necessariamente distinte) per Q.



Ogni tale retta si chiama TANG. PRINCIPALE nella singolarità