

Foglio 1

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 + x - 1$. Si calcoli

a) $f(0), f(-1), f(3x)$;

b) $f \circ f$;

c) $(f(x))^2, f(x^2)$;

d) $f^{-1}([2, 4])$.

Inoltre, si dica se f è iniettiva e/o suriettiva.

Esercizio 2. Sia $f(x) = x^2 + 4$. Provare che $f(\mathbb{R}) = [4, +\infty)$.

Esercizio 3. Sia $f(x) = x^2 + 2x - 5$. Provare che $f(\mathbb{R}) = [-6, +\infty)$.

Esercizio 4. Utilizzando la definizione di limite provare che

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} (2x + 1) &= -3, & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2} &= 7, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x - 3}{3x} &= 3, & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} &= 2, \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x + 1} &= \infty, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 1) &= \infty, & \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 x^2 &= +\infty\end{aligned}$$

Esercizio 5. Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x), & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + x + 1}{x^2 + 3x}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + x + 1}{-3x^3 + 2x^2 - x + 8}, & \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + x + 1}{-5x^2 - x + 7}, \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 - x}{x^5 + 2x^2}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}), & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 1}{e^{2x} + 2}.\end{aligned}$$

Esercizio 6*. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Provare che non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.