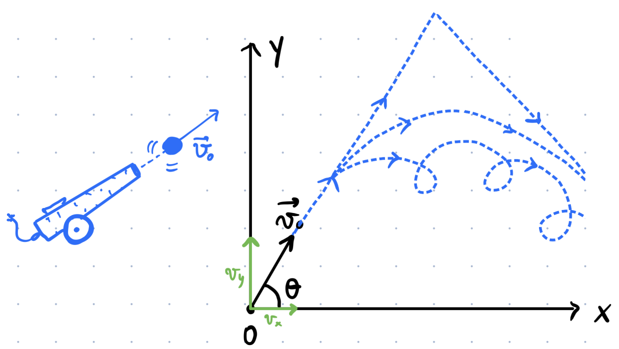
Lezione 3: Moti curvi e circolari

1 Concetti discussi

Moti curvi e circolari

2 Moto in due dimensioni: accelerazione costante

Esaminiamo ora il caso di un moto in due dimensioni di un punto materiale soggetto ad un'accelerazione costante. Il caso tipico è il moto di una palla di cannone. In questo caso la palla di cannone è soggetta solamente all'accelerazione di gravità. Come descriviamo questo tipo di moto? che traiettoria avrà?



Il modo più semplice per affrontare il problema è separare il moto orizzontale da quello verticale. La gravità agisce unicamente lungo la verticale. Quindi lungo la verticale il moto è uniformemente accelerato. Lungo la direzione orizzontale non c'è nessuna accelerazione. Quindi il moto orizzontale sarà rettilineo uniforme.

Alla bocca del cannone la palla avrà una velocità $\vec{v_0}$ che sarà ad un certo angolo θ rispetto al piano orizzontale. Pertanto possiamo calcolare la velocità iniziale nella componente orizzontale e verticale come

$$\begin{cases} \vec{v_0} = v_{0x}\hat{x} + v_{0y}\hat{y} \\ v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases} . \tag{1}$$

Possiamo fare la stessa cosa per l'accelerazione di gravità. In questo caso:

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} \\ a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \tag{2}$$

e quindi $\vec{a} = -g\,\hat{y}$. Con tutte queste informazioni possiamo scrivere le equazioni del moto. Partiamo con il moto orizzontale

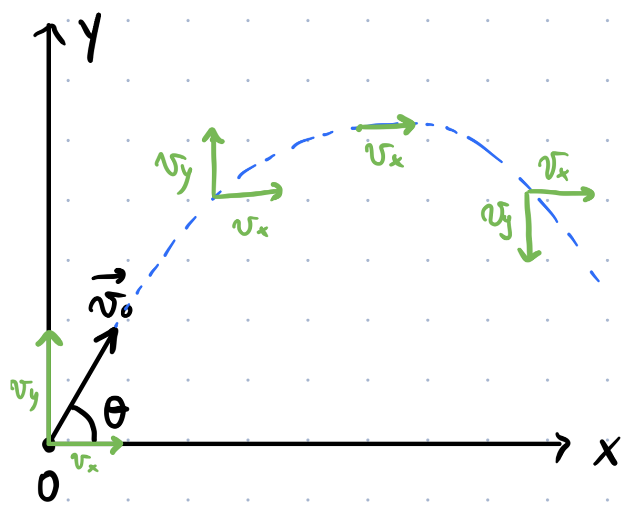
$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta = \text{costante} \\ x(t) = x_0 + v_{0x} t = v_0 \cos\theta \end{cases} \tag{3}$$

in cui ho assunto che x_0 sia 0 visto che la palla di cannone parte dall'origine degli assi cartesiani.

Lungo l'asse verticale il moto è uniformemente accelerato, quindi

$$\begin{cases} v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta - gt \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \tag{4}$$

Qui sotto è quello che mi aspetto di vedere per le due velocità. La velocità orizzontale rimane costante, mentre quella verticale diminuisce fino ad azzerarsi nel punto più alto e diventerà negativa finchè la palla non tocca terra.



Come calcolo la **traiettoria**? si ricordi che la traiettoria è l'insieme di tutte le posizioni assunte durante il moto. Quindi in questo caso voglio calcolare $y(x)$. In pratica ho un sistema di quattro equazioni (velocità e posizione in x e y) e voglio riscriverle y non più in funzione del tempo ma di x. Quindi quello che voglio fare è eliminare il tempo. Come posso fare? un modo è quello di prendere l'equazione della posizione $x(t)$ ed invertirla per esprimere il tempo in funzione di x. Quindi $t = x/(v_0 \cos\theta)$ e sostituire il tempo nell'equazione della posizione y. Pertanto

$$y = v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos\theta)^2} = \tan\theta x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

Quindi il moto è una parabola!

Calcoliamo ora la gittata. Vogliamo quindi sapere quanto lontano arriva la palla di cannone. Identifichiamo la gittata con G, quindi desideriamo che $x = G$ e che $y = 0$. Usando l'equazione precedente possiamo scrivere che

$$0 = \tan\theta G - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}G^2$$

e quindi

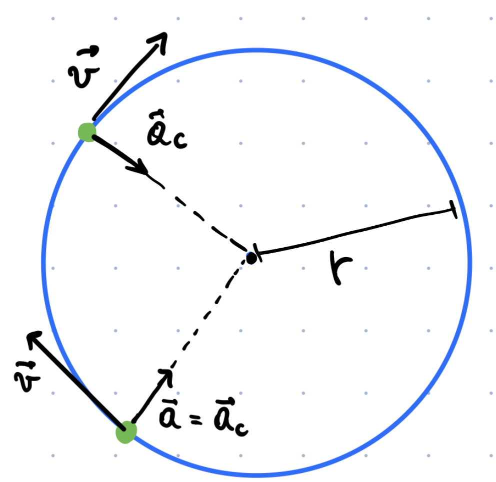
$$G = \tan\theta\frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g} = \frac{v_0^2}{g}2\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$$

Ad esempio per $\theta = \pi/4$ (45°), la gittata $G = \frac{v_0^2}{g}$. Questo ci dice innanzi tutto che lanciare a 45°permette di avere la massima gittata possibile ($\sin 2\pi/4 = 1$). Inoltre se l'accelerazione di gravità fosse più piccola avremmo una gittata ancora più lunga. Ad esempio sulla luna dove l'accelerazione di gravità è sei volte più bassa, la gittata sarebbe sei volte più lunga.

3 Moto curvilinei: moto circolare uniforme

Il moto curvilineo è anch'esso un moto in due o più dimensioni e a differenza del moto parabolico discusso prima è caratterizzato da una traiettoria generica curva. Che cosa porta a curvare una traiettoria? Ripensiamo all'esempio della palla di cannone. Il moto della palla, anziché essere rettilineo è parabolico per la presenza dell'accelerazione di gravità. Quindi, è l'accelerazione che fa variare la direzione della velocità! L'accelerazione fa variare sia il modulo della velocità (pensiamo ad una macchina che accelera) sia la sua direzione.

Studiamo ora il caso del **moto circolare uniforme**. Questo moto rappresenta il moto di un corpo su una traiettoria circolare con velocità constante (in modulo) $|\vec{v}|$ = costante. Se la traiettoria è circolare, allora la velocità continua a cambiare direzione (si ricordi che la velocità è il vettore tangente alla curva). Quindi deve esserci un'accelerazione che ne modifica la direzione. Questa accelerazione si chiama **accelerazione centripeta**, $\vec{a_c}$, ed è un vettore che punta verso il centro del cerchio della traiettoria. Si noti che deve sempre puntare verso lo stesso punto altrimenti la traiettoria non sarebbe circolare. Questo tipo di



moto si verifica ad esempio se ho una corda legata da una parte ad un palo e dall'altra ad un oggetto che si muove con velocità costante. Come vedremo più avanti, la corda esercita una forza che tira l'oggetto verso il centro facendogli quindi descrivere una traiettoria circolare.

Grandezze fisiche importanti a descrivere questo tipo di moto solo il **periodo**, la **frequenza**, la **velocità angolare** e l'**accelerazione centripeta**.

Cominciamo con il **periodo**. Il periodo, T, è il tempo che il punto impiega a compiere un giro completo. Come facciamo a calcolarlo? partiamo con il calcolare la velocità media. Sappiamo che la velocità media per compiere una traiettoria è il rapporto tra la lunghezza della traiettoria e il tempo impiegato ($s/\Delta t$). Nel caso di moto circolare, la lunghezza della traiettoria è la lunghezza della circonferenza quindi $s = 2\pi r$. Il tempo impiegato a coprire la circonferenza è esattamente il periodo T a cui siamo interessati. Ne consegue che $v = 2\pi r/T$ e quidni $T = 2\pi r/v$ dove v è il modulo della velocità. Il periodo si misura in secondi. La **frequenza** è semplicemente l'inverso del periodo. Quindi $\nu = 1/T$ e si misura in Hertz (Hz). La **velocità angolare**, ω, la cui unità di misura è rad/s, indica la rapidità con cui viene spazzato l'angolo. Questo significa che posso scrivere:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\,. \tag{5}$$

Sappiamo che in un perido T, il punto compie tutto un giro, e quindi spazza l'angolo $\theta = 2\pi$ (360°). Quidni usando l'equazione di prima possiamo scrivere che

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}\,. \tag{6}$$

Questa equazione ci fornisce anche una relazione tra velocità angolare e velocità

$$v = \omega\, r\,. \tag{7}$$

L'**accelerazione centripeta** invece si calcola come $a_c = v^2/r$

Facciamo ora qualche esempio e calcolaliamo la velocità a cui ruota una persona chesi trova all'equatore. Il raggio della terra è R =6378 km e assumiamo che il periodo di rotazione sia di T = 24 ore. Quindi $v = \omega R = 2\pi R/T = 1670$ km/h! Allo stesso modo possiamo calcolare la velocità con la quale ruotiamo attorno al sole, sapendo che la distanza terra sole è di circa 150×10^6 km e che il tempo di rivoluazione è di circa 365 giorni (8760 ore). In questo caso assumiamo un'orbita circolare anzichè ellittica. Quindi $v = \omega R = 2\pi R/T \approx 107 \times 10^3$ km/h!