Lezione 29 ottobre 2024
martedì 29 ottobre 2024 14:10

CONCAVITÀ E CONVESSITÀ

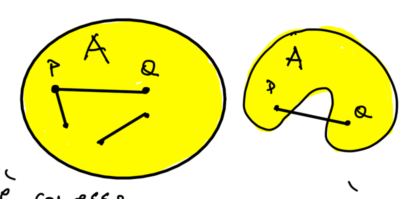
Def.: Una funzione f si dice CONVESSA su un intervallo I se il suo grafico presenta una concavità rivolta verso l'alto"

ovvero: la regione A delimitata inferiormente dal grafico di f su I, e dalle due rette verticali $x=a$ e $x=b$, dove $I=(a,b)$

è una regione CONVESSA

Def.: Una regione A del piano (limitata o illimitata) si dice CONVESSA se per ogni coppia di punti P, Q di A, si ha che il segmento PQ è interamente contenuto in A

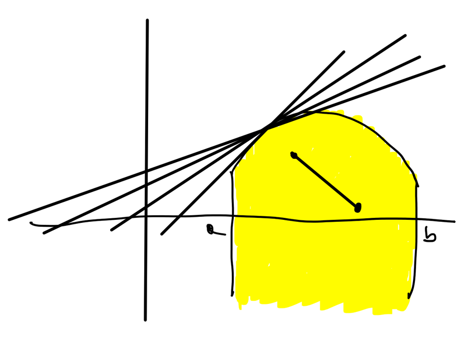
es.



è convessa non è convessa

Def.: Una funzione f si dice CONCAVA su I se la regione A delimitata superiormente dal grafico di f su I e dalle rette verticali $x=a$ e $x=b$, dove $I=(a,b)$, è convessa

("concavità rivolta verso il basso)



OSS.: Se su I la funzione f è derivabile, ed è ~~convessa~~ CONCAVA, allora osserviamo che la derivata prima (i cui valori corrispondono alla tg (tan) dell'angolo compreso tra asse x e la retta tangente nel punto) è una FUNZIONE ~~CRESCENTE~~ DECRESCENTE.

IERI: se g è una funzione t.c. $g'(x)>0$ (<0) su I $\Rightarrow$ $g(x)$ è STRETT. CRESC. (DECRESC.) su I

Applico alla funzione $g(x)=f'(x)$ e ottengo:

PROPOSIZIONE: Se $\underbrace{(f')'(x)}_{f''(x)}>0$ su I, allora $f'(x)$ è STR. CRESC. su I, cioè f è CONVESSA su I.

($f''(x_0)>0$ per ogni $x_0\in I$)

PROPOSIZIONE: Se $\underbrace{(f')'(x)}_{f''(x)}<0$ su I, allora $f'(x)$ è STR. DECRESC. su I, cioè f è CONCAVA su I.

$f''(x_0)<0$ per ogni $x_0\in I$

Def. Se $x_0\in D$, $f:D\to\mathbb{R}$ è un punto in cui la funzione passa da concava a convessa, o da convessa a concava, allora x_0 si dice

PUNTO DI FLESSO

cioè: esiste $\delta_1>0$ tale che su $I=(x_0-\delta_1,x_0)$ si ha f è concava (convessa) ed esiste $\delta_2>0$ tale che su $J=(x_0,x_0+\delta_2)$ si ha f è convessa (concava)

Proposizione: Se x_0 è un flesso, $x_0\in I$ ed è interno; supp. f derivabile su I, e f' sia derivabile su I.

Allora: $f''(x_0)=0$.

Esempi: $f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2=0 \iff x=0$ è punto critico

Vediamo se è min o max relativo:

$f'(x)=3x^2$ >0 : $x\neq 0$; <0 : mai

STR. CRESC. — 0 — STR. CRESC.
$f'>0$ $f'>0$

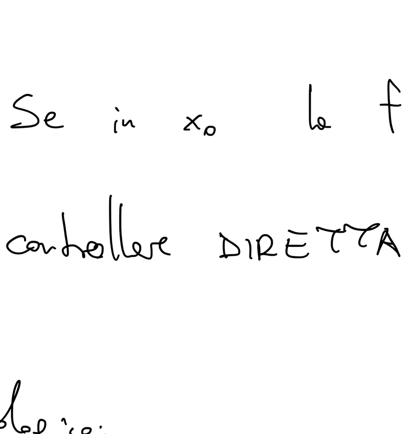
$f(0)=0^3=0$, $f(x)<0$, $x<0$
$f(x)>0$, $x>0$

$\Rightarrow$ $x=0$ non è estremo relativo e la funzione è strett. crescente su $\mathbb{R}$

$f''(x)=6x$ >0 : $x>0$ $\Rightarrow$ f è convessa; $=0$: $x=0$; <0 : $x<0$ $\Rightarrow$ f concava $\Big\}\Rightarrow$ $x=0$ è flesso

Esempio: $f(x)=x^4$

$f'(x)=4x^3$ >0 : $x>0$: f crescente; $=0$: $x=0$; <0 : $x<0$ f decresce $\Big\}\Rightarrow$ $x=0$ è MIN REL.



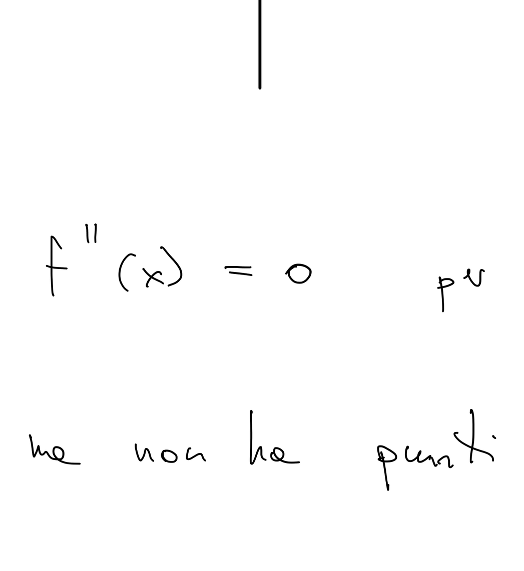
$f''(x)=12x^2$ >0 : $x\neq 0$ $\Rightarrow$ f è CONVESSA su $I=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $=0$: $x=0$

$\Downarrow$

$x=0$ NON è un FLESSO

⚠ Se in x_0 la $f''(x)$ NON è definita, controllare DIRETTAMENTE se x_0 è flesso

Es. patologico:



$f'(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x>0\\ -1 & \text{se } x<0\end{cases}$

$f'(0)$ non esiste

$f''(x)=0$ per $x\neq 0$,

ma non ha punti di flesso.

Esercizio: $f(x)=|x|$ è CONVESSA su tutto $\mathbb{R}$.