30 ottobre

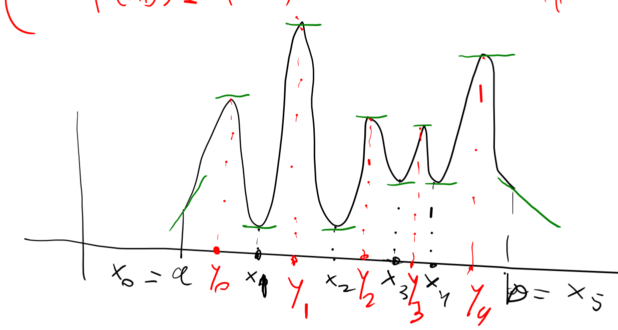
**Teorema** (Fermat) Sia $I$ un intervallo $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$. Supponiamo esista $f'(x_0)$. Allora se $x_0$ è un punto di massimo o ~~di~~ minimo di $f$ in $I$ si ha $f'(x_0) = 0$.

**Osservazioni** 1) L'enunciato vale anche nel caso in cui $x_0$ sia un punto di massimo o di minimo locale (o relativo) dove

**Def** $x_0 \in I$ è un punto di massimo (minimo) locale per $f$ se $\exists$ un $\varepsilon_0 > 0$ t.c.

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall \ x \in I \cap (x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0)$$

$$\Big( f(x_0) \leq f(x) \quad '' \quad '' \quad '' \Big)$$

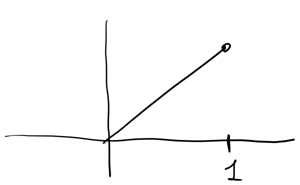



$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ sono punti di minimo local

$x_1$ e' il min. assoluto in $[a,b]$.

$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4$ sono massimi locali ed $y_1$ è il massimo assoluto.

2) $f(x) = x$ in $[0,1]$



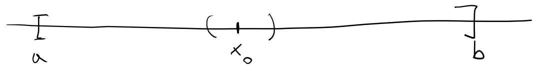

0 e' il punto di min ass.

1 è il punto di mass assoluto

$f'(0) = f'(1) = 1$

3) I punti $x \in I$ dove $f'(x) = 0$ sono chiamati punti critici di $f$.

Dim. Possiamo assumere che $x_0$ sia un punto di massimo relativo cioè che esiste un numero $\varepsilon_0$ t.c. $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in (x_0-\varepsilon_0, x_0+\varepsilon_0)$




Andiamo a valutare

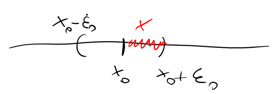
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Per valutare il limite consideriamo separatamente

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Cominciamo con $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$

$$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

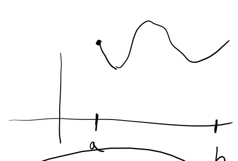



Sappiamo che per $x_0 < x < x_0+\varepsilon_0$

$$f(x_0) \geq f(x) \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0+\varepsilon_0 > x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \leq 0$$



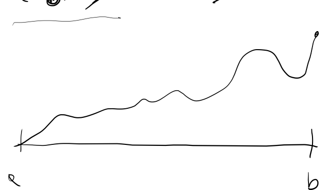

Consideriamo ora

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0-\varepsilon_0 < x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Sappiamo che $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x$ t.c. $x_0-\varepsilon_0 < x < x_0$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$



**Def** Sia $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$

Se esiste ed è finito $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

lo si chiama derivata destra di $f$ in $x_0$ e lo si denota con $f'_d(x_0)$

Se esiste ed è finito $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

lo si chiama derivata sinistra di $f$ in $x_0$ e lo si denota con $f'_s(x_0)$

**Esercizio** Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$

sono equivalenti le seguenti:

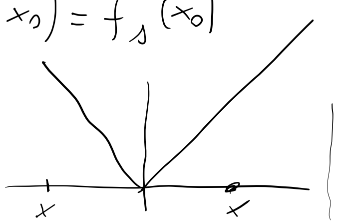
1) Esiste $f'(x_0)$ ;

2) esistono $f'_d(x_0)$ e $f'_s(x_0)$ e sono uguali.

Se 1) e 2) sono vere allora

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_s(x_0)$$

Es $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$



Se $(|x|)' = ?$

Se $x > 0$ $\quad (|x|)' = (x)' = 1$

Se $x < 0$ $\quad (|x|)' = (-x)' = -1$

$$(|x|)'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$(|x|)'_s(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

Esempio

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ in $[0,4]$

Trovare punti di massimo e minimo assoluti.

Siccome $f \in C^0([0,4])$ punti di massimo e di minimo assoluti esistono.

Dobbiamo estrarre un numero finito di punti da $[0,4]$ tra i quali si trovino i punti di massimo e minimo assoluti.

$0, 4$ sono due candidati

Cerchiamo candidati ad essere punti di massimo/min dentro $(0,4)$. Per Fermat, devono essere punti critici. Cerchiamo i punti critici in $(0,4)$

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = (2x^3 - 15x^2 + 36x)' = 6x^2 - 30x + 36$$

$$= 6(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x = 2, 3 \in (0,4)$$

I candidati sono $0, 2, 3, 4$

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$$

$\boxed{f(0) = 0}$ 0 è il punto di min assoluto

$f(2) = 28$

$f(3) = 27$

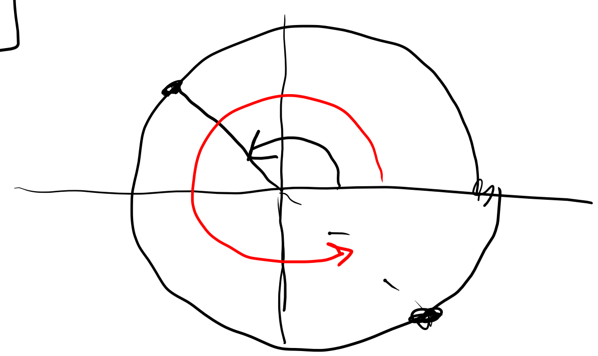
$\boxed{f(4) = 32}$ 4 è il punto di massimo assoluto

$f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ in $[0, 4\pi]$

trovare massimi e minimi assoluti in $[0, 4\pi]$

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) = 0$$

$*$ $\boxed{\sin x = -\cos x}$



$*$ è vero per

$\boxed{x = \frac{3}{4}\pi + n\pi}$ in $[0, 4\pi]$

$$x = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \left(\frac{3}{4}+2\right)\pi,\ \left(\frac{3}{4}+3\right)\pi$$

$0,\ 4\pi$

$f(x) = e^x \sin x$

$$f(0) = f(4\pi) = 0$$

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}},\quad f\left(\frac{3}{4}\pi + 2\pi\right) = e^{\left(\frac{3}{4}+2\right)\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -e^{\frac{7}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}},\quad f\left(\frac{3}{4}\pi + 3\pi\right) = -e^{\left(\frac{3}{4}+3\right)\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\frac{3}{4}\pi + 2\pi$ è il punto di massimo assoluto

$\frac{3}{4}\pi + 3\pi$ minimo assoluto

Esempio Dimostrare che $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

e che l'uguaglianza si ha solo per $x=0$.

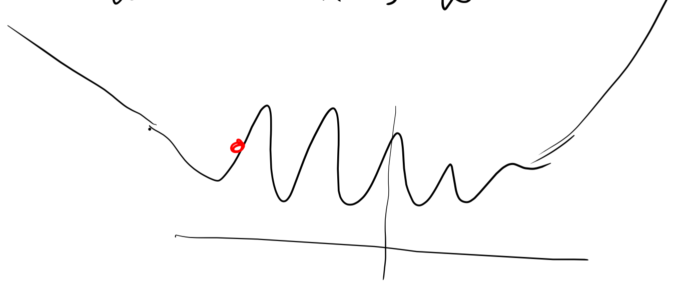
Consideriamo equivalentemente $e^x - x - 1 \geq 0$

Definisco $f(x) = e^x - x - 1$ definita in tutto $\mathbb{R}$.

Si tratta di dimostrare che 0 è l'unico punto di minimo assoluto. Consideriamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^x - x - 1\right) = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(e^x - x - 1\right) = 0 + \infty - 1 = +\infty$$



$\Downarrow$

$\exists$ un punto di minimo assoluto $x_0$

e deve essere un punto critico

$f(x) = e^x - x - 1$

$f'(x) = e^x - 1 = 0$

$e^x = 1 \qquad x = \lg 1 = 0$

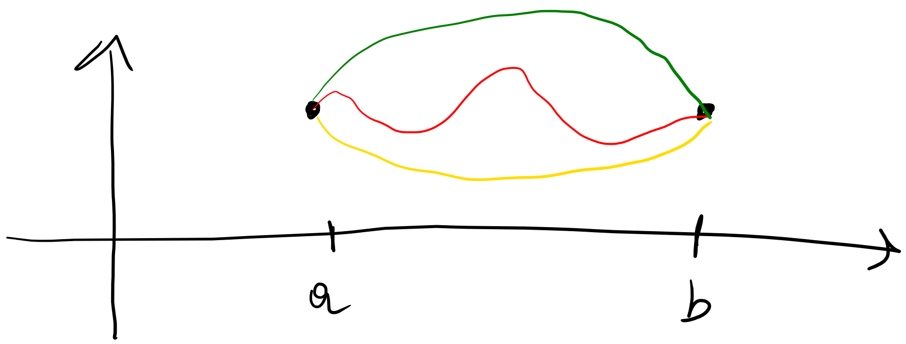
0 è l'unico punto di minimo assoluto

$\Rightarrow \quad f(x) > f(0) = 0 \quad \forall x \neq 0.$

# Teorema di Rolle, di Lagrange e di Cauchy

**Teorema (Rolle)** Sia $f \in C^0([a,b])$ con $f'(x)$ definita in $(a,b)$. Sia $f(a) = f(b)$. Allora $\exists$ $c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$

$a, b \in \mathbb{R}$




**Dim** Se $f$ è costante ovviamente $f'(x) \equiv 0$

Se $f$ non è costante allora $\exists$ $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0) \neq f(a) (= f(b))$

Supponiamo per fissare le idee che $f(x_0) > f(a) = f(b)$

So per Weierstrass che esiste un punto di massimo assoluto $c$. $f(c) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$

$$\Rightarrow \quad c \in (a,b) \xRightarrow{\text{Fermat}} f'(c) = 0$$