Istituzioni di Algebra e Geometria
A.A. 2024/2025
Foglio di esercizi 3

27 ottobre 2024

1. (a) Siano $f, g \in \mathbb{K}[x, y]$. Si dimostri che i polinomi omogeneizzati verificano
$$h(f \cdot g) = hf \cdot hg.$$
   (b) Siano $F, G \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ due polinomi omogenei. Si dimostri che i deomogeneizzati verificano
$$a(F \cdot G) = aF \cdot aG.$$

2. Sia $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$. Si dimostri che se F è un polinomio omogeneo di grado $d \geq 1$, allora $\varphi(Z_P(F))$ è il luogo degli zeri di un polinomio dello stesso grado d.

   Si verifichi, inoltre, che φ mantiene il numero e i gradi delle componenti irriducibili di $Z_P(F)$.

3. Usando la teoria del risultante, si calcoli la molteplicità di intersezione delle curve proiettive di equazioni
$$x_1^3 - x_0^2 x_2 = 0, \qquad x_1^2 - x_0 x_2 = 0,$$
   nel punto $(1 : 0 : 0)$.

4. Si consideri la curva affine di equazione
$$x^5 - x^2 + x - 1 - y(x^4 - 2x^2 - x + 1) = 0.$$
   Si determini un'equazione della sua chiusura proiettiva, le coordinate di eventuali punti singolari, e le equazioni affini di eventuali asintoti.

5. Si scelgano due curve algebriche affini dalla pagina

   http://www.mi.imati.cnr.it/ alberto/mnG70cURPISP.pdf

   e se ne studino punti impropri, punti singolari e asintoti.