# Lezione 29 ottobre 2024

martedì 29 ottobre 2024 16:52

$$F(\lambda q_i + \mu a_i) = \lambda^d \underbrace{F(Q)}_{\substack{=0 \\ \text{se } Q \in Z_p(F)}} + \lambda^{d-1}\mu \left(\sum_{i=0}^{2} \partial_{x_i} F(Q)\cdot a_i\right) + \frac{1}{2}\lambda^{d-2}\mu^2 \left(\sum_{i,j=0}^{2} \partial_{x_i x_j} F(Q)\, a_i a_j\right) +$$

$$+ \dots \frac{1}{m!}\lambda^{d-m}\mu^m \left(\sum_{i_1,\dots,i_m=0}^{2} \partial_{x_{i_1}\dots x_{i_m}} F(Q)\cdot a_{i_1}\cdots a_{i_m}\right) + \dots$$

$$\underbrace{\sum_{i_1,\dots,i_m=0}^{2} \partial_{i_1,\dots i_m} F(Q)\, x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} = 0 \quad : \quad CT_Q F}_{\text{CONO TG}}$$

Visto:

$$\sum_{i_1,\dots,i_m=0}^{2} \partial_{x_{i_1}\dots x_{i_m}} F(Q)\cdot a_{i_1}\cdots a_{i_m} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\overline{QA} = L$ ha molt. int.

$$I_Q(Z_p(F), L) \geq m+1$$

Se cons. $A' \in \overline{QA}$, $A' \neq Q$

$\Rightarrow$ $\overline{QA'} = \overline{QA}$, $A' = (a_0' : a_1' : a_2')$

$\Rightarrow$
$$\sum_{i_1,\dots,i_m=0}^{2} \partial_{x_{i_1}\dots x_{i_m}} F(Q)\cdot a'_{i_1}\cdots a'_{i_m} = 0$$

$$\overline{QA'} : \quad \begin{cases} x_0 = \lambda q_0 + \mu a_0' \\ x_1 = \lambda q_1 + \mu a_1' \\ x_2 = \lambda q_2 + \mu a_2' \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ogni punto $A'$ di $\overline{QA}$ appartiene al cono tangente

$\Rightarrow$ $\overline{QA} = L \subseteq CT_Q F$

**COR.**: $CT_Q F$ è unione di rette passanti per $Q$ (non necessariamente distinte).

Vediamo per $m=2$ direttamente:

Visto IDENTITÀ DI EULERO : F omogeneo

allora

$$(\deg F)\cdot F = x_0\,\partial_{x_0}F + x_1\,\partial_{x_1}F + x_2\,\partial_{x_2}F$$

$\deg F = d$

$$\begin{cases} (d-1)\,\partial_{x_0}F = x_0\cdot\partial_{x_0x_0}F + x_1\,\partial_{x_0x_1}F + x_2\,\partial_{x_0x_2}F \\ (d-1)\,\partial_{x_1}F = x_0\cdot\partial_{x_0x_1}F + x_1\,\partial_{x_1x_1}F + x_2\,\partial_{x_1x_2}F \\ (d-1)\,\partial_{x_2}F = x_0\,\partial_{x_0x_2}F + x_1\,\partial_{x_1x_2}F + x_2\,\partial_{x_2x_2}F \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad d(d-1)\cdot F = \sum_{i,j=0}^{2}\partial_{x_ix_j}F\cdot x_i\cdot x_j$$

$$= (x_0\ \ x_1\ \ x_2)\cdot H_F\cdot\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

IDENTITÀ DI EULERO DEL SECONDO ORDINE

Analog.:

$$d\cdot(d-1)\cdots(d-m+1)\cdot F = \sum_{i_1,\dots,i_m=0}^{2}\overbrace{\partial_{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}}F}^{\text{di grado } d-m}\cdot x_{i_1}\cdot x_{i_2}\cdots x_{i_m}$$

COR.: F omogeneo; se Q annulla tutte le derivate parziali k-esime → automaticamente annulla tutte le derivate precedenti ($m$-esime per $m<k$); in particolare, Q annulla F.

Altre conseguenze:

$$(\circledast)\ \begin{cases} 0=(d-1)\,\partial_{x_0}F(Q)= q_0\cdot\partial_{x_0x_0}F(Q)+ q_1\,\partial_{x_0x_1}F(Q)+ q_2\,\partial_{x_0x_2}F(Q) \\ 0=(d-1)\,\partial_{x_1}F(Q)= q_0\cdot\partial_{x_0x_1}F(Q)+ q_1\,\partial_{x_1x_1}F(Q)+ q_2\,\partial_{x_1x_2}F(Q) \\ 0=(d-1)\,\partial_{x_2}F(Q)= q_0\,\partial_{x_0x_2}F(Q)+ q_1\,\partial_{x_1x_2}F(Q)+ q_2\,\partial_{x_2x_2}F(Q) \end{cases}$$

supp. Q sia singolare, quindi $\nabla F(Q) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

di molteplicità $m=2$ (non annulla tutte le derivate parziali seconde)

se $H_F(Q) = (\partial_{x_ix_j}F(Q))$ matrice hessiana

si ha $q_0\cdot\underbrace{H_F(Q)^{(1)}}_{\text{prima colonna}} + q_1\cdot H_F(Q)^{(2)} + q_2\cdot H_F(Q)^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

→ le tre colonne sono LIN. DIP.

$\Longrightarrow$ $\det H_F(Q) = 0$

$$\Rightarrow \quad CT_Q F \; : \quad \sum_{i,j=0}^{2} \partial_{x_i x_j} F(Q) \cdot x_i x_j = 0$$

$$= (x_0 \; x_1 \; x_2) \cdot H_F(Q) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

è una CONICA rappresentata da una matrice simmetrica con det $= 0$

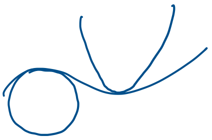
$\Rightarrow$ la conica è degenere, e quindi è unione di 2 rette (non necess. distinte).

**Def.:** In generale, possiamo cons. la conica

$$(x_0 \; x_1 \; x_2) \cdot H_F(Q) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

: CONICA OSCULATRICE ALLA CURVA $Z_p(F)$

anche se $Q$ NON è SINGOLARE



## CONDIZIONI DI SINGOLARITÀ NEL CASO AFFINE

Supp.:

$Q = (1:0:0) \in Z_p(F) \cap U_0$; $\quad j_0 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow U_0$

$j_0^{-1}(Q) = (0,0)$

$j_0^{-1}(Z_p(F) \cap U_0) = Z({}_0F)$

sia $f(x,y) = {}_0F$ ; $(0,0) \in Z(f)$

$$f(x,y) = \underbrace{f_0}_{=0} + f_1(x,y) + f_2(x,y) + \cdots + f_d(x,y)$$

$= 0$ perché $f(0,0) = 0$

$f_i(x,y)$: omogenei di grado d

prendo generica retta per $Q = (0,0)$ e verifico la molt. di int.

$$\begin{cases} x = lt \\ y = mt \end{cases}$$

$$f(lt, mt) = f_1(lt, mt) + f_2(lt, mt) + \cdots + f_d(lt, mt)$$

$$= t\, \underbrace{f_1(l,m)} + t^2 \cdot \underbrace{f_2(l,m)} + \cdots + t^d f_d(l,m)$$

$Q = (0,0)$ ha molt. $k$ $\Longleftrightarrow$ per ogni retta per $(0,0)$, cioè $\forall$ scelta $(l,m)$, sia che $t^k$ divide $f(lt, mt)$

$\Longrightarrow f_1(l,m) = 0,\ f_2(l,m) = 0,\ \dots,\ f_{k-1}(l,m) = 0$

$\forall\ (l,m) \neq (0,0)$

$\Longleftrightarrow$ i polinomi $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}$ sono IDENTICAMENTE NULLI

**PROP:** $f = f_1 + f_2 + \dots + f_d$ ha $(0,0)$ come punto singolare di molt. $k$ $\Longleftrightarrow$ $f_1 \equiv f_2 \equiv \dots \equiv f_{k-1} \equiv 0$

**COR.:** $f = f_d + f_{d-1}$ ha un punto di molt. $\geq d-1$

**Es.:** $f = y^4 - x^3y + 2x^2y - 3x^3 + 8x^2 - 7y^2$

manca $f_1$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ è doppio

Cono tg affine: $8x^2 - 7y^2 = 0$

$(\sqrt{8}\,x - \sqrt{7}\,y)(\sqrt{8}\,x + \sqrt{7}\,y) = 0$

**SUGG.:** Se $Z_p(F)$ ci sono singolarità in $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ opp. $(0:0:1)$, conviene deomog. e lavorare in $(0,0) \in \mathbb{A}^2$

* * *

**Pb.:** Quali sono gli eventuali punti singolari?

**OSS.** se $F$ non è ridotto:

$F = F_1^{m_1} \cdot F_2^{m_2} \cdots F_r^{m_r}$ con $m_1 \geq 2$

$\Rightarrow$ allora $Z_p(F_1)$ è tutto di punti singolari

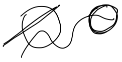
Infatti: Leibniz:

$$= m_1 \cdot F_1^{\overset{\geq 1}{m_1 - 1}} \cdot \partial_{x_i} F_1$$

$$\partial_{x_i} F = \boxed{\partial_{x_i}(F_1^{m_1})} \cdot F_2^{m_2} \cdots F_r^{m_r} + F_1^{m_1} \cdot \partial_{x_i}(F_2^{m_2}) \cdots F_r^{m_r} + \dots + F_1^{m_1} \cdot F_2^{m_2} \cdots \partial_{x_i}(F_r^{m_r})$$

$$= F_1 \cdot (\cdots\cdots)$$

cioè $F_1$ divide $\partial_{x_0} F$, $\partial_{x_1} F$ e $\partial_{x_2} F$



Def.: Sia $\mathcal{C} = (Z_p(F), F)$

oppure $C = (Z(f), f)$;

poniamo $\mathcal{C}_{sing} = \{Q \in Z_p(F) : Q \text{ è singolare}\}$

$C_{sing} = \{q \in Z(f) : q \text{ è singolare}\}$

TEOREMA: se $F$ è ridotto (cioè non ha fattori multipli), allora

$$\# \mathcal{C}_{sing} < +\infty .$$

Dim: Supp. $F$ IRRIDUCIBILE, $\deg F \geq 1$

3 casi: ① 2 derivate parziali $\equiv 0$

es. $\partial_{x_1} F = \partial_{x_2} F \equiv 0$

$\Rightarrow F = F(x_0) = a x_0^d$

$F$ ridotto $\Rightarrow d = 1 \Rightarrow Z_p(F)$ è retta

$\Rightarrow \mathcal{C}_{sing} = \emptyset$

② 1 deriv. parz. $\equiv 0$; es. $\partial_{x_2} F \equiv 0$

$\Rightarrow F = F(x_0, x_1)$; $K = \overline{K}$

$\Rightarrow F = \prod_{i=1}^{d} (c_1^i x_0 - c_0^i x_1)$

$F$ irriducibile $\Rightarrow d = 1$

$\Rightarrow Z_p(F)$ retta; NO punti singolari.

③ Tutte le deriv. parz. $\not\equiv 0$

(3a) $\partial_{x_0} F, \partial_{x_1} F, \partial_{x_2} F$ hanno fattore comune $H$:

$$\partial_{x_i} F = H \cdot H_i$$

Per Eulero: $(\deg F) \cdot F = x_0 \partial_{x_0} F + x_1 \partial_{x_1} F + x_2 \partial_{x_2} F$

$= x_0 H \cdot H_0 + x_1 \cdot H \cdot H_1 + x_2 \cdot H \cdot H_2$

$= H (x_0 H_0 + x_1 H_1 + x_2 \cdot H_2)$

$F$ irriducibile: impossibile.

(3b) 2 derivate parziali hanno 1 fattore comune $H$, ma le 3 derivate non hanno fattori comuni

es.: $\partial_{x_0} F = H \cdot H_0$

$\partial_{x_1} F = H \cdot H_1$

$$\mathcal{C}_{sing} : \underbrace{(Z_p(H) \cap Z_p(\partial_2 F))}_{\text{Bézout } \# < +\infty} \cup \underbrace{(Z_p(H_0) \cap Z_p(H_1) \cap Z_p(\partial_2 F))}_{\text{Bezout } \# < +\infty}$$

③c Le 3 derivate, a 2 a 2, non hanno fattori comuni

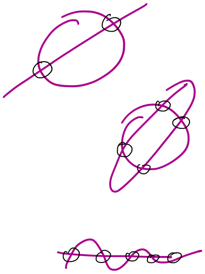
$$\mathcal{C}_{sing} = Z_p(\partial_{x_0}F) \cap Z_p(\partial_{x_1}F) \cap Z_p(\partial_{x_2}F) \subseteq \underbrace{Z_p(\partial_{x_0}F) \cap Z_p(\partial_{x_1}F)}_{\substack{\# < +\infty \\ \text{Bézout}}}$$

Secondo caso: F riducibile; $F = F_1 \cdot F_2 \cdots F_r$, $F_i$ irriducibili
RIDOTTO

Esercizio: se $F = F_1 \cdot F_2$

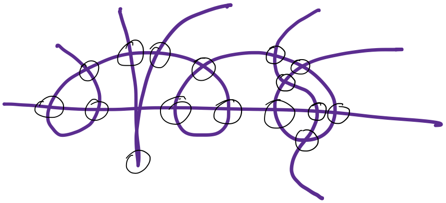
allora $Z_p(F_1) \cap Z_p(F_2)$

$\subseteq \mathcal{C}_{sing}$



$$\partial_{x_i}F = \partial_{x_i}F_1 \cdot F_2 + F_1 \cdot \partial_{x_i}F_2$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}_{sing} = \overset{\# < +\infty}{\mathcal{C}_{1_{sing}}} \cup \overset{\# < +\infty}{\mathcal{C}_{2_{sing}}} \cup \cdots \cup \overset{\# < +\infty}{\mathcal{C}_{r_{sing}}} \cup \underbrace{\left( \bigcup_{i,j} \underbrace{\left(Z_p(F_i) \cap Z_p(F_j)\right)}\right)}_{\substack{\text{Bézout } \# < +\infty \\ \text{unione finita}}}$$

$\mathcal{C}_i = (Z_p(F_i), F_i)$