Lezione 25 ottobre 2024

venerdì 25 ottobre 2024 08:13

Visto: nozione di continuità

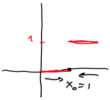
f continua in x_0 se:

- esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$
- si ha $l = f(x_0)$

Esempio di funzione non continua:

$$f(x) = [x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le x\}$$

Non è continua in $x_0 = 1$:



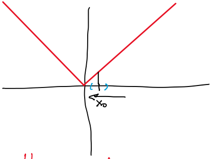
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

Esempio di funz. continue: tutte le funz. elementari

in part. valore assoluto:

$f(x) = |x|$



unico possibile problema si ha in $x_0 = 0$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} \underset{\sim}{x} & \text{se } x \ge 0 \\ -x & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

: $x_0 > 0$ la funz. x è continua e $\lim_{x \to x_0} |x| = x_0$

Esercizio: verificare usando la def. di limite

- se $x_0 < 0$, si ha $\lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{x \to x_0} (-x) = -x_0$

Se $x_0 = 0$

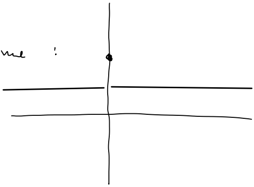
$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0\\&\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0\end{aligned}\right\} =$$

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0 = l \in \mathbb{R}$$

Infine: $l = f(x_0)$, $x_0 = 0$

$f(x_0) = |x_0| = |0| = 0$ ✓

Esempi discontinue :



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Controllo continuità in 0 :

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\underbrace{x\to 0^+}} 1 = 1\\&\boxed{(x_0,}\ x_0+\delta)\\&(0,\ 0+\delta)\\&\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1\end{aligned}\right\} =$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$$

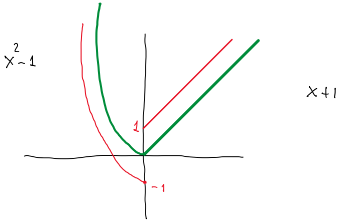
- $f(0) = 2 \neq 1 = \lim_{x\to 0} f(x)$

Non vale la seconda condiz.

Esercizi: abbiamo funzioni definite al variare di un parametro $a \in \mathbb{R}$

ad es. $$f(x) = \begin{cases} x + a & x \geq 0 \\ x^2 - a & x < 0 \end{cases}$$

$a = 1$



$a=0$ è continua

* * *

DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Def.: Sia $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$

sia $x_0 \in I$ interno

diciamo che f è derivabile in x_0 se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = l \in \mathbb{R}}$$

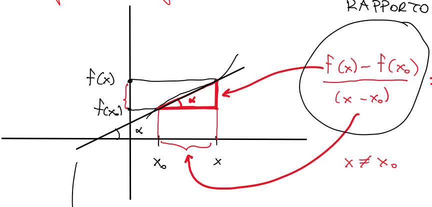
(il limite esiste ed è finito)

Indicheremo $l = f'(x_0)$

DERIVATA PRIMA di f in x_0.

Significato geometrico:

RAPPORTO INCREMENTALE



$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)} = tg\,\alpha$$

$x \neq x_0$

$y = \boxed{m}\,x + q$, ovvero

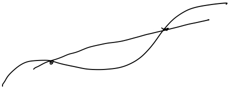
$y = (tg\,\alpha)\cdot x + q$: retta per i punti

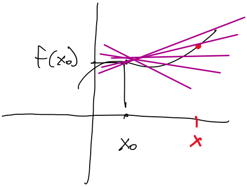
$(x_0, f(x_0))$ e

$(x, f(x))$

Questa è una **RETTA SECANTE**

il Γ_f .

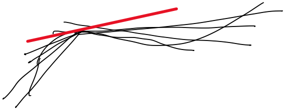




$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ha il significato di "coeff. angolare limite"

cioè, mi chiedo se le rette secanti ammettono una posizione limite

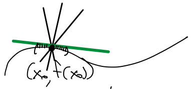


Def.: Se f è derivabile in x_0, la retta

$$y = \underbrace{f'(x_0)} \cdot (\underset{\substack{\downarrow\\ \text{variabile}}}{\boxed{x}} - \underbrace{x_0}) + \underbrace{f(x_0)} \qquad \text{numeri}$$

si chiama **RETTA TANGENTE** al GRAFICO DI f nel punto $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^2$

VEDREMO:



Tra tutte le rette passanti per $(x_0, f(x_0))$, la retta tg è quella che "approssima meglio localmente la funzione"

Intanto: la retta tg passa per $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$$

se $(x, y) = (x_0, f(x_0))$

$$f(x_0) \overset{?}{=} f'(x_0)\,(x_0 - x_0) + f(x_0) \quad \text{sì}$$

Significato fisico:

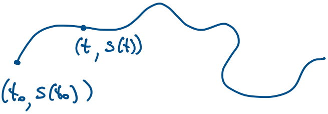
Se una particella si muove nel piano

con una legge $s(t)$

$$s : I \to \mathbb{R}$$

$$\Gamma_s = \{ (t, s(t)) \} \subseteq \mathbb{R}^2$$

TRAIETTORIA



$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = v(t)$$ velocità media

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$ VELOCITÀ ISTANTANEA

al tempo t_0

Def.: f è DERIVABILE su I intervallo

$\Longleftrightarrow$ f è derivabile in x_0 per ogni $x_0 \in I$.

RELAZIONE TRA CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ

Teorema: Se f è derivabile in x_0 $\Rightarrow$ f è continua in x_0.

Dim.: f derivabile in x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = \ell \in \mathbb{R}$$

voglio capire $\lim_{x \to x_0} f(x)$

Osserviamo che $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$

$$\iff \lim_{x\to x_0} \underbrace{\left(f(x)-f(x_0)\right)}_{} = 0$$

funzione differenza

f − funzione costante

Trucco: $\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}\cdot(x-x_0)}_{}$

non è def. in $x = x_0$

PERÒ vicino a x_0 ha gli stessi valori di $f(x)-f(x_0)$; i limiti, se esistono, sono uguali

$$\lim_{x\to x_0}\left(\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}}_{g(x)}\cdot\underbrace{(x-x_0)}_{h(x)}\right)$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = l = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

esiste ed è finito

$$\lim_{x\to x_0} (x-x_0) = 0$$

I due limiti esistono e sono finiti

$\longrightarrow$ il limite del prodotto è il prodotto dei limiti

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}\cdot(x-x_0)\right) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

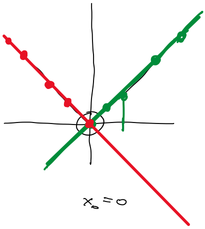
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\underbrace{\overbrace{\left(f(x)-f(x_0)\right)}^{\nearrow\, 0}}_{h(x)} + \overset{\nearrow\, f(x_0)}{f(x_0)}\right)$$

$$= 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

VICEVERSA : NON VALE ⚠

Controesempio :



$$f(x) = |x|$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\boxed{f(x)} - f(0)}{x - 0}$$

$$f(0) = |0| = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

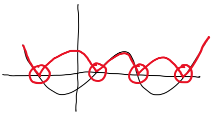
$$\ne$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

$\Rightarrow$ $f'(0)$ non esiste

Esercizio: se $f(x)$ derivabile, ma
che assume sia valori positivi che negativi

$\Rightarrow$ $|f(x)|$



Supp. $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

cons. $h(x) = f(x) - f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} (\underbrace{f(x)}_{\text{finito}} - \underbrace{f(x_0)}_{\text{finito}})$$

Teo
sui limiti

$$= \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x_0)$$

$$= f(x_0) - f(x_0) = 0$$

Viceversa: se $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$