

Prof. V. Armenio

Università di Trieste, Piazzale Europa 1, 34127 Trieste



Leggi di conservazione

- ⇒ Conservazione della massa
- ⇒ Conservazione dell'energia (teorema di Bernoulli)
- ⇒ Conservazione della quantità di moto

N.B.: Questo indice NON è esaustivo e NON sostituisce il libro di testo

Alcune immagini sono prese dal libro di testo (Meccanica dei Fluidi, Y.A.Cengcek e J.M. Cimballa, Ed. It G. Cozzo e C. Santoro) per scopi didattici

Leggi di conservazione

1) (Conservazione della massa)

In un sistema chiuso la massa totale del sistema si conserva $dm/dt=0$

In un volume di controllo la somma dei flussi attraverso le facce del volume è uguale alla variazione di massa all'interno del volume stesso (equazione di continuità)

2) (Conservazione dell'energia)

La quantità di energia scambiata dal sistema è pari alla variazione di energia del sistema.

Il flusso di energia attraverso le superfici di un volume di controllo è pari alla variazione dell'energia all'interno del volume stesso

3) (Conservazione della quantità di moto)

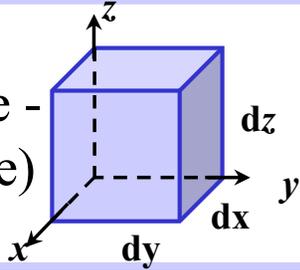
L'accelerazione di un sistema è pari alla somma delle forze applicate diviso la massa del sistema.

La somma delle forze applicate su un volume di controllo è pari al flusso di quantità di moto attraverso le superfici e alla variazione della quantità all'interno del volume stesso

formulazione
Lagrangiana

formulazione
Euleriana

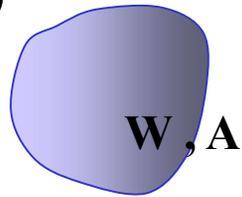
forma differenziale -
indefinita (locale)



$$\frac{dB}{dt} = F$$

Equazione diff. di
bilancio

forma integrale (globale)



$$\int_W \frac{dB}{dt} dw = \int_W F dw$$

Equazione integrale
di bilancio

Portata massica

Portata massica è la massa che attraversa una superficie in un'unità di tempo (kg/s):

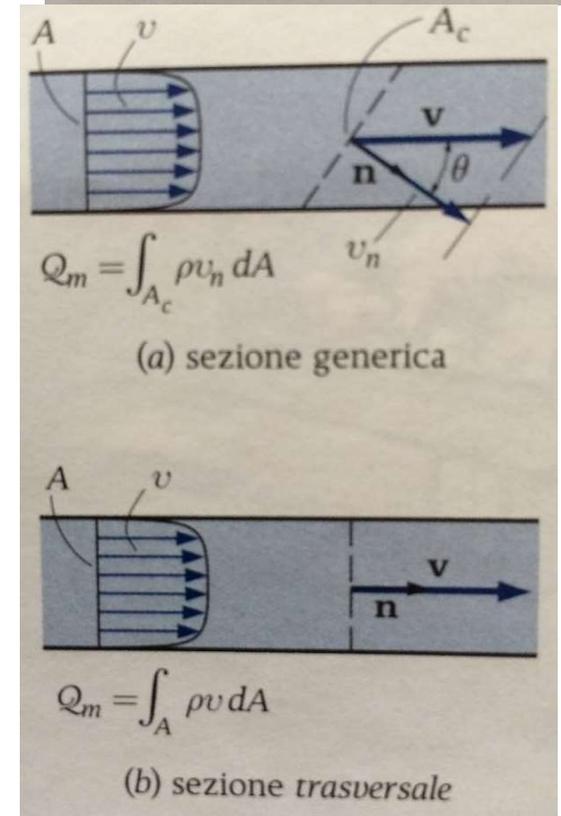
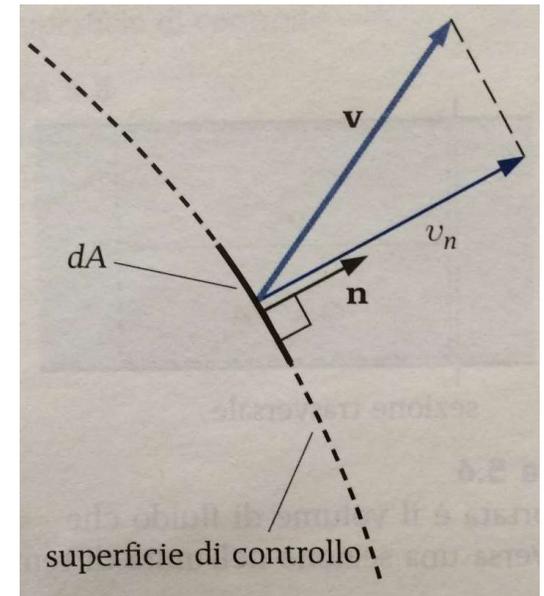
$$dQ_m = \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \rho v_n dA$$

Integrando sulla superficie A:

$$Q_m = \int_A \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \int_A \rho v_n dA$$

Definiamo **tubo di flusso**, un volume che ha la superficie laterale composta da linee di corrente. Una sezione trasversale è una sezione normale al vettore velocità.

$$Q_m = \int_A \rho v dA$$



Portata volumetrica

Portata volumetrica è il volume di fluido che attraversa una superficie in un'unità di tempo (m^3/s).

Utile quando la densità è costante

$$dQ = \frac{dQ_m}{\rho} = (\vec{v} \cdot \vec{n})dA = v_n dA$$

Integrando sulla superficie A:

$$Q = \int_A (\vec{v} \cdot \vec{n})dA = \int_A v_n dA$$

Se consideriamo una velocità media sulla sezione

$$V = \frac{1}{A} \int_A v dA$$

$$Q = VA \quad Q_m = \rho VA$$

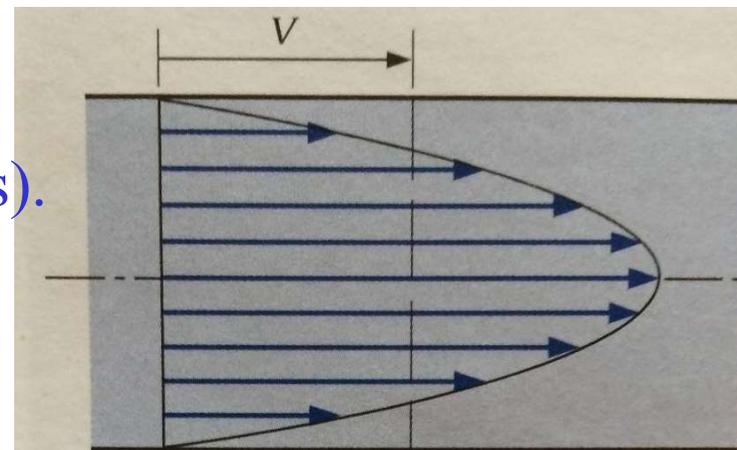
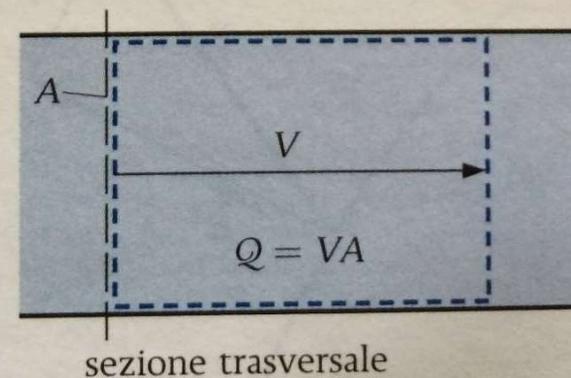


Figura 5.5

La velocità media V in una sezione trasversale.



Equazione di continuità: (approccio Euleriano, integrale)

Il bilancio tra massa uscente e massa entrante in un volume di controllo deve essere uguale alla variazione di massa all'interno del volume stesso

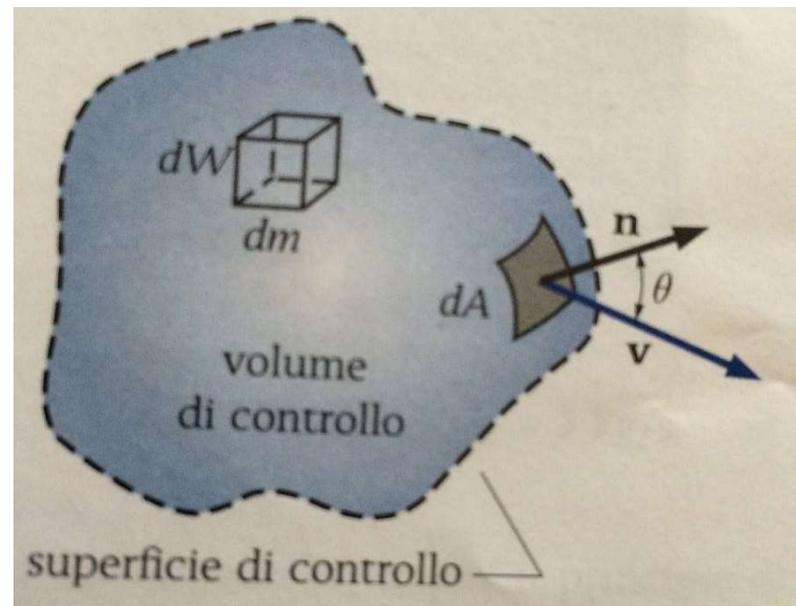
$$m_e - m_u = \Delta m_W$$

Passando alle portate massiche

$$Q_{me} - Q_{mu} = \frac{dm_w}{dt}$$

$$\frac{dm_w}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \rho dW$$

$$Q_m = \int_A \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \int_A \rho v_n dA$$



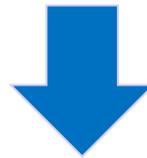
$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dW + \int_A \rho v_n dA = 0$$

Equazione di continuità (2)

Se applico il teorema del Trasporto con volume di controllo fisso?

$B=m$, $b=1$

$$\underbrace{\frac{dB_s}{dt}}_{\text{Variazione della grandezza nel sistema}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_W \rho b dW}_{\text{Variazione nel volume di controllo fisso nello spazio}} + \underbrace{\int_A \rho b (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA}_{\text{Flusso attraverso la superficie del volume di controllo}}$$



$$\underbrace{\frac{dm}{dt}}_{\text{Variazione della massa nel sistema}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_W \rho dW}_{\text{Variazione nel volume di controllo fisso nello spazio}} + \underbrace{\int_A \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA}_{\text{Flusso di massa attraverso la superficie del volume di controllo}} = 0$$

Equazione di continuità (3)

Possiamo suddividere i flussi, in flussi uscenti e flussi entranti e tenere conto del segno delle velocità uscenti ed entranti

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dW + \int_{Au} \rho v_{nu} dA + \int_{Ae} \rho v_{ne} dA = 0$$

$$v_{nu} > 0 \quad v_{ne} < 0$$

Quindi, utilizzando il formalismo sulle portate massiche:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dW + Q_{mu} - Q_{me} = 0$$

Equazione di continuità per :

a) moto permanente ; b) flusso incomprimibile

Nel caso di moto permanente la derivata temporale è nulla e ne segue che per ogni istante di tempo il flusso entrante eguaglia il flusso uscente

$$Q_{mu} - Q_{me} = 0$$

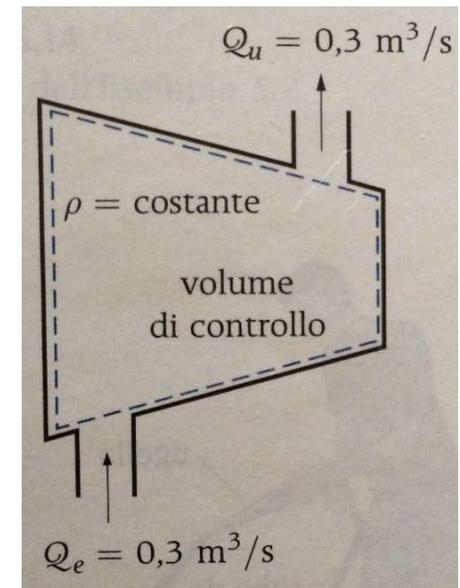
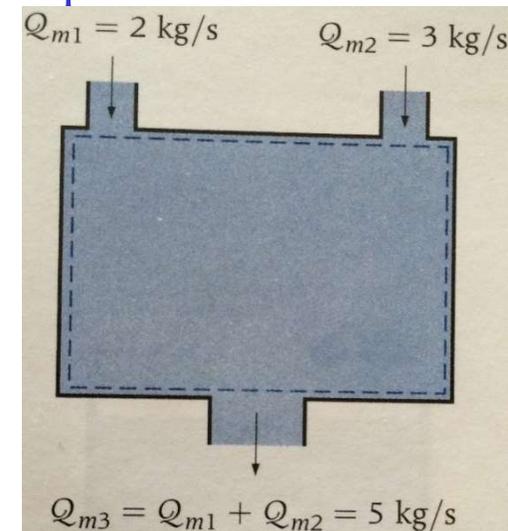
Se il flusso è incomprimibile, l'equazione si riduce ad un bilancio delle portate volumetriche, sia che il moto sia permanente (stazionario) che vario (instazionario)

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dW + Q_{mu} - Q_{me} = 0$$

$$Q_{mu} - Q_{me} = 0$$

$$\rho(Q_u - Q_e) = 0$$

$$Q_u = Q_e$$



Equazione di continuità per una corrente

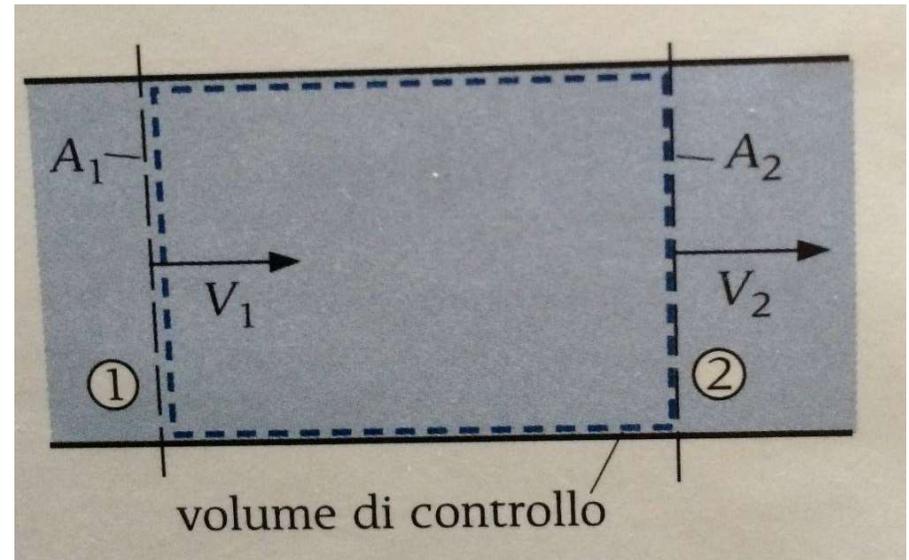
In molte applicazioni il flusso è convogliato lungo linee di corrente essenzialmente parallele (moto nei fiumi o in condotte).

In questi casi si può assimilare il moto a una corrente unidirezionale considerando la velocità media lungo la sezione trasversale:

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} W - \rho_1 V_1 A_1 + \rho_2 V_2 A_2 = 0$$

Se il flusso è incomprimibile:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$



ESEMPIO 5.1 Portata di un tubo da giardino

Per riempire con un tubo da giardino un secchio di capacità $W = 25 \text{ l}$ è necessario un tempo $\Delta t = 50 \text{ s}$. Determinare **(a)** la portata e **(b)** la velocità media dell'acqua nel tubo, di diametro $D_1 = 2 \text{ cm}$, e nella sezione terminale dell'ugello, di diametro $D_2 = 0,8 \text{ cm}$ (Figura 5.13).

Ipotesi 1 L'acqua è incomprimibile. 2 Il moto è permanente.

Analisi

(a) La portata è il volume defluito nell'unità di tempo. Per cui

$$Q = \frac{W}{\Delta t} = \frac{25}{50} = 0,50 \text{ l/s} = 0,50 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

(b) Per la 5.9

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\pi D_1^2/4} = \frac{4 \times 0,50 \times 10^{-3}}{\pi \times 0,02^2} = 1,59 \text{ m/s}$$

Per la 5.26

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 \frac{A_1}{A_2} = V_1 \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 = 1,59 \times \left(\frac{2}{0,8} \right)^2 = \\ &= 1,59 \times 2,5^2 = 9,94 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Energia meccanica nei fluidi

Definiamo energia meccanica in un fluido quella forma di energia che può essere convertita in lavoro meccanico completamente e direttamente mediante una macchina ideale:

- Energia cinetica
- Energia potenziale

Dimensionalmente notiamo che:

$$\text{Pressione} = \frac{\text{forza}}{\text{superficie}} = = \frac{\text{forza} \cdot \text{lunghezza}}{\text{superficie} \cdot \text{lunghezza}} = \frac{\text{energia}}{\text{volume}}$$

Ed inoltre, la pressione per unità di massa ha le dimensioni di energia per unità di massa

$$e_{f,m} = \underbrace{gz + \frac{p}{\rho}}_{\text{energia potenziale}} + \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\text{energia cinetica}}$$

Energia meccanica nei fluidi

In condizione idrostatiche la somma dei primi due termini è costante, che equivale a dire che l'energia potenziale del sistema non varia

Se dividiamo per g otteniamo un'energia specifica espressa in metri, che chiamiamo **CARICO TOTALE**

$$H = \underbrace{\underbrace{z}_{\text{quota geodetica}} + \underbrace{\frac{p}{g\rho}}_{\text{quota di pressione}}}_{\text{quota piezometrica}} + \underbrace{\frac{v^2}{2g}}_{\text{quota cinetica}}$$

La quota piezometrica rappresenta l'energia potenziale contenuta nella colonna di liquido, espressa in metri

Energia disponibile e rendimento

Si definisce rendimento di una macchina il rapporto tra la potenza (o l'energia) disponibile alla macchina P_u e la potenza (o l'energia) ricevuta dalla macchina stessa P_e . Indicando con P_d la potenza dissipata:

$$\eta = \frac{P_u}{P_e} = 1 - \frac{P_d}{P_e}$$

$$P_u = P_e - P_d$$

Rendimento di una turbina idraulica:

Siano H_m e H_v rispettivamente il carico totale subito a monte e subito a valle della turbina di figura:

Il carico utile sarà:

$$\Delta H = H_m - H_v = h$$

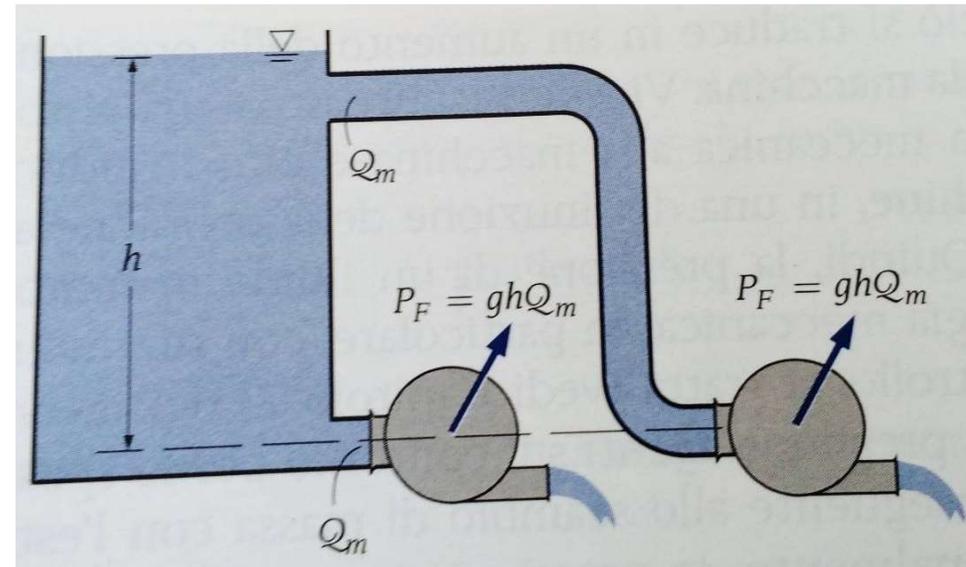
La portata massica che transita attraverso la turbina **NON VARIA**. Se chiamiamo la portata in peso:

$$\gamma Q$$

Otteniamo la potenza disponibile

$$P_e = \gamma Q \Delta H$$

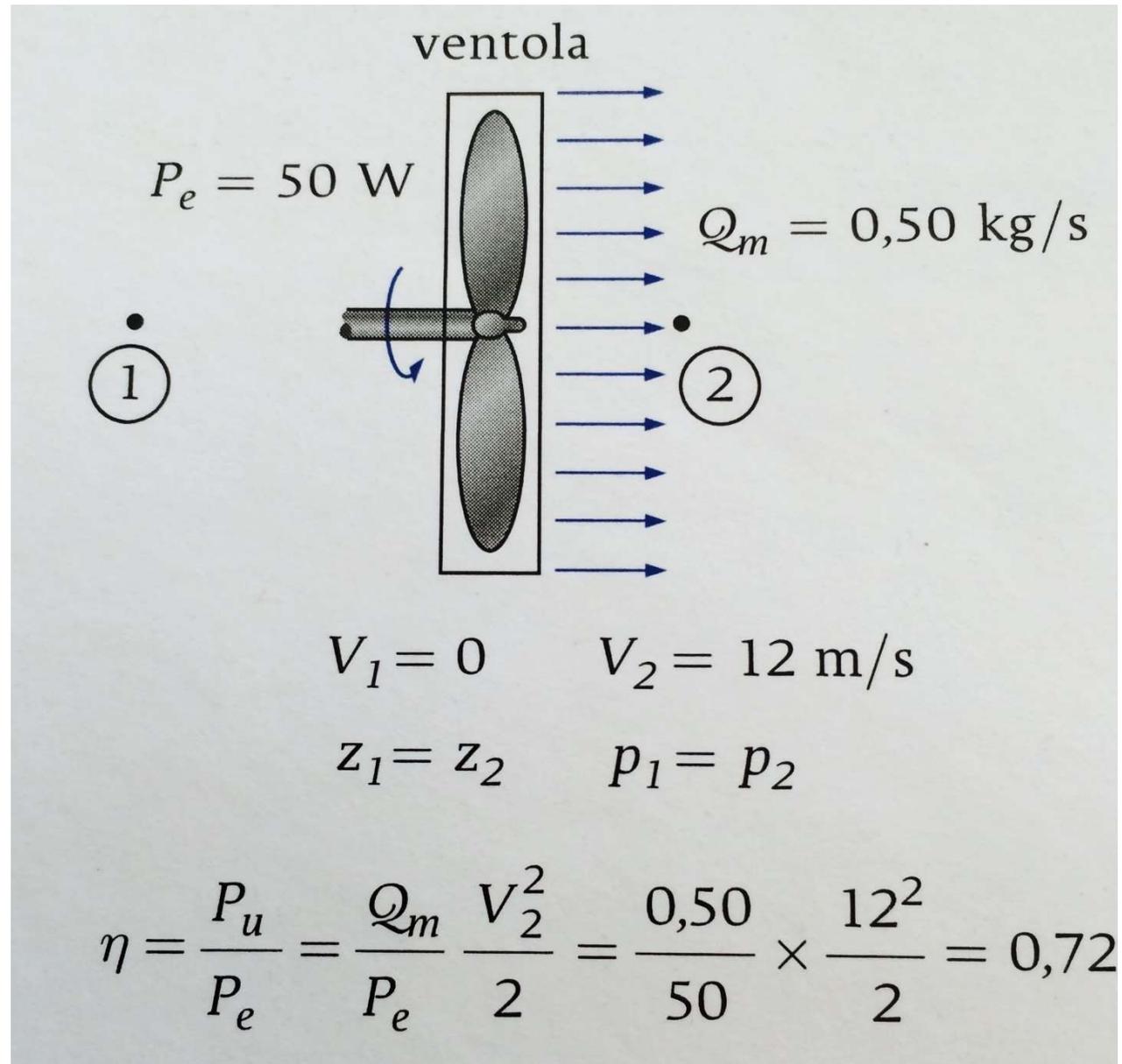
$$\eta = \frac{P_u}{P_e}$$



dove P_u è la potenza all'albero

Rendimento di una ventola (o elica)

In questo caso la potenza fornita è quella all'albero, mentre quella disponibile è quella cinetica fornita al fluido



Rendimento di una pompa

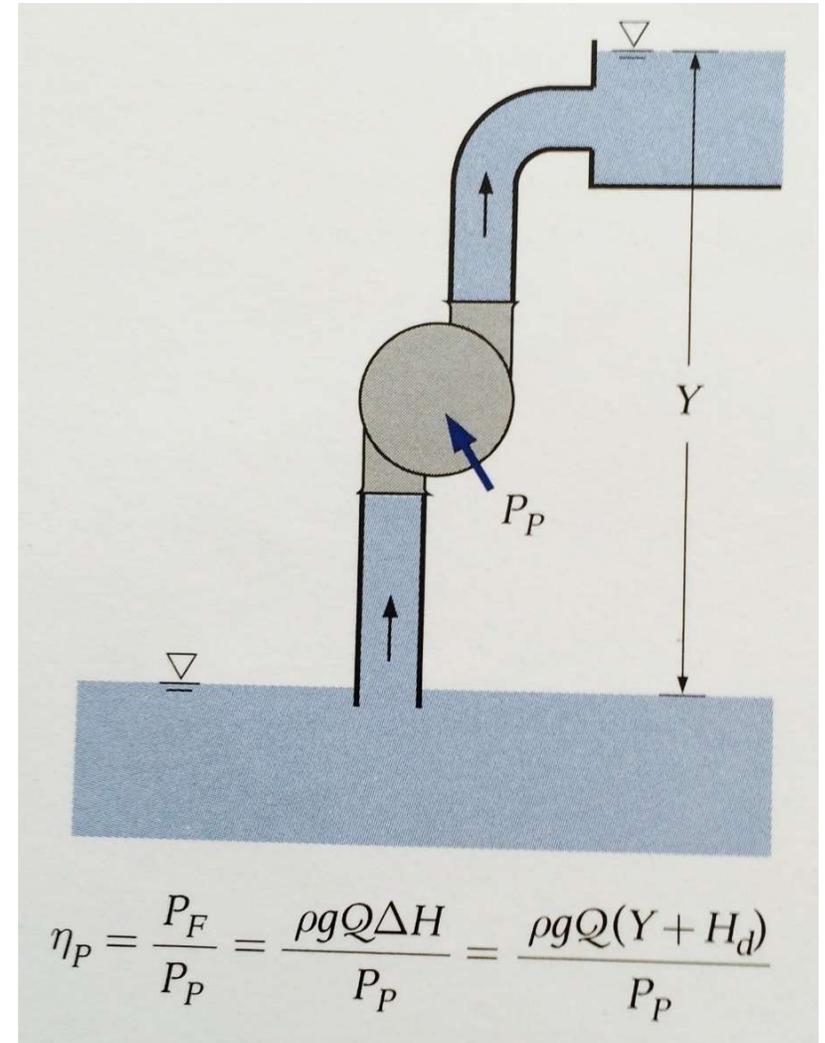
In questo caso, la potenza che la pompa cede al fluido è pari al salto di carico totale subito a monte (H_m) e subito a valle (H_v) moltiplicato per la portata in peso.

Il salto ($H_m - H_v$) sarà pari alla somma di:

- Carico geodetico Y
- Carico perso per dissipazione all'interno della condotta H_d

Se P_p è la potenza fornita alla pompa,

il rendimento sarà quindi :



Teorema di Bernoulli

Il teorema di Bernoulli esprime la conservazione dell'energia meccanica lungo una traiettoria di un elemento fluido nelle seguenti ipotesi:

- Fluido non viscoso
- Forza di massa di tipo gravitazionale (conservativa)

Il TdB è in generale valido anche per flussi comprimibili

Il teorema di Bernoulli dice che sotto le ipotesi di cui sopra:

Il carico totale si mantiene costante lungo la traiettoria di una particella fluida

Se, inoltre, il flusso è irrotazionale:

Il carico totale si mantiene costante nel campo di moto

Dimostrazione del Teorema di Bernoulli (1):

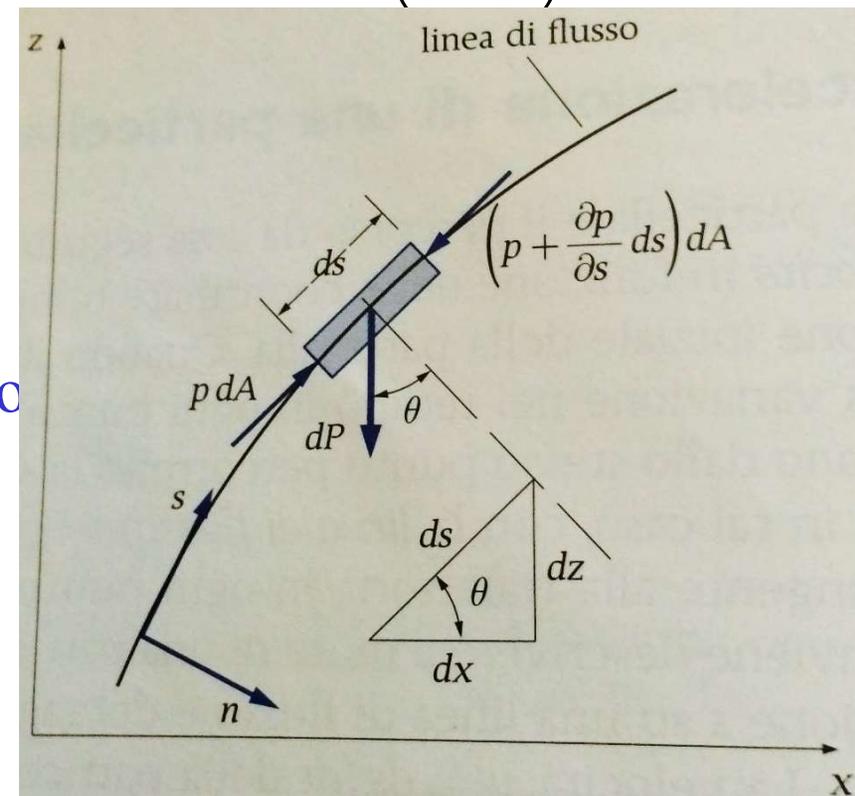
L'accelerazione tangenziale di una particella di fluido, scritta lungo l'ascissa curvilinea s lungo la quale si muove la particella di fluido è:

$$a_t = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

In moto permanente la derivata temporale è nulla.

Adesso applichiamo la legge di Newton, lungo la direzione s , alla particella di fluido

$$dm \frac{dv_s}{dt} = p dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dA - dP \sin \theta$$



Dimostrazione del Teorema di Bernoulli (2)

Considerando che :

$$dm = \rho ds dA \quad , \quad dP = g \rho ds dA \quad , \quad dz = ds \sin \theta$$

Sostituendo i termini sopra nell'equazione precedente e dividendo tutto per $\rho g dA ds$, ottengo:

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{v_s^2}{2g} = - \frac{1}{g} \frac{\partial v_s}{\partial t}$$

Nell'ipotesi ulteriore di flusso incomprimibile posso raccogliere i tre termini a sn:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} \right) = - \frac{1}{g} \frac{\partial v_s}{\partial t}$$

Se il moto è permanente $\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} \right) = \frac{\partial H}{\partial s} = 0 \Rightarrow H = \text{cost}$

Teorema di Bernoulli: Correnti non-lineari per traiettorie curvilinee

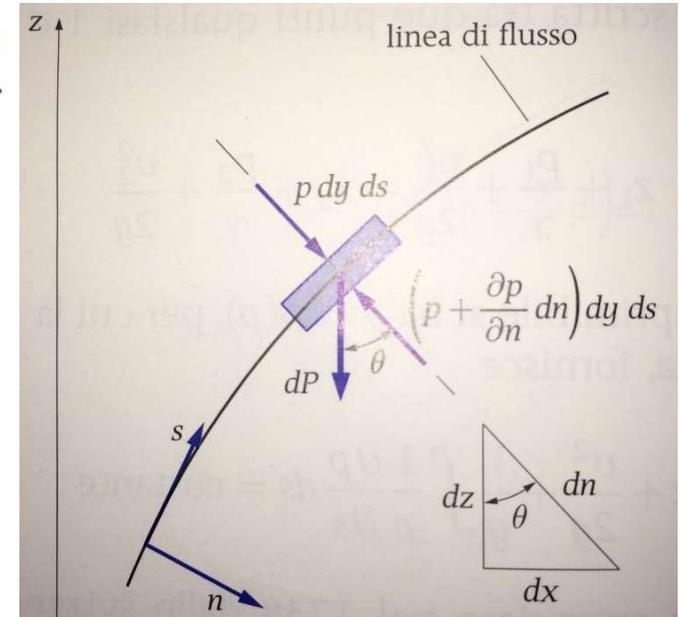
Possiamo applicare la legge di Newton in direzione normale alla traiettoria:

$$dF_n = dm a_n$$

$$p dy ds - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n} dn \right) dy ds + P \cos \theta = dm \frac{v^2}{R}$$

$$dm = \rho dndyds \quad \cos(\theta) = -\frac{dz}{dn} = -\frac{\partial z}{\partial n}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial n} dndyds - \rho g dndyds \frac{\partial z}{\partial n} = \rho dndyds \frac{v^2}{R}$$



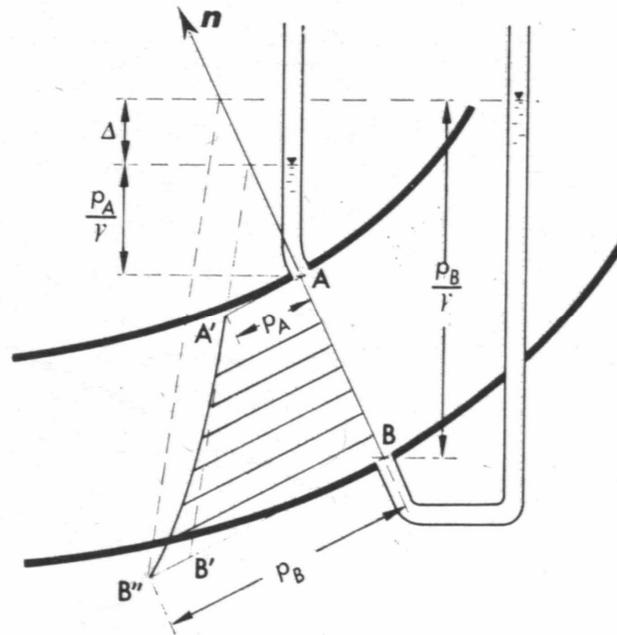
$$\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{\partial z}{\partial n} = -\frac{v^2}{R} \quad \text{se } \rho = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{v^2}{gR}$$

La quota piezometrica lungo la normale principale diminuisce proporzionalmente all'accelerazione centripeta

Teorema di Bernoulli: Correnti non-lineari per traiettorie curvilinee

Interpretazione fisica: un cambiamento nella direzione del moto di una particella fluida (traiettoria curvilinea) è accompagnato da una appropriata combinazione di (a) gradiente di pressione e (b) componente del peso della particella lungo la normale alla traiettoria

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[z + \frac{p}{\gamma} \right] = - \frac{V^2}{gr}$$



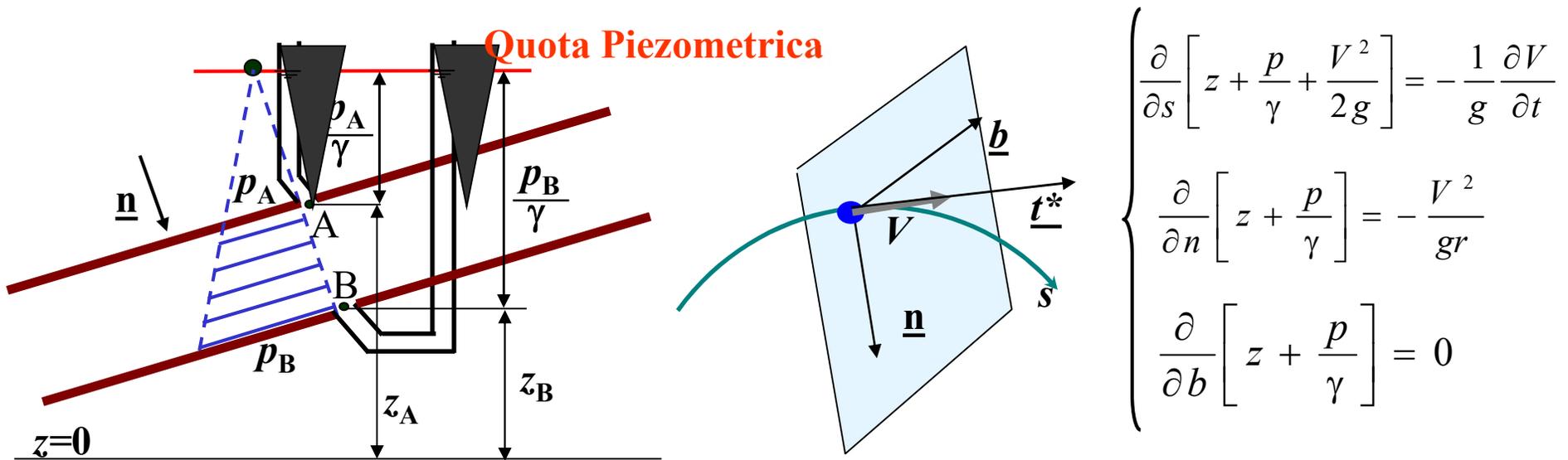
$$\Delta = \left[z_B + \frac{p_B}{\gamma} \right] - \left[z_A + \frac{p_A}{\gamma} \right] = - \int_A^B \frac{V^2}{gr} dn$$

Se trascuro la gravità (flusso di gas), oppure se il flusso è orizzontale

$$\frac{\partial p}{\partial n} = - \frac{\rho V^2}{r}$$

La p cresce con la distanza dal centro di curvatura (\underline{n} punta verso l'interno della linea di corrente curva, per cui $dp/dn < 0$)

Teorema di Bernoulli: Correnti gradualmente variate o lineari



HP: *Correnti lineari*
(Traiettorie rettilinee)

$r \rightarrow \infty$

→ $\frac{V^2}{gr} = 0$

Correnti gradualmente variate r è abbastanza grande

→ $\frac{V^2}{gr} \cong 0$

$\frac{\partial}{\partial n} \left[z + \frac{p}{\gamma} \right] = 0$

Il termine $z + \frac{p}{\gamma}$ è costante su ogni sezione perpendicolare alle traiettorie

La distribuzione delle pressioni sulla sezione trasversale è idrostatica

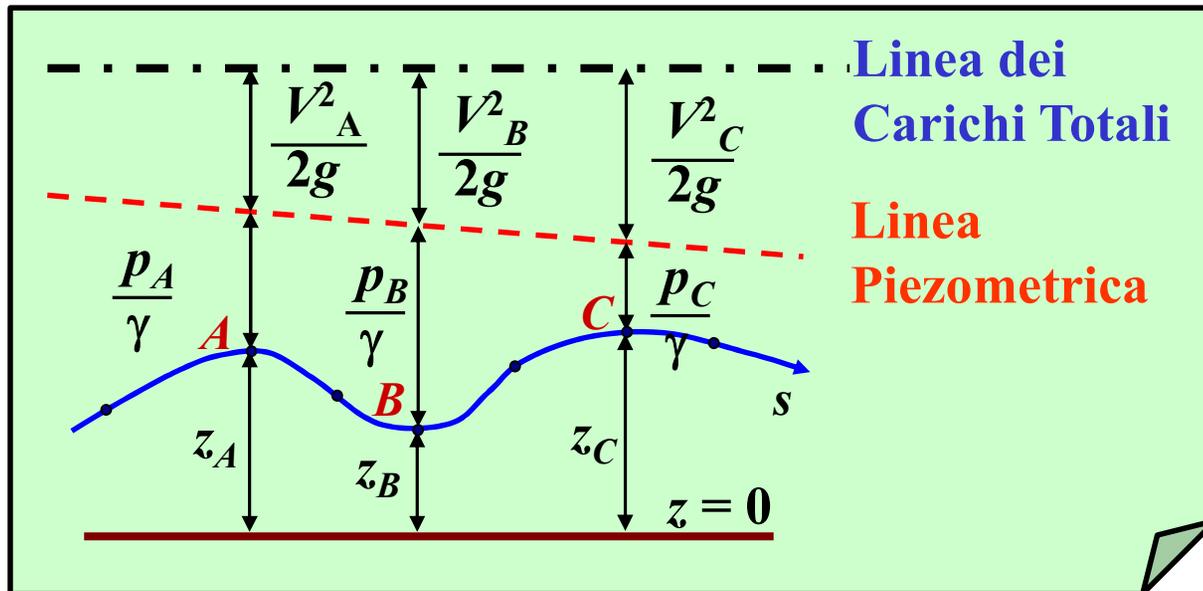
Teorema di Bernoulli: limiti di applicabilità

L'equazione di Bernoulli $H = \text{cost}$

rappresenta un mezzo di calcolo molto potente ma è soggetta a limitazioni:

- Moto permanente
- Fluido non viscoso (assenza di perdite di energia per effetti dissipativi)
- Assenza di scambi di energia (Non è applicabile a traiettorie tra le quali sia presente una sorgente (i.e. pompa) o un pozzo (i.e. turbina))
- Fluido incomprimibile
- Assenza di scambi termici
- Moto irrotazionale

Teorema di Bernoulli: interpretazione fisica



$$z + \frac{p}{\gamma}$$

QUOTA PIEZOMETRICA

H = energia specifica (energia per unità di peso) = **CARICO TOTALE**

- z ☞ energia specifica posizionale ☞ lavoro dell'unità di peso
ALTEZZA GEODETICA
- $V^2/2g$ ☞ energia specifica cinetica ☞ lavoro dell'unità di peso $[(1/2 m v^2)/mg]$
ALTEZZA CINETICA (altezza di caduta libera per raggiungere v)
- p/γ ☞ energia di pressione (peso = 1) ☞ lavoro dell'unità di peso
ALTEZZA DI PRESSIONE (altezza di colonna di fluido per produrre la pressione p)

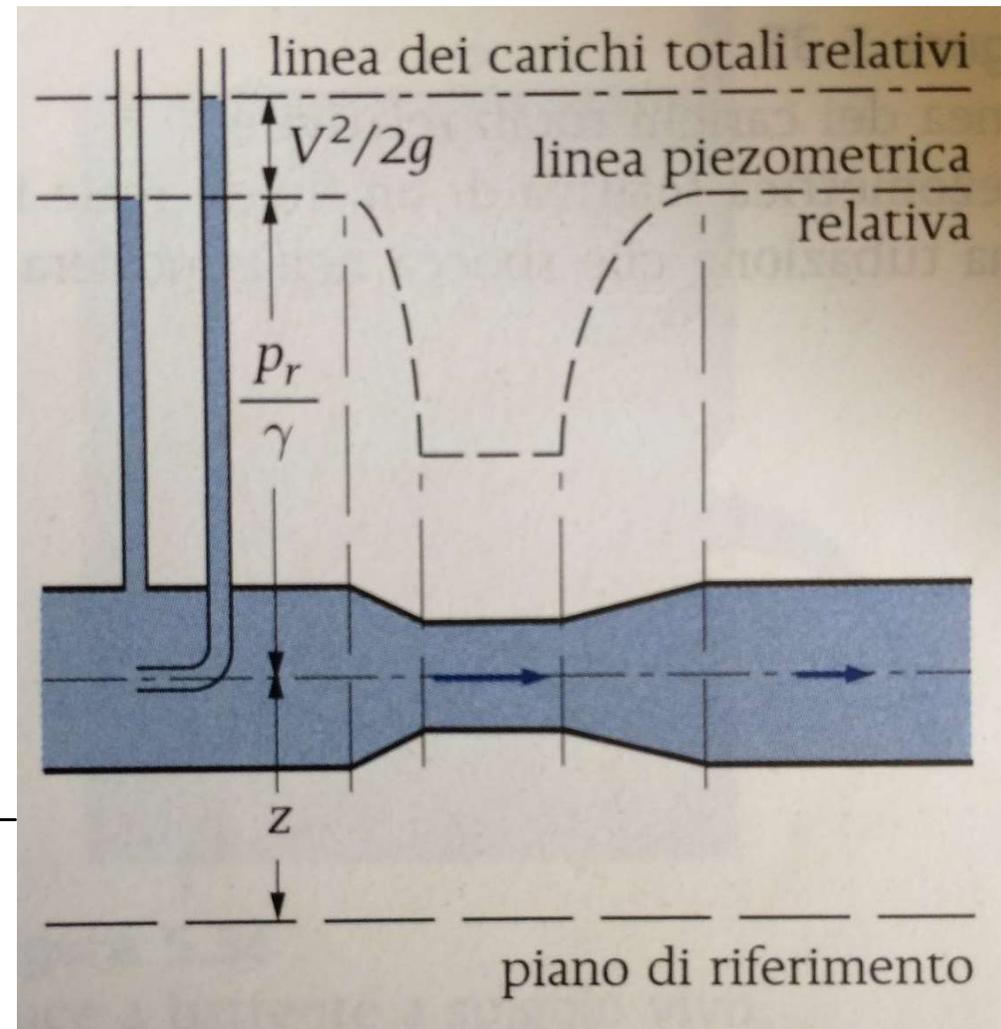
Tracciamento della piezometrica e della linea dei carichi totali

Dove la velocità aumenta, aumenta la distanza tra la piezometrica e la linea dei carichi totali

Da notare che la variazione di velocità lungo la direzione del moto è controllata dall'equazione di continuità

$$1) \quad V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1}$$

$$2) \left(z + \frac{p}{\rho g} \right)_2 = \left(z + \frac{p}{\rho g} \right)_1 - \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$



Tracciamento della piezometrica e della linea dei carichi totali: (pompe o turbine)

In presenza di una pompa o di una turbina

Bisogna considerare il ΔH

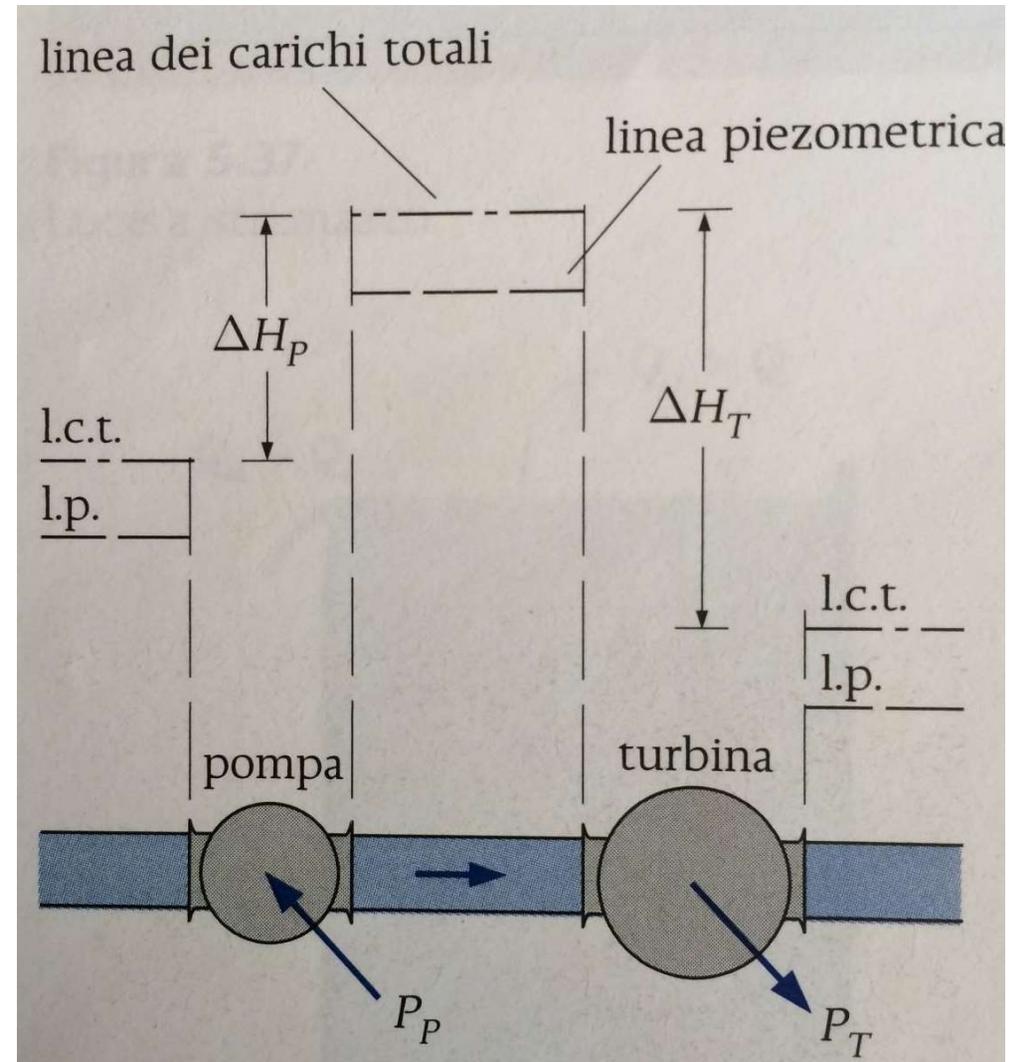
fornito dalla pompa o sottratto
dalla turbina

Essi sono rappresentati da:

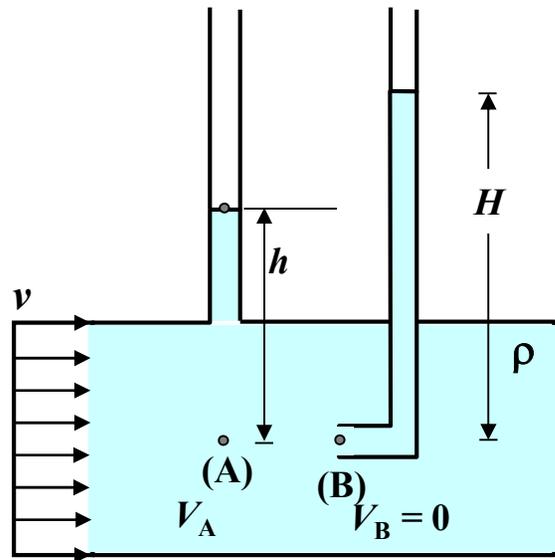
- Brusco innalzamento
- Brusca riduzione

del carico lungo una condotta

$$H_m + \Delta H_p = \Delta H_T + H_v$$

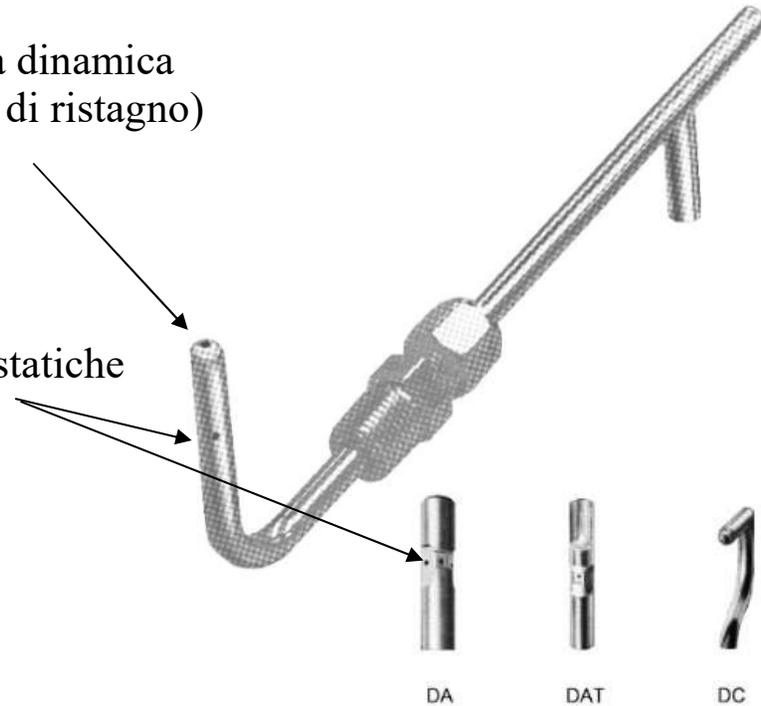


Pressione dinamica e Misuratori di Velocità (Tubo di Pitot)



Presa dinamica
(punto di ristagno)

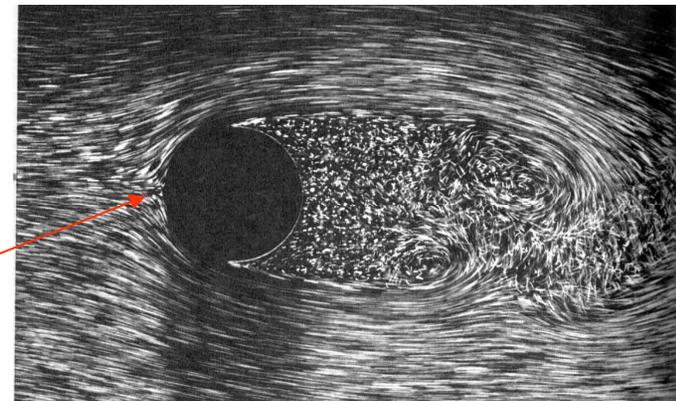
Prese statiche



$$H_B = z_B + p_B/\gamma = H_A = z_A + p_A/\gamma + V_A^2/2g$$

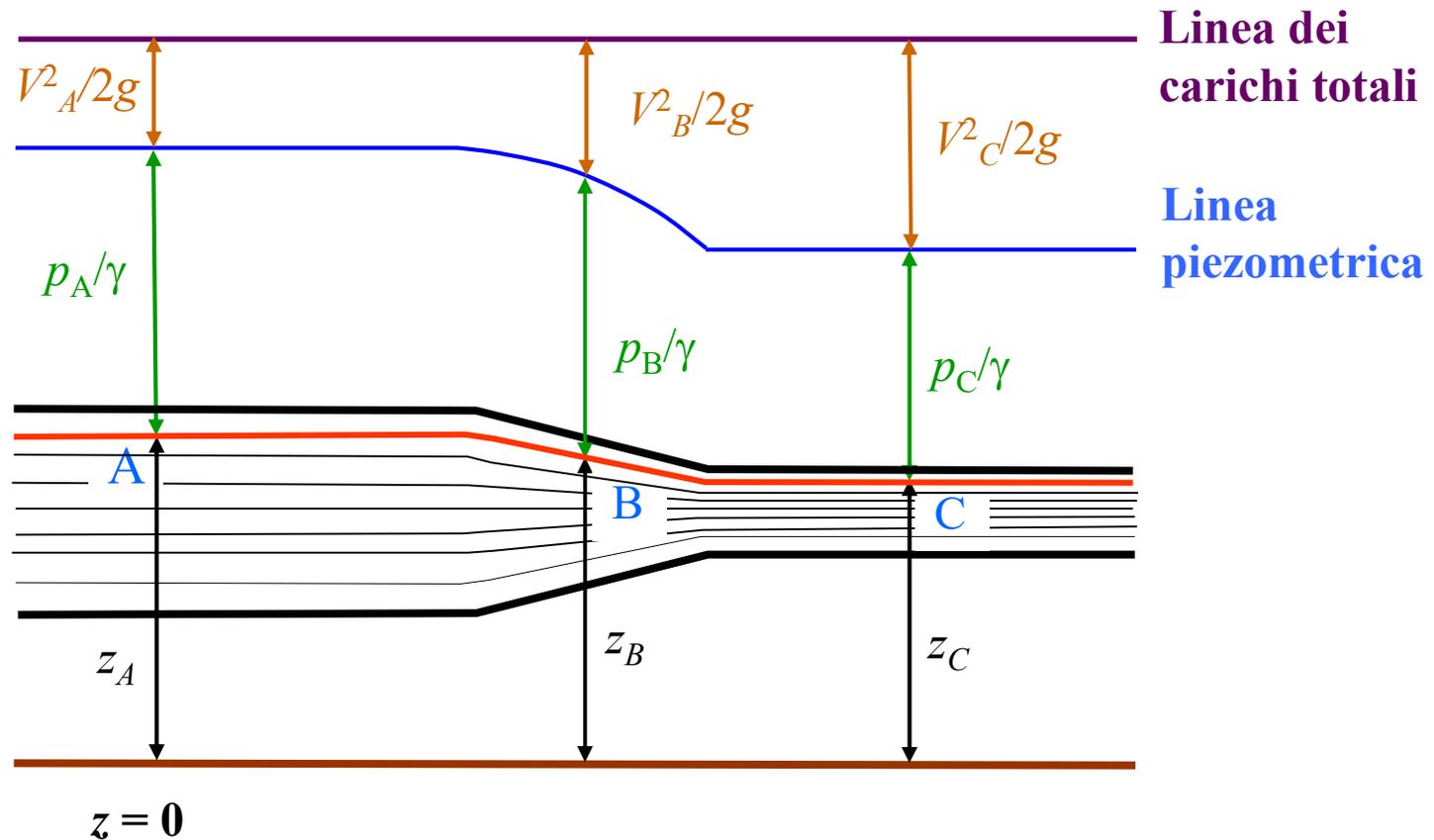
$$V_A = \sqrt{2g(H - h)}$$

B



punto di ristagno

T.B.: applicazione ad un convergente



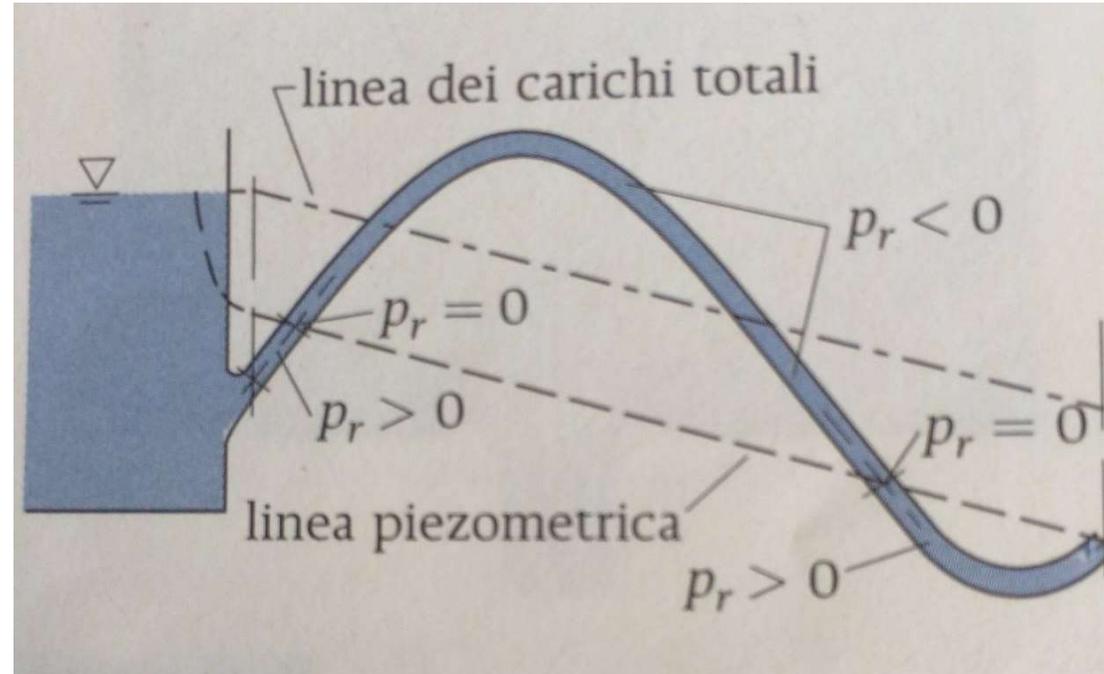
$$H_A = H_B = H_C$$

Tracciamento della piezometrica e della linea dei carichi totali: condotte in depressione

Nei sistemi serbatoio condotta:

Linea dei carichi totali si traccia a
Partire dal pelo libero del serbatoio

La piezometrica si traccia a partire
dalla sezione di sbocco a pressione
relativa nulla



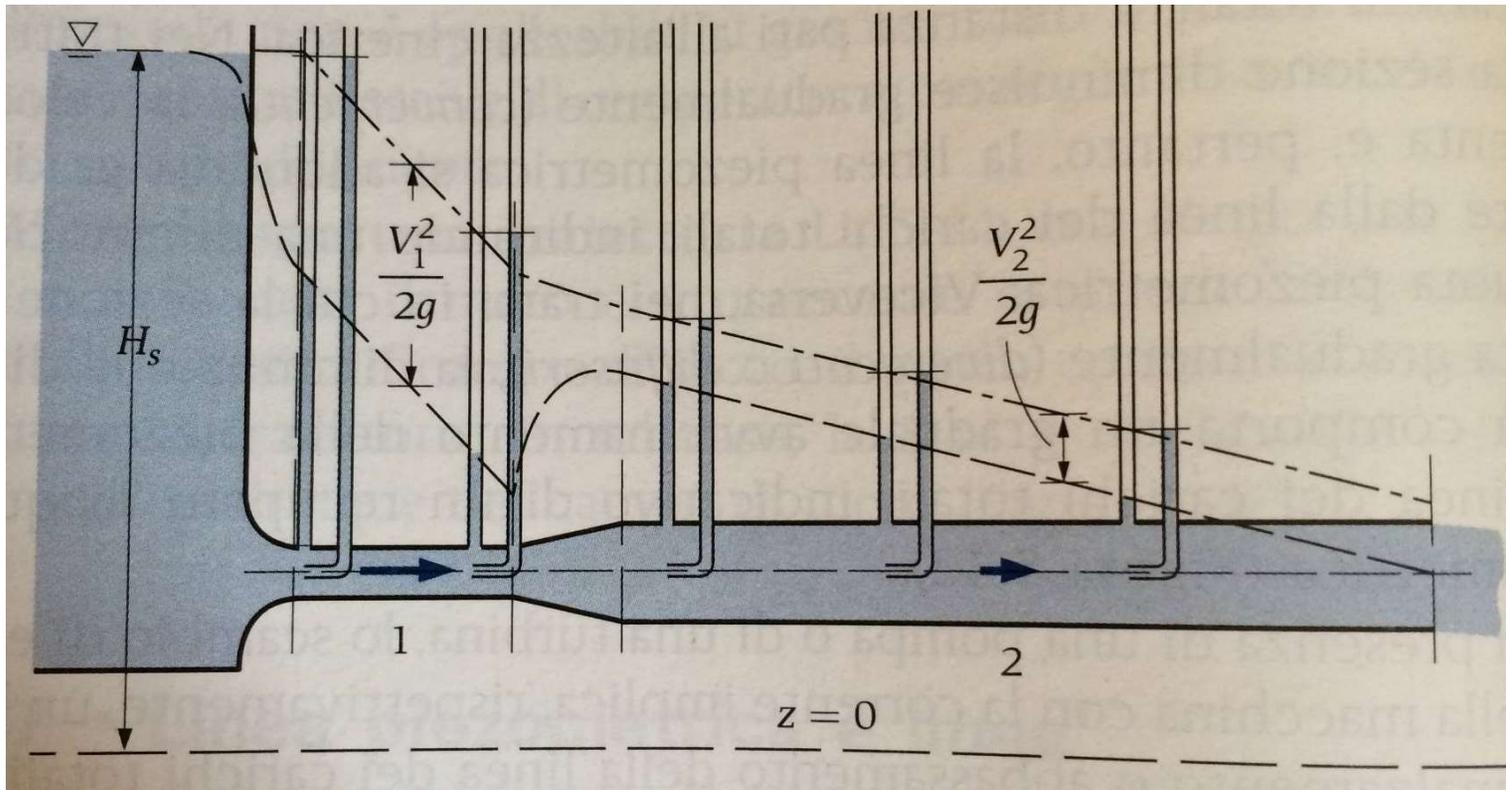
In una condotta a sezione costante le due linee sono parallele
e distanziate di $V^2/2g$.

Nella figura, il tratto di condotta al di sopra della linea dei
carichi totali è in depressione.

Nota: H non è costante nella figura a causa di perdite di
attrito

Tracciamento della piezometrica e della linea dei carichi totali: fluidi reali

Nei fluidi reali si sviluppano sforzi di attrito tra fluido e pareti solide che riducono il carico avanzando lungo l'ascissa curvilinea della condotta



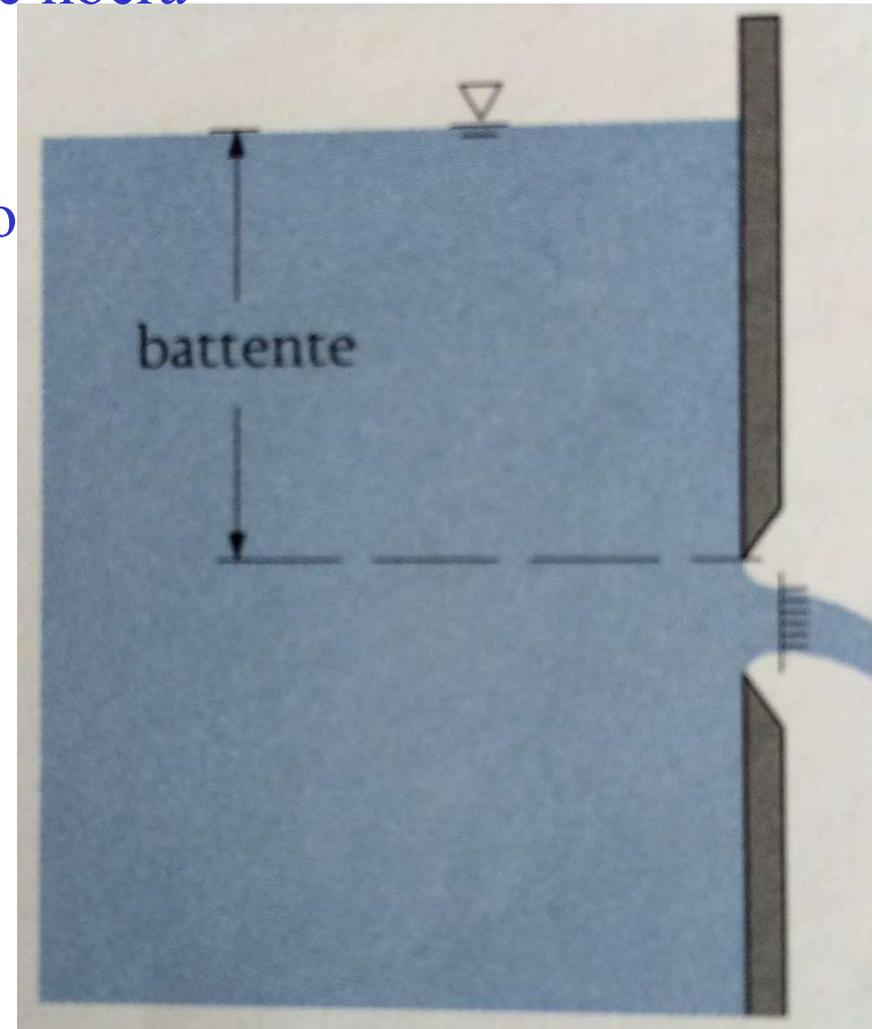
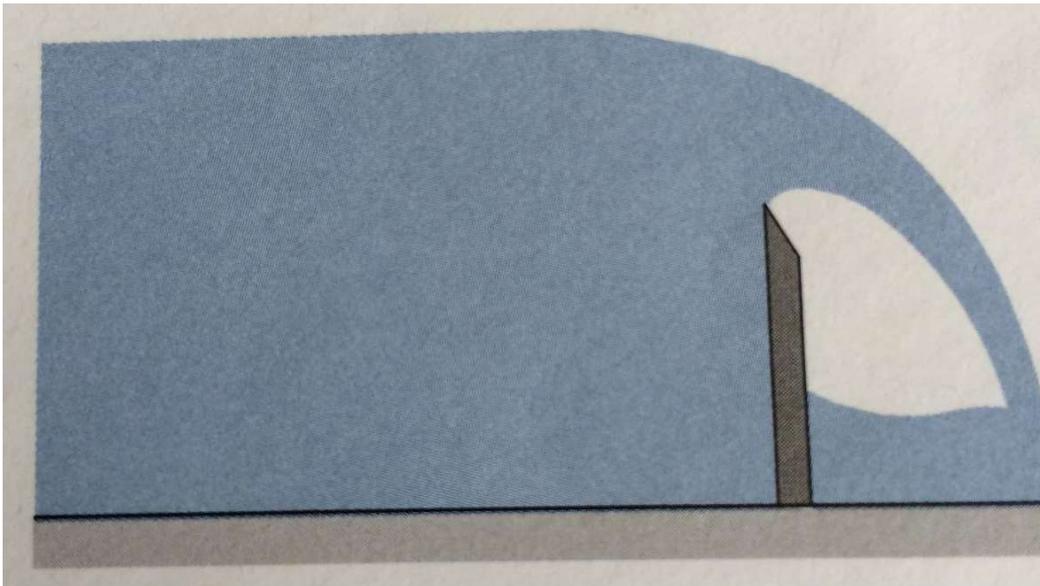
$$\frac{\partial H}{\partial s} = -J$$

Procedendo verso valle, la velocità varia in virtù della variazione di sezione; la pressione decresce a causa delle **perdite di carico**

PROCESSI DI EFFLUSSO: tipi di luci

Luce:

- A battente se una quantità di liquido insiste su di essa
- A stramazzo se la luce arriva alla superficie libera
- In parete sottile se il bordo è a spigolo vivo
- In parete grossa se il contrario



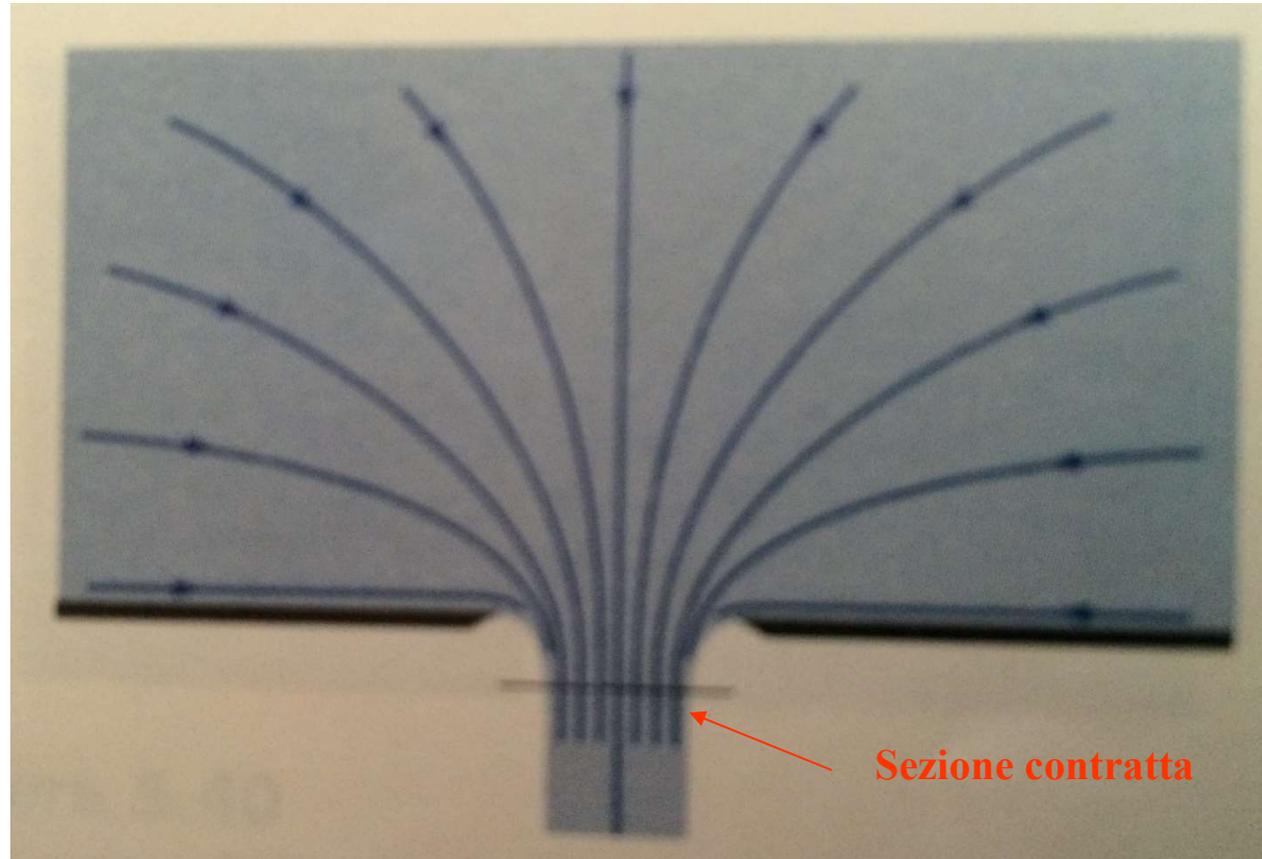
PROCESSI DI EFFLUSSO: condizioni di applicazione del teorema di Bernoulli (TB)

Possiamo supporre il flusso nelle condizioni di applicazione del TB (fluido non viscoso, flusso incomprimibile, irrotazionale, moto permanente)

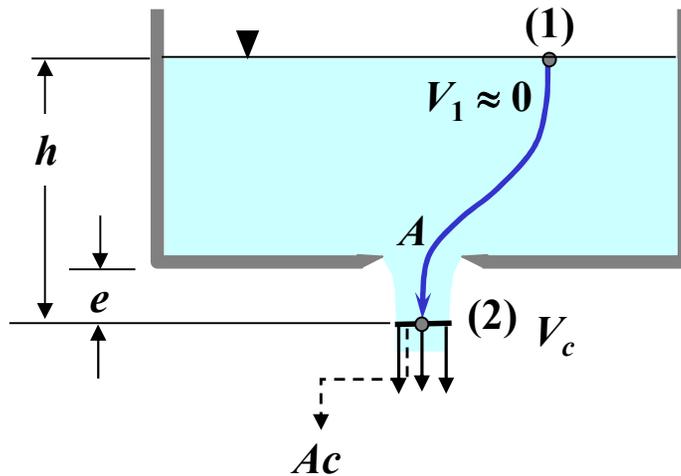
Conviene applicare il TB da un punto sulla superficie libera dove $V=0$ e un punto sulla sezione contratta, dove le traiettorie sono rettilinee

Alla sezione contratta la corrente è lineare e la pressione va con legge idrostatica

Quindi la pressione lungo la sezione orizzontale è pari a quella atmosferica



PROCESSI DI EFFLUSSO- calcolo della velocità



$$z_1 + \cancel{\frac{p_1}{\gamma}} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} = z_2 + \cancel{\frac{p_2}{\gamma}} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Tra due punti su di una traiettoria

$$A_c = C_c A$$

Coefficiente di contrazione ≈ 0.61

$$V_2 = \sqrt{2 g h}$$

Velocità effettiva:

$$V_{ceff} = (0.98 - 0.99) V_c = C_v V_2$$

Sezione contratta:

traiettorie rettilinee $p_2 \equiv 0$

$$Q = A_c V_{ceff} = A C_c C_v V_2$$

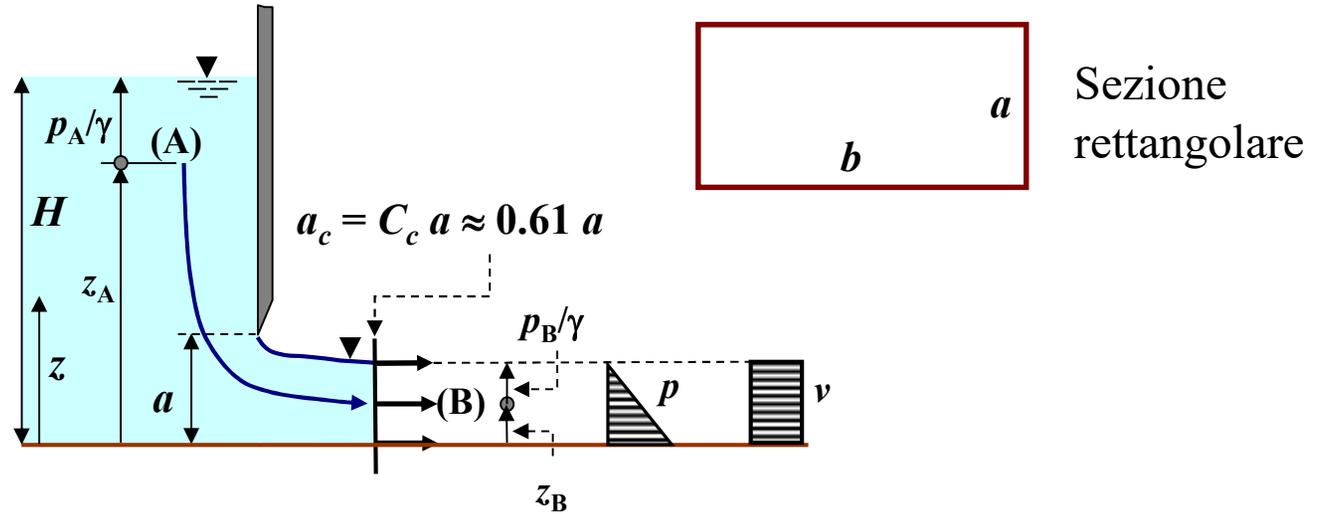
Coefficiente di efflusso ≈ 0.6

$$Q = A_c V_{ceff} = \underbrace{(C_c C_v)}_{\mu} A \sqrt{2 g h} = \mu A \sqrt{2 g h}$$

PROCESSI DI EFFLUSSO : Efflusso da paratoia

$$A_c = C_c A$$

$C_c =$ coefficiente
di contrazione



In (B): corrente gradualmente variata



$$z + p/\gamma = \text{costante}$$

~~$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$~~



$$V_B = \sqrt{2g(H - C_c a)}$$

Velocità effettiva:

$$V_{Be} = (0.98 - 0.99) V_B = C_v V_B$$

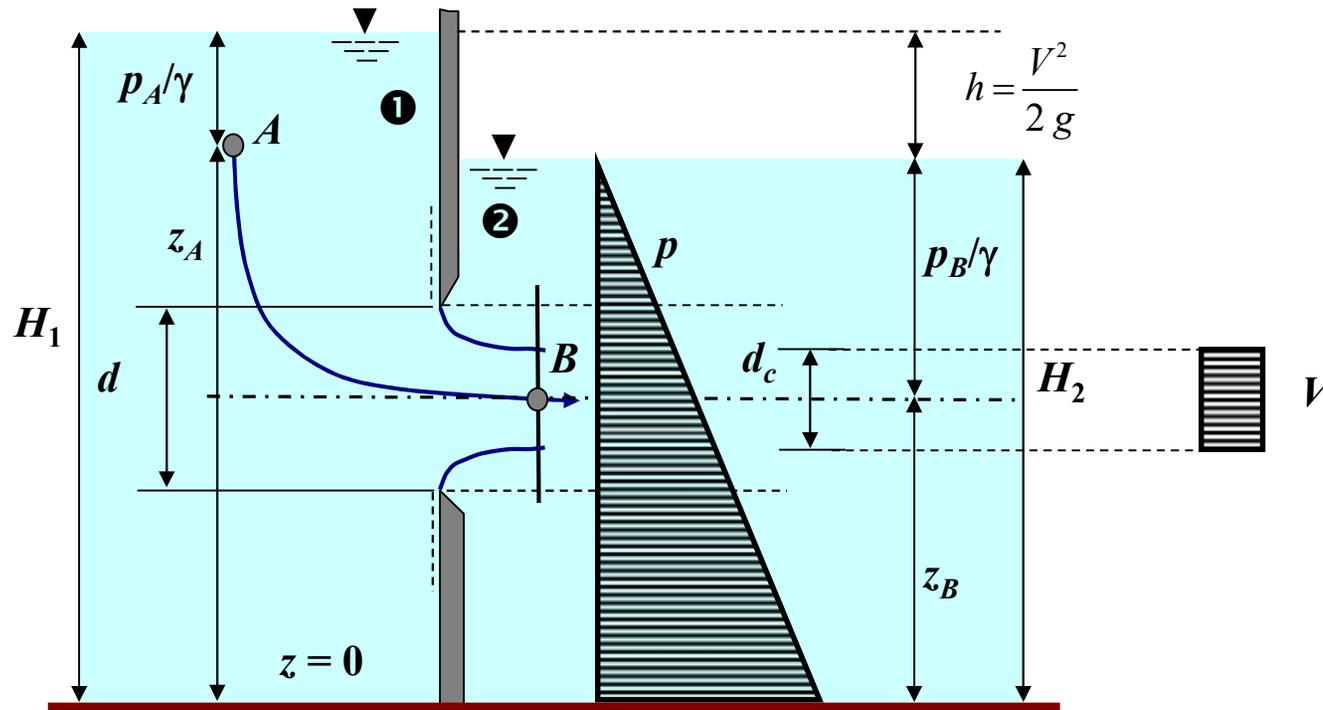
$$Q = A_c V_{Be} = A C_c C_v V_B$$

Coefficiente di efflusso ≈ 0.6

→

$$Q = \mu a b \sqrt{2g(H - C_c a)}$$

PROCESSI DI EFFLUSSO : Vena sommersa



$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \cancel{\frac{v_A^2}{2g}} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}$$

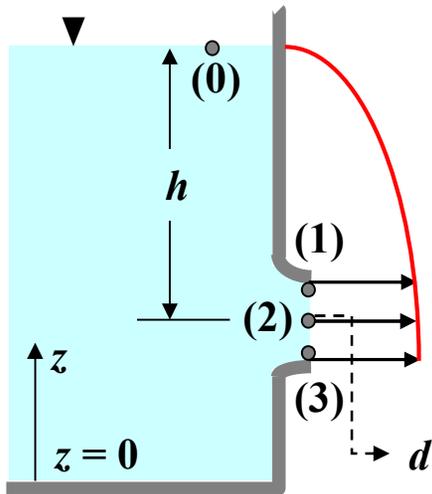
↙ H_1
↘ H_2



$$V_t = \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = \sqrt{2gh}$$

$$Q = \mu A_d V_t$$

PROCESSI DI EFFLUSSO



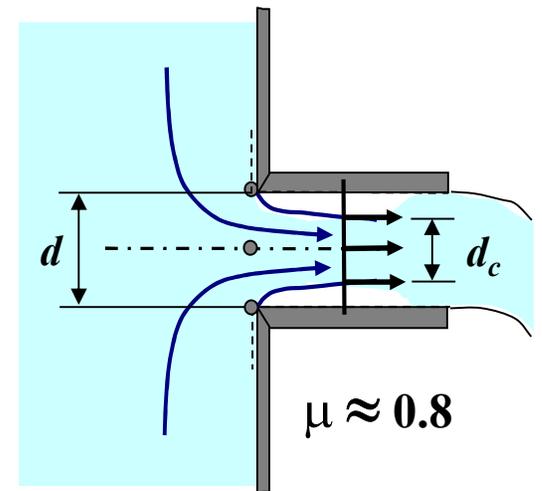
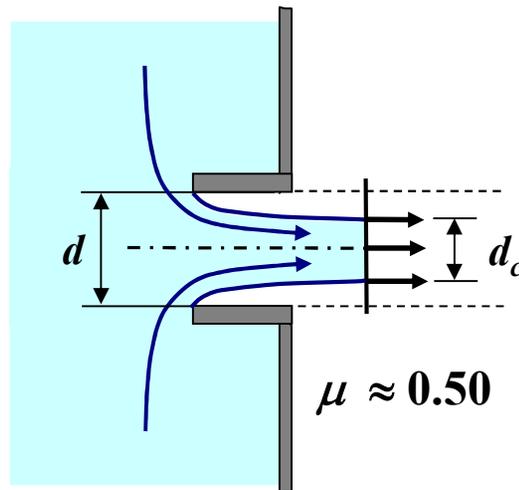
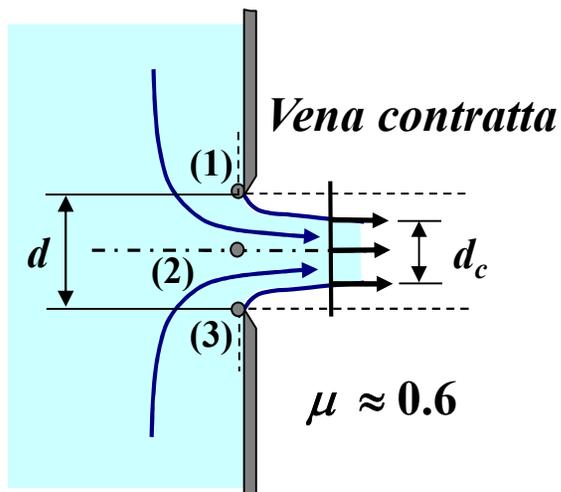
$$z_0 + \cancel{\frac{p_0}{\gamma}} + \cancel{\frac{v_0^2}{2g}} = z_2 + \cancel{\frac{p_2}{\gamma}} + \frac{v_2^2}{2g} \longrightarrow v_2 = \sqrt{2g(z_0 - z_2)} = \sqrt{2gh}$$

distribuzione parabolica

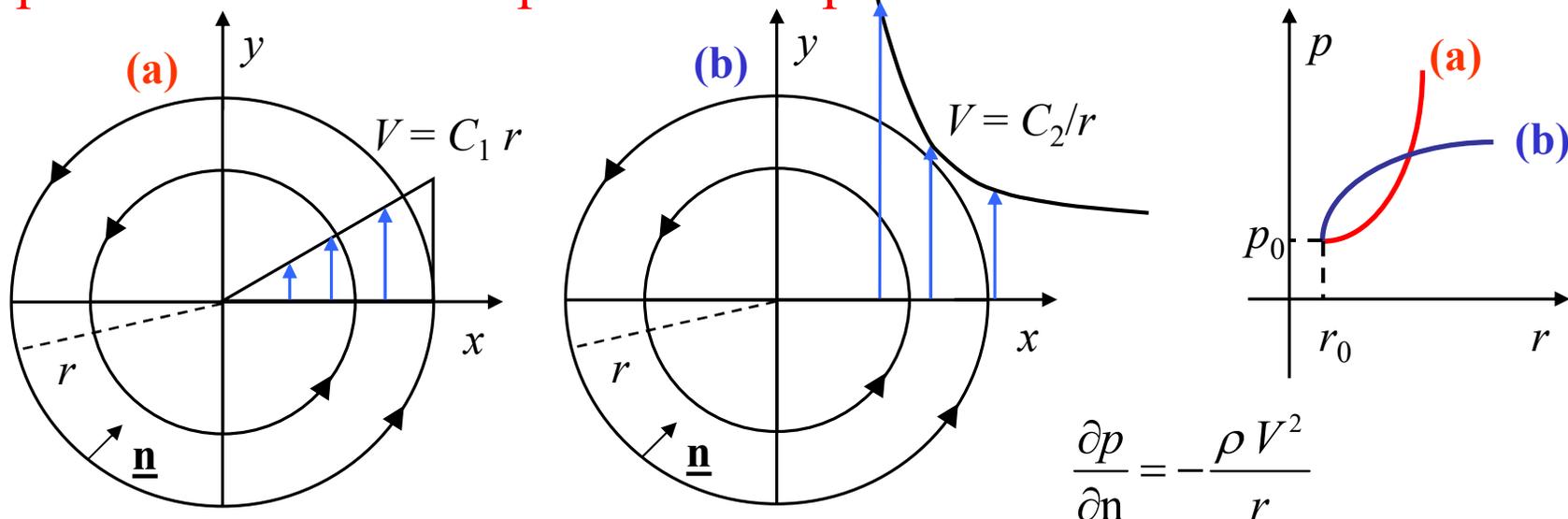
$$V_e = 0.98 - 0.99 V_2 = C_v \sqrt{2gh} \text{ effettiva}$$

$$Q = A V_e = A C_v \sqrt{2gh}$$

$$Q = A_c V_e = A C_c C_v \sqrt{2gh} = A \mu \sqrt{2gh}$$



Esempio: distribuzione di pressione in presenza di traiettorie circolari



Moto stazionario su piano orizzontale ($z = \text{costante}$); linee di corrente circolari (raggio di curvatura $= r$); fluido ideale, incomprimibile

(a)

$$\frac{dp}{dr} = \rho C_1^2 r$$

$$\int_{p_0}^p dp = \rho C_1^2 \int_{r_0}^r r dr$$

$$p = \frac{1}{2} \rho C_1^2 (r^2 - r_0^2)$$

(b)

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho C_2^2}{r^3}$$

$$\int_{p_0}^p dp = \int_{r_0}^r \frac{\rho C_2^2}{r^3} dr$$

$$p = \frac{1}{2} \rho C_2^2 \left[\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right]$$

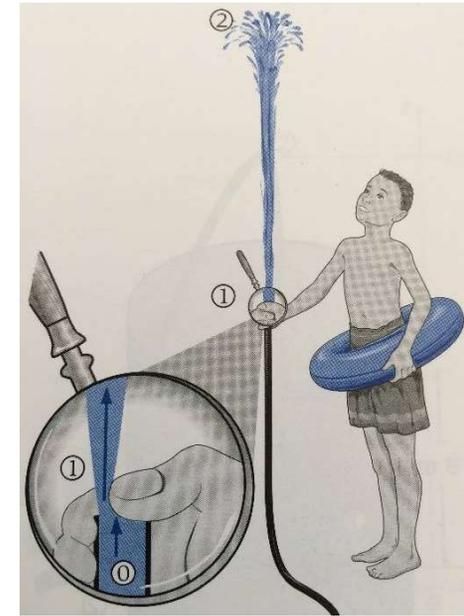
$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho V^2}{r}$$

Integrando rispetto ad r ,
partendo da una pressione
nota, p_0 , in $r = r_0$

ESEMPIO 5.4 Altezza di un getto d'acqua

La sezione di sbocco di un tubo da giardino rivolto verso l'alto viene ostruita fino a lasciare un'area di passaggio pari a $1/10$ della sezione del tubo. Sapendo che in una sezione a monte dello sbocco la pressione relativa vale $p_0 = 40$ kPa, calcolare l'altezza h raggiunta dal getto d'acqua (Figura 5.46).

Ipotesi 1 Il moto è permanente e il fluido è incomprimibile. 2 Le perdite di carico tra la sezione del tubo in cui è nota la pressione e la sezione di sbocco sono trascurabili.



Proprietà La densità dell'acqua vale $\rho = 1000$ kg/m³.

Analisi Si considerino la sezione del tubo in cui è nota la pressione (punto 0), la sezione di sbocco (punto 1) e il punto più alto raggiunto dal getto (punto 2). Nel punto 1 è nulla la pressione relativa, mentre nel punto 2 sono nulle sia la pressione relativa sia la velocità. Per il teorema di Bernoulli, il carico nei punti 1 e 2 deve essere uguale al carico nel punto 0, cioè

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2$$

da cui

$$h = z_2 - z_1 = \frac{v_1^2}{2g} = z_0 - z_1 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g}$$

Trascurando la differenza di quota tra i punti 0 e 1 ed esprimendo l'altezza cinetica nel punto 0 in funzione di quella nel punto 1, sendo $(v_0/v_1)^2 = (A_1/A_0)^2 = 1/10^2 = 1/100$, si ha

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{1}{100} \frac{v_1^2}{2g}$$

da cui

$$\left(1 - \frac{1}{100}\right) \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g}$$

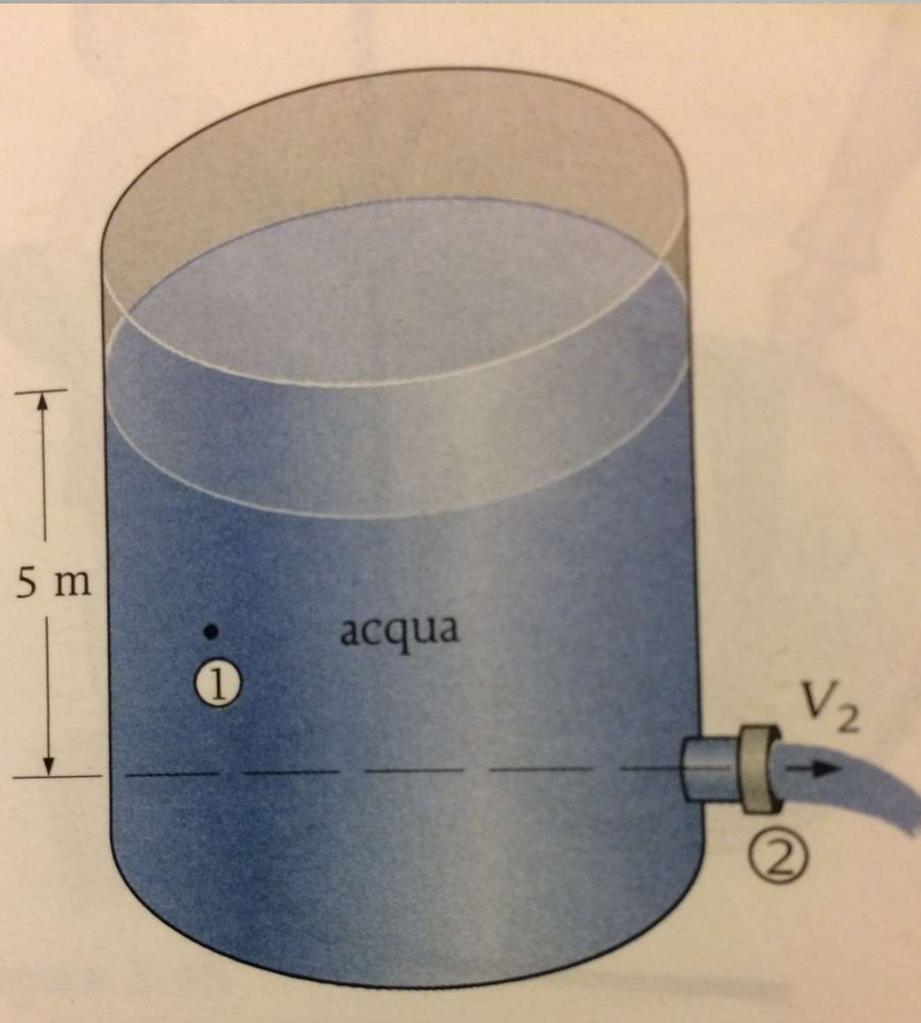
e, infine,

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{100}{99} \frac{p_0}{\rho g} = \frac{100}{99} \frac{40 \times 10^3}{1000 \times 9,81} = 4,12 \text{ m}$$

ESEMPIO 5.5 Velocità d'efflusso da un serbatoio

Dalla parete di un serbatoio si stacca, con imbocco ben raccordato, un tubo molto corto, il cui asse è affondato di $h = 5$ m rispetto alla superficie libera del liquido (Figura 5.47). Determinare la velocità di efflusso del liquido.

Ipotesi 1 Il liquido è incomprimibile. 2 La portata effluente è piccola rispetto al volume del serbatoio, per cui il livello della superficie



libera diminuisce molto lentamente e il moto si può considerare permanente.

Analisi Si consideri una traiettoria che partendo da un punto 1 all'interno del serbatoio, ma distante dall'imbocco in modo da poterne trascurare la velocità, arriva al punto 2 sull'asse della sezione di sbocco. Con riferimento alle pressioni relative, nel punto 1 il carico è pari alla quota della superficie libera, nel punto 2 la pressione è nulla. Trascurando le perdite tra i punti 1 e 2, per il teorema di Bernoulli si ha

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

da cui, essendo

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} - z_2 = h$$

si ricava

$$v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 5} = 9,90 \text{ m/s}$$

espressione nota come **velocità torricelliana**, da Evangelista Torricelli (1608-1647) che la determinò per primo. Essa è pari alla velocità raggiunta da un solido che viene fatto cadere da un'altezza h qualora la resistenza dell'aria sia trascurabile.

Discussione Se l'imbocco fosse a spigolo vivo, si avrebbe una perdita di carico non trascurabile e, conseguentemente, una riduzione della velocità di efflusso.

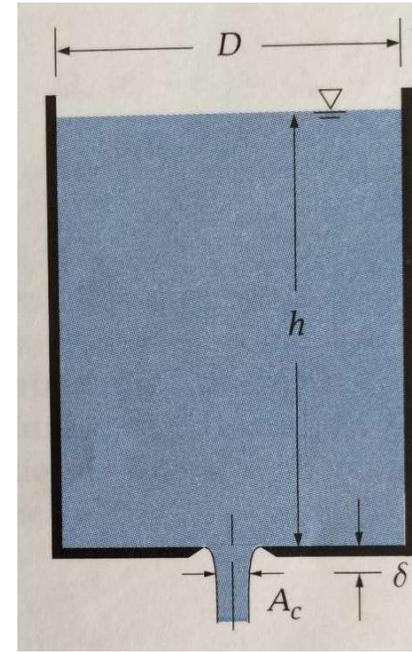
ESEMPIO 5.2 Svuotamento di un serbatoio

Un serbatoio cilindrico di diametro $D = 1$ m è pieno d'acqua per un'altezza $h_0 = 1,2$ m. Togliendo il tappo da un'apertura praticata sul fondo, dalla stessa fuoriesce un getto la cui sezione trasversale, poco a valle dello sbocco, ha un diametro $D_c = 1,5$ cm (Figura 5.14). In tale sezione, la velocità media del getto può essere calcolata con la relazione

$$V_c = \sqrt{2gh}$$

essendo h l'affondamento della sezione rispetto alla superficie libera. Determinare i tempi necessari perché il serbatoio si svuoti per $1/3$ e per $2/3$ della sua capacità.

Ipotesi 1 L'acqua è incomprimibile. **2** La distanza δ tra il fondo del serbatoio e la sezione in cui il getto assume diametro D_c è piccola rispetto all'altezza d'acqua nel serbatoio, per cui all'istante iniziale $h \cong h_0$.



Analisi Si assuma come volume di controllo il volume di acqua nel serbatoio, variabile nel tempo per effetto della portata effluente dall'apertura e del conseguente abbassamento della superficie libera. Non essendovi ingresso di massa, si ha $Q_{me} = 0$. Invece, per la 5.7, la massa uscente nell'unità di tempo vale

$$Q_{mu} = \rho A_c \sqrt{2gh}$$

avendo indicato con A_c l'area della sezione trasversale del getto, di diametro D_c , poco a valle dello sbocco.

Essendo la densità costante, la massa all'interno del serbatoio in un istante qualsiasi vale

$$m_W = \rho W = \rho Ah$$

in cui A è l'area della sezione del serbatoio. Introducendo tali espressioni nella 5.11, si ha

$$\rho A_c \sqrt{2gh} + \frac{d(\rho Ah)}{dt} = 0$$

Esplicitando le aree, semplificando e separando le variabili, si ha

$$dt = -\frac{D^2}{D_c^2} \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$$

equazione differenziale che, integrata tra l'istante iniziale $t = 0$ in cui $h = h_0$ e l'istante generico t_f in cui $h = h_f$, fornisce

$$t_f = \left(\frac{D}{D_c}\right)^2 \frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{h_f}}{\sqrt{g/2}}$$

Quando il serbatoio è vuoto per 1/3 della sua capacità è $h_f = 2h_0/3$, per cui

$$t_f = \left(\frac{1}{0,015}\right)^2 \frac{\sqrt{1,2} - \sqrt{0,8}}{\sqrt{9,81/2}} = 403 \text{ s} = 6,7 \text{ min}$$

Quando è vuoto per 2/3 della sua capacità $h_f = h_0/3$, per cui

$$t_f = \left(\frac{1}{0,015}\right)^2 \frac{\sqrt{1,2} - \sqrt{0,4}}{\sqrt{9,81/2}} = 929 \text{ s} = 15,5 \text{ min}$$

Discussione Lo svuotamento del secondo terzo di serbatoio richiede un tempo $\Delta t = 15,5 - 6,7 = 8,8 \text{ min}$, maggiore di quello necessario per lo svuotamento del primo terzo. Ciò perché, diminuendo h , diminuisce via via la velocità di efflusso.

ESEMPIO 5.6 Travaso di benzina dal serbatoio di un'automobile tramite un sifone

Per soccorrere un automobilista rimasto senza benzina, si deve travasare il carburante dal serbatoio di un'altra automobile (Figura 5.48). Si usa a tale scopo un tubo di gomma di diametro $D = 8 \text{ mm}$. Inserendo una sua estremità nel serbatoio pieno, il liquido riempie il tubo solo fino alla quota della superficie libera del serbatoio. Perché si stabilisca una portata occorre fare in modo che il liquido riempia il tubo per tutta la sua lunghezza, aspirandolo, per esempio, dall'altra estremità, e collocare la sezione di sbocco a quota più bassa di quella della superficie libera del serbatoio. Il tubo assume così la configurazione di una U rovesciata, che prende il nome di sifone. Nel caso specifico, la sezione di sbocco (punto 3) è $0,50 \text{ m}$ al di sotto della superficie libera del serbatoio (punto 1), mentre il punto più alto del sifone (punto 2) è $1,50 \text{ m}$ al di sopra di essa. Calcolare (a) il

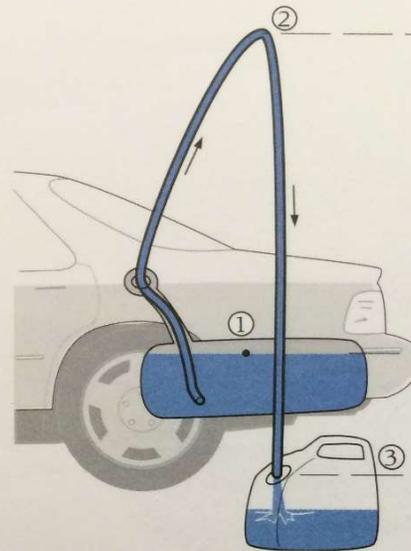


Figura 5.48 Schema dell'Esempio 5.6.

tempo necessario a spillare un volume $W=4 \text{ l}$ di benzina dal serbatoio e (b) la pressione nel punto 2.

Ipotesi 1 Il moto è permanente e il fluido è incomprimibile. 2 Per la brevità del tubo, le perdite di carico sono trascurabili. 3 Durante il travaso, la variazione di quota della superficie libera nel serbatoio è trascurabile.

Proprietà La densità della benzina è 750 kg/m^3 .

Analisi

(a) Con riferimento alle pressioni relative, il carico nel serbatoio è pari alla quota z_1 della superficie libera. Nel punto 3 la pressione è nulla. Per il teorema di Bernoulli, il carico nel punto 3 deve essere uguale a quello che si ha nel serbatoio, cioè

$$z_1 = z_3 + \frac{v_3^2}{2g}$$

da cui

$$v_3 = \sqrt{2g(z_1 - z_3)} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,50} = 3,13 \text{ m/s}$$

Ipotizzando che tale velocità sia uguale alla velocità media V_3 nella sezione di sbocco, la portata vale

$$Q = V_3 A = V_3 \frac{\pi D^2}{4} = 3,13 \times \frac{\pi \times 0,008^2}{4} = 0,157 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 0,157 \text{ l/s}$$

Il tempo necessario per spillare un volume $W = 4 \text{ l}$ di benzina risulta

$$\Delta t = \frac{W}{Q} = \frac{4}{0,157} = 25,5 \text{ s}$$

(b) Per il teorema di Bernoulli, deve essere

$$z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = z_3 + \frac{v_3^2}{2g}$$

da cui, essendo per l'equazione di continuità $v_2 = v_3$, si ha

$$p_2 = \rho g(z_3 - z_2) = -\rho g(z_2 - z_3) = -750 \times 9,81 \times 1,50 = -11,0 \text{ kPa}$$

effettiva

Fluido comprimibile: Effetti della comprimibilità

Flusso di un fluido pesante lungo una traiettoria

$$-\gamma \frac{\partial z}{\partial s} - \rho \frac{dV}{dt} = \frac{\partial p}{\partial s}$$



Hp: Moto stazionario

$$\begin{cases} -\gamma \frac{\partial z}{\partial s} - \rho \frac{dV}{dt} = \frac{\partial p}{\partial s} \\ -\gamma \frac{\partial z}{\partial n} - \rho \frac{V^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial n} \\ -\gamma \frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial p}{\partial b} \end{cases}$$

$$-\gamma \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\rho}{2} \frac{\partial V^2}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial s} \quad \Rightarrow \quad g \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \left(gz + \frac{V^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = 0$$

In un flusso barotropico, cioè tale che i gradienti di densità siano allineati ai gradienti di pressione:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = \frac{d}{ds} \int \frac{dp}{\rho}$$

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + g z = cost$$

Da integrare nota le legge di stato $\rho = \rho(p)$

Flusso comprimibile: esempio fluidi ideali

Flusso stazionario di un gas perfetto

$$pW^n = C_1 \quad \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + g z = \text{cost}$$

$$\frac{p}{\rho^n} = \frac{C_1}{m^n} = C$$

$$n = 1 \text{ (isoterma)} \quad \int \frac{dp}{\rho} = C \int \frac{dp}{p} = C \ln p$$

$$n \neq 1 \quad \int \frac{dp}{\rho} = C^{1/n} \int \frac{dp}{p^{1/n}} = \frac{C^{1/n}}{-\frac{1}{n} + 1} p^{-1/n+1} = \frac{C^{1/n}}{n-1} n \frac{p}{p^{1/n}} = \frac{C^{1/n}}{n-1} n \frac{p}{\rho C^{1/n}} = \frac{n}{n-1} \frac{p}{\rho}$$

Si integra la pressione fra i punti 1 e 2 sulla traiettoria

$$n = 1 \text{ (isoterma)} \quad C \ln p_2 + \frac{1}{2} V_2^2 + g z_2 = C \ln p_1 + \frac{1}{2} V_1^2 + g z_1$$

$$n \neq 1 \quad \left[\frac{n}{n-1} \right] \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 = \left[\frac{n}{n-1} \right] \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1$$

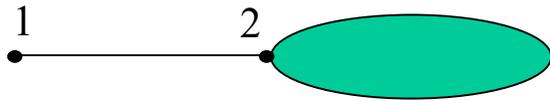
$$\text{Hp Fluido} \quad \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1$$

incomprimibile

Flusso comprimibile: esempio trasformazione isoterma ($n=1$)

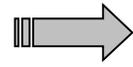
Esempio

$$z_1 = z_2 = 0; V_2 = 0$$



$$c_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{p_1}{\rho_1}}$$

$$Ma_1 = V_1 / c_1$$



$$C \ln p_2 = C \ln p_1 + \frac{1}{2} V_1^2$$

$$\frac{p}{\rho} = C$$

$$\ln p_2 = \ln p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 \frac{V_1^2}{p_1}$$

$$\ln p_2 = \ln p_1 + \frac{1}{2} Ma_1^2$$

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2} Ma_1^2$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \exp\left[\frac{1}{2} Ma_1^2\right]$$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \exp\left[\frac{1}{2} Ma_1^2\right] - 1$$

Flusso comprimibile: trasformazione politropica ($n \neq 1$)

Esempio

$$\Rightarrow \left[\frac{n}{n-1} \right] \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} = \left[\frac{n}{n-1} \right] \frac{p_2}{\rho_2}$$

$$z_1 = z_2 = 0; V_2 = 0$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{np_1}{\rho_1}}$$

$$Ma_1 = V_1 / c_1$$

$$\frac{p_1}{\rho_1^n} = \frac{p_2}{\rho_2^n} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/n}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} + \rho_2 \frac{n-1}{np_1} \frac{V_1^2}{2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{n-1}{c_1^2} \frac{V_1^2}{2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(1 + \frac{n-1}{2} Ma_1^2 \right)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/n} \left[1 + \frac{n-1}{2} Ma_1^2 \right]$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-1/n} = \left[1 + \frac{n-1}{2} Ma_1^2 \right]$$

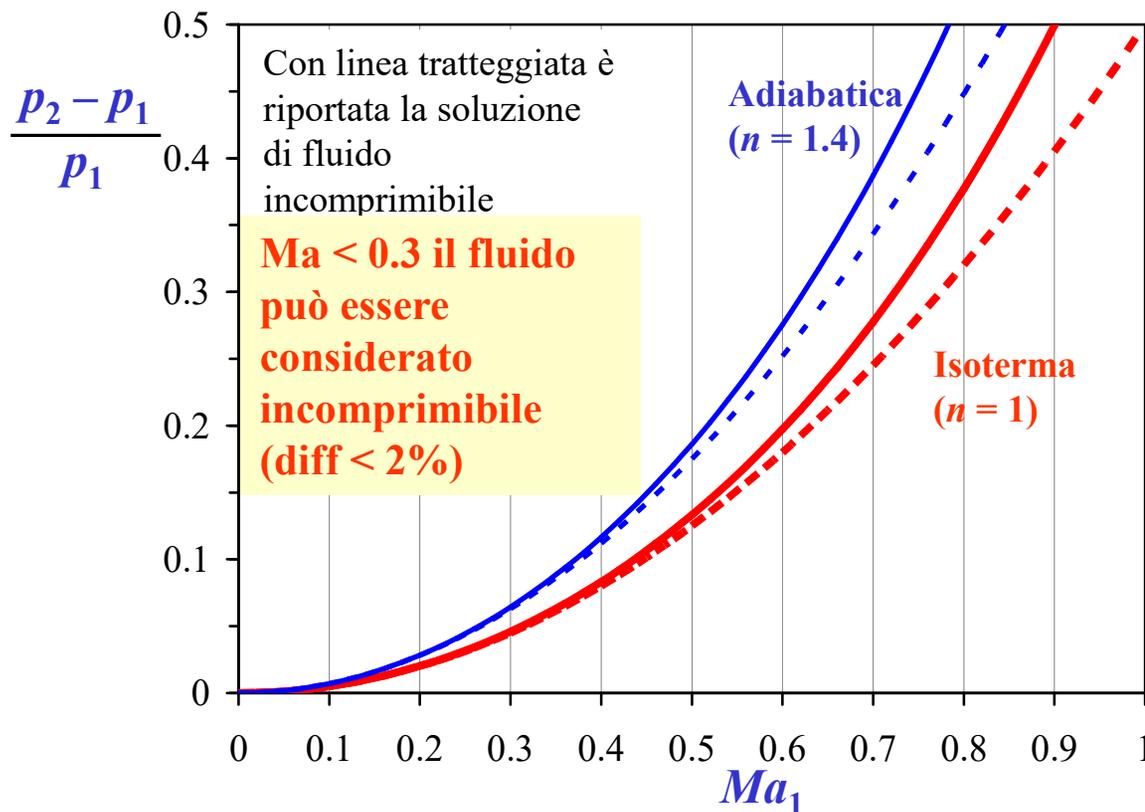
$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \left(1 + \frac{n-1}{2} Ma_1^2 \right)^{n/(n-1)} - 1$$

Confronti flusso comprimibile e incomprimibile su punto di ristagno

Hp flusso incomprimibile: $\rho_1 \frac{V_1^2}{2} + p_1 = p_2$ $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1^2 \rho_1}{2 p_1} + 1$

$$c_1 = \sqrt{\frac{n p_1}{\rho_1}}$$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{n Ma_1^2}{2}$$



**Es Aria ($R = 8.314472 \text{ J}/(\text{mol K})$;
 $M_m = 28.97 \text{ g/mol}$; $T = 293.15 \text{ K}$)**

$$\rho = \frac{p M_m}{R T} \quad c_1 = \sqrt{n \frac{RT}{M_m}}$$

$n = 1$

$c_1 \approx 290 \text{ m/s} \approx 1044 \text{ km/h}$

$V_1 = c_1 Ma \approx 87 \text{ m/s} \approx 313 \text{ km/h}$

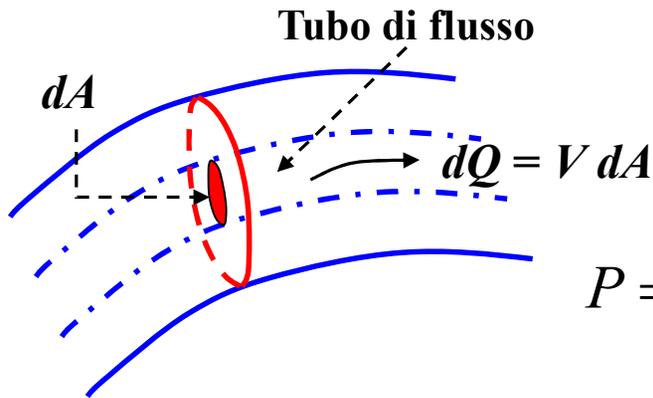
$n = 1.4$

$c_1 \approx 343 \text{ m/s} \approx 1235 \text{ km/h}$

$V_1 = c_1 Ma \approx 103 \text{ m/s} \approx 370 \text{ km/h}$

Teorema di Bernoulli per correnti

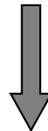
Potenza di una corrente



$$dP = (\gamma dQ) \times H; H = \text{carico totale (energia meccanica)}$$

$$P = \int_Q \gamma H dQ = \int_A \gamma H V dA = \gamma \int_A \left[z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right] V dA$$

Per ogni tubo di flusso, fluido ideale: $\begin{cases} H = \text{costante} \\ \gamma dQ = \text{costante} \end{cases} \longrightarrow dP = \text{costante}$



La potenza, P , di una corrente di fluido ideale, incomprimibile e irrotazionale, in condizioni di moto permanente, si mantiene costante, cioè assume lo stesso valore su tutte le successive sezioni trasversali.

Fino a qui è tutto vero per qualunque tipo di corrente. Adesso, vediamo cosa succede per correnti lineari

Corrente lineare (gradualmente variata): $z + p / \gamma = \text{costante}$

$$P = \gamma \int_A \left[z + \frac{p}{\gamma} \right] V dA + \gamma \int_A \frac{V^2}{2g} V dA = \gamma \left[z + \frac{p}{\gamma} \right] Q + P_c$$

Potenza cinetica

In generale, $V \neq \text{costante}$ su di una sezione trasversale

Coefficiente di ragguglio, α , della potenza cinetica (coefficiente di Coriolis)

Moto uniforme turbolento : $\alpha \approx 1$ (1.06 – 1.08)

Moto uniforme laminare : $\alpha = 2$ (vd in seguito)

$$\alpha = \frac{\int V^3 dA}{V_m^3 A}$$

$$P_c = \gamma \alpha \frac{V_m^2}{2g} Q$$

$$V_m = \frac{Q}{A}$$

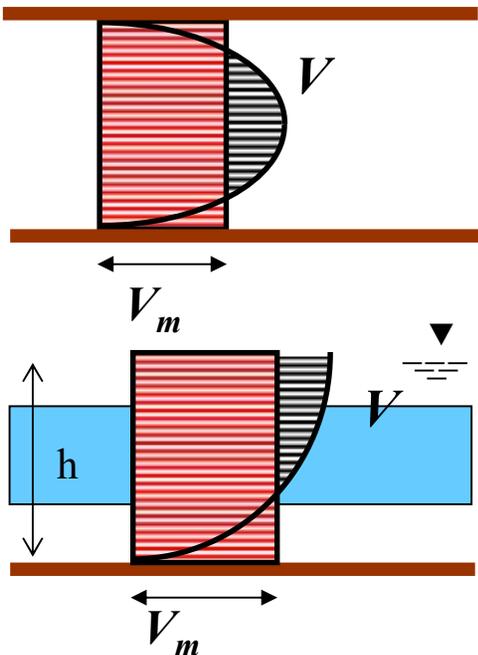
$$P = \gamma \left[z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V_m^2}{2g} \right] Q = \gamma H_{medio} Q = \text{costante}$$

$H_{medio} = \text{Energia Specifica Media}$

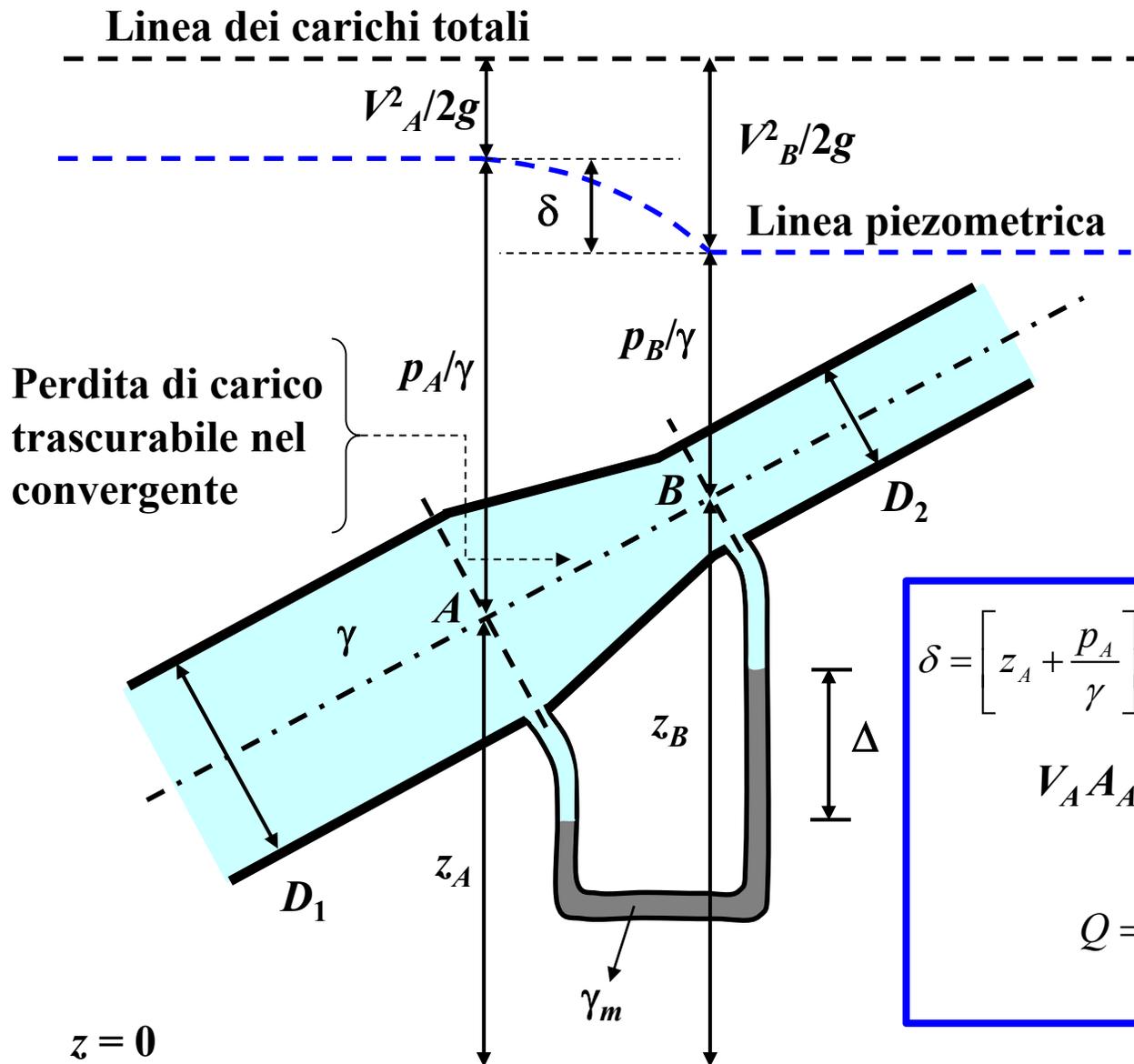
Per una corrente lineare di fluido ideale: $\begin{cases} P = \text{costante} \\ Q = \text{costante} \end{cases}$



$$H_{medio} = \text{costante}$$



Venturimetro



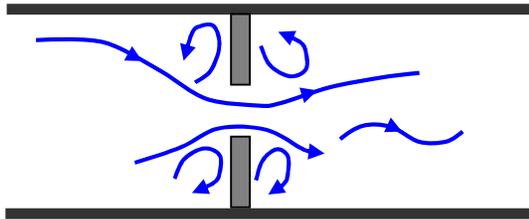
1. Teorema di Bernoulli esteso a corrente lineare con $\alpha \approx 1$ ($V_m \approx V$)
2. Corrente lineare \Rightarrow piezometrica unica, convenzionalmente riferita all'asse, L.C.T. unica

$$\delta = \left[z_A + \frac{p_A}{\gamma} \right] - \left[z_B + \frac{p_B}{\gamma} \right] = \frac{V_B^2 - V_A^2}{2g} = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

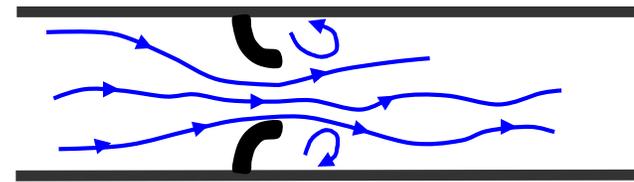
$$V_A A_A = V_B A_B = Q = \text{costante}$$

$$Q = \frac{A_A A_B}{\sqrt{A_A^2 - A_B^2}} \sqrt{2\Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\rho}}$$

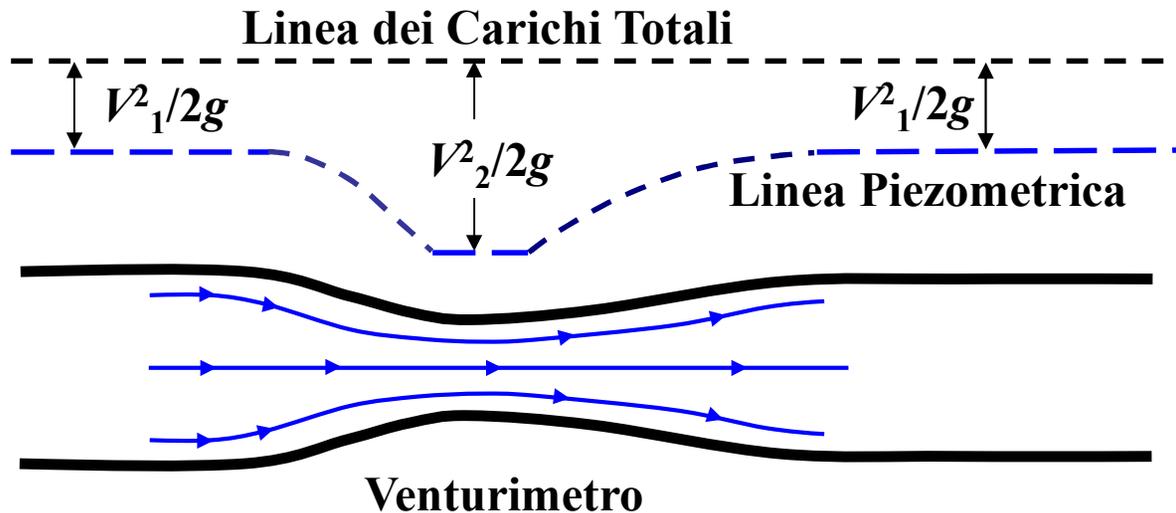
Da notare che il venturimetro necessita di un flusso con linee di corrente ben avviate e assenza di moto vorticoso. Ciò non si realizza nei due sistemi rappresentati sotto



Diaframma



Boccaglio

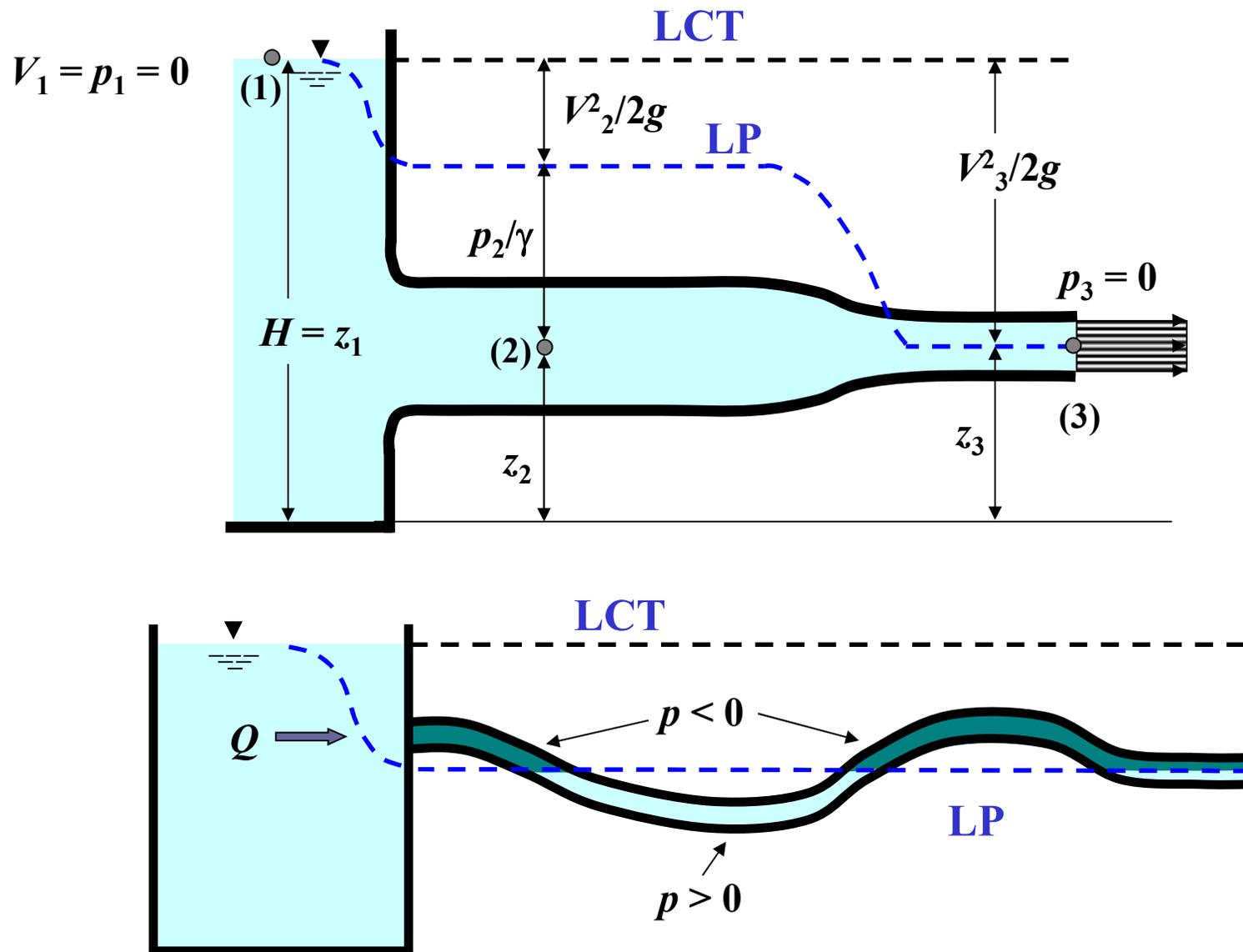


$$Q = K \sqrt{\Delta}$$

Δ : lettura manometro differenziale tra monte e valle

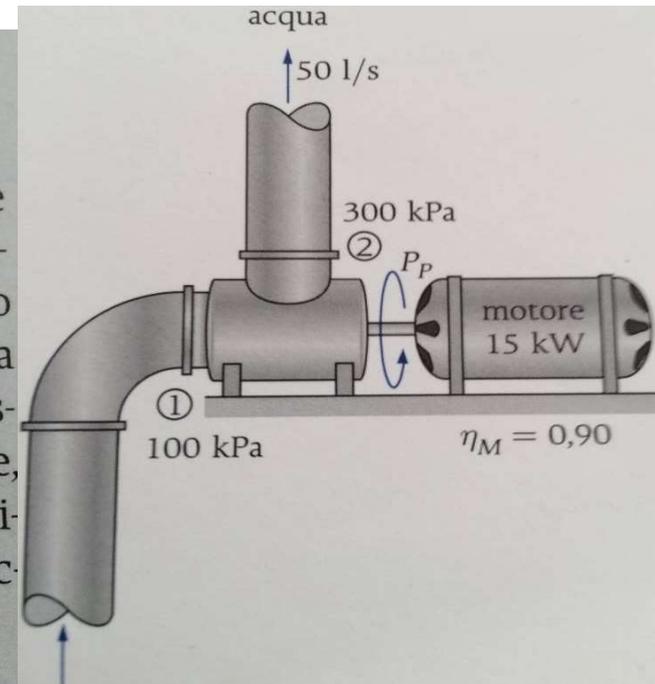
N.B.: In generale, un aumento di velocità è accompagnato da una diminuzione di pressione (pericolo di cavitazione)

Esempi di tracciamento linee piezometriche e linee dei carichi totali



ESEMPIO 5.9 Rendimento di una pompa

La pompa di un impianto di sollevamento è alimentata da un motore elettrico di potenza $P_E = 15 \text{ kW}$, il cui rendimento è $\eta_M = 0,90$. I diametri della condotta di aspirazione e della condotta di mandata sono uguali e la differenza di quota tra la sezione subito a monte della pompa e quella subito a valle è trascurabile. Per la portata $Q = 50 \text{ l/s}$, le pressioni misurate a monte e a valle della pompa sono, rispettivamente, $p_1 = 100 \text{ kPa}$ e $p_2 = 300 \text{ kPa}$ (Figura 5.60). Determinare (a) il rendimento meccanico della pompa e (b) l'aumento di temperatura dell'acqua causato dalle dissipazioni di energia all'interno della pompa.



Ipotesi 1 Il moto è permanente e il fluido è incomprimibile. 2 I coefficienti di ragguglio delle potenze cinetiche nelle sezioni 1 e 2 sono uguali, cioè $\alpha_1 = \alpha_2$.

Proprietà Il fluido è acqua di densità $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ e calore specifico a volume costante $c_w = 4,18 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$.

Analisi

(a) Per la 5.108 applicata tra le sezioni 1 e 2, essendo $z_1 = z_2$ e $V_1 = V_2$, l'energia che la pompa cede all'unità di peso di fluido, cioè la prevalenza totale, è

$$\Delta H_P = \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} \right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} \right) = \frac{1}{\rho g} (p_2 - p_1)$$

Moltiplicando la prevalenza totale per la portata in peso, cioè per il peso di fluido che attraversa la pompa nell'unità di tempo, si ottiene la potenza P_F ceduta dalla pompa al fluido che, pertanto, è

$$P_F = \rho g Q \Delta H_P = \rho g Q \frac{1}{\rho g} (p_2 - p_1) = Q(p_2 - p_1) =$$

$$= 50 \times 10^{-3} \times (300 - 100) \times 10^3 = 10000 \text{ W} = 10 \text{ kW}$$

Per la 5.33, la potenza P_P ceduta alla pompa dal motore elettrico è

$$P_P = \eta_M P_E = 0,90 \times 15 = 13,5 \text{ kW}$$

Pertanto, per la 5.31, il rendimento meccanico della pompa è

$$\eta_P = \frac{P_F}{P_P} = \frac{10}{13,5} = 0,74$$

(b) Dei 13,5 kW di potenza meccanica assorbita dalla pompa, solo 10 kW arrivano al fluido sotto forma di energia meccanica. I rimanenti 3,5 kW vengono perduti all'interno della pompa per resistenze idrauliche e meccaniche e convertiti in energia termica, cosa che dà luogo a un aumento della temperatura del fluido. Per la 5.102, l'aumento di temperatura ΔT per unità di massa è pari al rapporto tra l'energia dissipata e il calore specifico

$$\Delta T = \frac{e_{i2} - e_{i1}}{c_w} = \frac{e_d}{c_w}$$

e, passando alle potenze,

$$\Delta T = \frac{e_d}{c_w} = \frac{P_d}{c_w Q_m} = \frac{3,5}{4,18 \times 1000 \times 50 \times 10^{-3}} = 0,0167^\circ\text{C}$$

ESEMPIO 5.10 Impianto idroelettrico

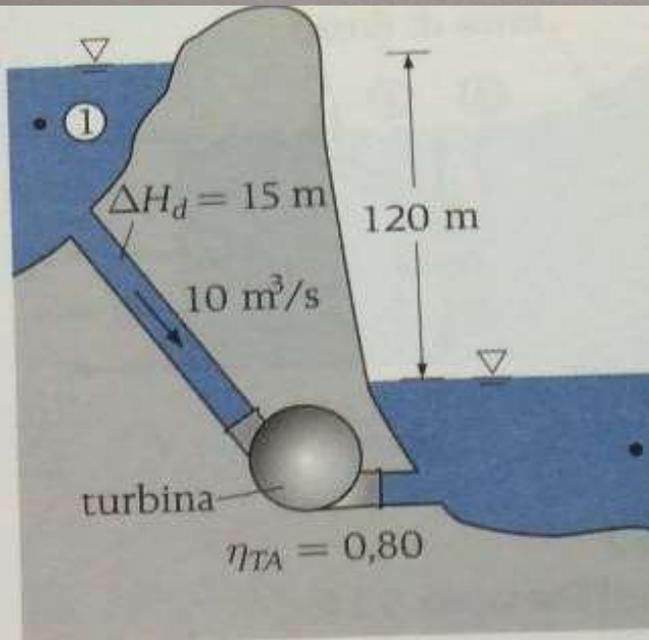
Il dislivello (*salto disponibile*) tra le superfici libere dei serbatoi di monte e di valle di un impianto idroelettrico è $Y = 120$ m (Figura 5.61). Per la portata $Q = 10$ m³/s, la somma delle perdite di carico continue e localizzate è $\Delta H_d = 15$ m. Determinare la potenza elettrica prodotta, sapendo che il rendimento del gruppo turbina-alternatore è $\eta_{TA} = 0,80$.

Ipotesi 1 Il moto è permanente e il fluido è incomprimibile. **2** I serbatoi di monte e di valle sono di grandi dimensioni, per cui i livelli delle loro superfici libere si mantengono costanti.

Proprietà La densità dell'acqua è $\rho = 1000$ kg/m³.

Analisi Per la 5.108, applicata tra due punti generici 1 e 2 dei due serbatoi, sufficientemente lontani dall'imbocco o dallo sbocco in modo che si possano considerare in quiete, si ha

$$\Delta H_T = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \right) - \Delta H_d$$



per cui, essendo $v_1 = v_2 = 0$ per ipotesi e

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = Y$$

il salto utile della turbina è pari al salto disponibile Y diminuito della somma delle perdite lungo le tubazioni ΔH_d . Pertanto,

$$\Delta H_T = Y - \Delta H_d = 120 - 15 = 105 \text{ m}$$

Moltiplicando il salto utile per la portata in peso, si ottiene la potenza P_F ceduta dal fluido alla turbina

$$P_F = \rho g Q \Delta H_T = 1000 \times 9,81 \times 10 \times 105 = 10\,300 \text{ kW}$$

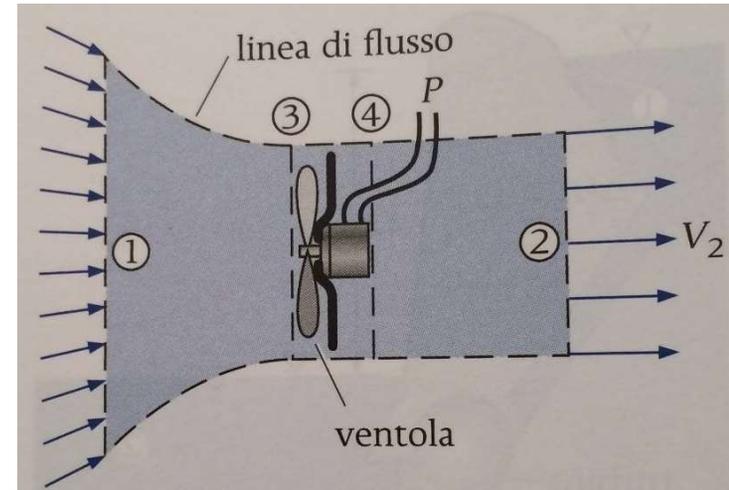
Per la 5.34, la potenza elettrica prodotta vale

$$P_E = \eta_{TA} P_F = 0,80 \times 10\,300 = 8240 \text{ kW}$$

Discussione La potenza prodotta aumenterebbe di quasi 0,1 MW per ogni punto percentuale di aumento del rendimento del gruppo turbina-alternatore.

ESEMPIO 5.11 Scelta della ventola di raffreddamento di un computer

Si deve scegliere la ventola di raffreddamento di un computer di $12 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$. Il volume dell'interno della scatola è occupato per metà dai componenti e per metà dall'aria. Nel retro del



contenitore è praticato un foro di diametro $D = 5 \text{ cm}$ in cui va alloggiata una ventola che deve effettuare un ricambio d'aria al secondo (Figura 5.62). Sul mercato sono disponibili piccoli gruppi ventola-motore, il cui rendimento è $\eta = 0,30$. Determinare **(a)** la potenza P_E del gruppo da acquistare e **(b)** la differenza di pressione Δp tra valle e monte della ventola.

Ipotesi 1 Il moto è permanente e il fluido è incomprimibile. **2** Le perdite sono trascurabili. **3** Il coefficiente di ragguaglio della potenza cinetica allo sbocco è $\alpha = 1,10$.

Proprietà La densità dell'aria è $\rho = 1,20 \text{ kg/m}^3$.

Analisi

(a) La portata di aria è data dal rapporto tra il volume d'aria W_a e il tempo Δt occorrente per il suo ricambio, per cui

$$Q = \frac{W_a}{\Delta t} = \frac{0,5 \times 12 \times 40 \times 40}{1} = 9600 \text{ cm}^3/\text{s} = 9,6 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Sufficientemente a monte della ventola l'aria è praticamente in quiete e a pressione atmosferica. Pertanto, per un volume di controllo la cui sezione di ingresso 1 sia in quiete ($V_1 \cong 0$) e a pressione atmosferica ($p_1 = p_{\text{atm}}$) e la sezione di uscita 2 sufficientemente a valle della ventola in modo da potere considerare la corrente lineare e a pressione atmosferica ($p_2 = p_{\text{atm}}$) (Figura 5.62), essendo anche $z_1 = z_2$, la 5.107 fornisce

$$P_F = Q_m \left[gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2} \right] - \left[gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2} \right] = Q_m \frac{\alpha_2 V_2^2}{2}$$

Essendo la velocità nella sezione 2

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 9,6 \times 10^{-3}}{\pi \times 0,05^2} = 4,89 \text{ m/s}$$

risulta

$$P_F = Q_m \frac{\alpha_2 V_2^2}{2} = 1,20 \times 9,6 \times 10^{-3} \times \frac{1,10 \times 4,89^2}{2} = 0,152 \text{ W}$$

Per la 5.35, la potenza elettrica P_E richiesta è

$$P_E = \frac{P_F}{\eta} = \frac{0,152}{0,3} = 0,507 \text{ W}$$

Sarà sufficiente, pertanto, un motore con una potenza di circa mezzo watt.

(b) Per calcolare la differenza di pressione tra valle e monte della ventola, si consideri una traiettoria tra il punto 3 subito a monte

della ventola e il punto 4 subito a valle. Essendo $z_3 = z_4$ e $V_3 = V_4$, per la 5.107, si ha

$$P_F + Q_m \frac{p_3}{\rho} = Q_m \frac{p_4}{\rho}$$

da cui

$$p_4 - p_3 = \frac{\rho P_F}{Q_m} = \frac{P_F}{Q} = \frac{0,152}{9,6 \times 10^{-3}} = 15,8 \text{ Pa}$$

Discussione Ponendo $\alpha_2 = 1$, la potenza elettrica richiesta risulterebbe sottostimata del 10%.

ESEMPIO 5.12 Impianto di sollevamento

In un impianto di sollevamento, il dislivello (*prevalenza geodetica*) fra le quote delle superfici libere del serbatoio di scarico e del serbatoio di alimentazione è $Y = 45$ m (Figura 5.63). Per una portata d'acqua $Q = 0,03$ m³/s, la pompa cede al fluido una potenza $P_F = 16$ kW. Determinare la potenza meccanica P_d dissipata nelle tubazioni e la relativa perdita di carico.

Ipotesi 1 Il moto è permanente e il fluido è incomprimibile. **2** I serbatoi di alimentazione e di scarico sono di grandi dimensioni, per cui i livelli delle loro superfici libere si mantengono costanti.

Proprietà La densità dell'acqua è $\rho = 1000$ kg/m³.

Analisi Per la 5.107, applicata tra il serbatoio di alimentazione 1 e quello di scarico 2, la potenza dissipata nella tubazione è

$$P_d = P_F - Q_m \left[\left(gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2} \right) - \left(gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2} \right) \right]$$

Essendo il carico in ciascun serbatoio pari alla quota della superficie libera, è anche

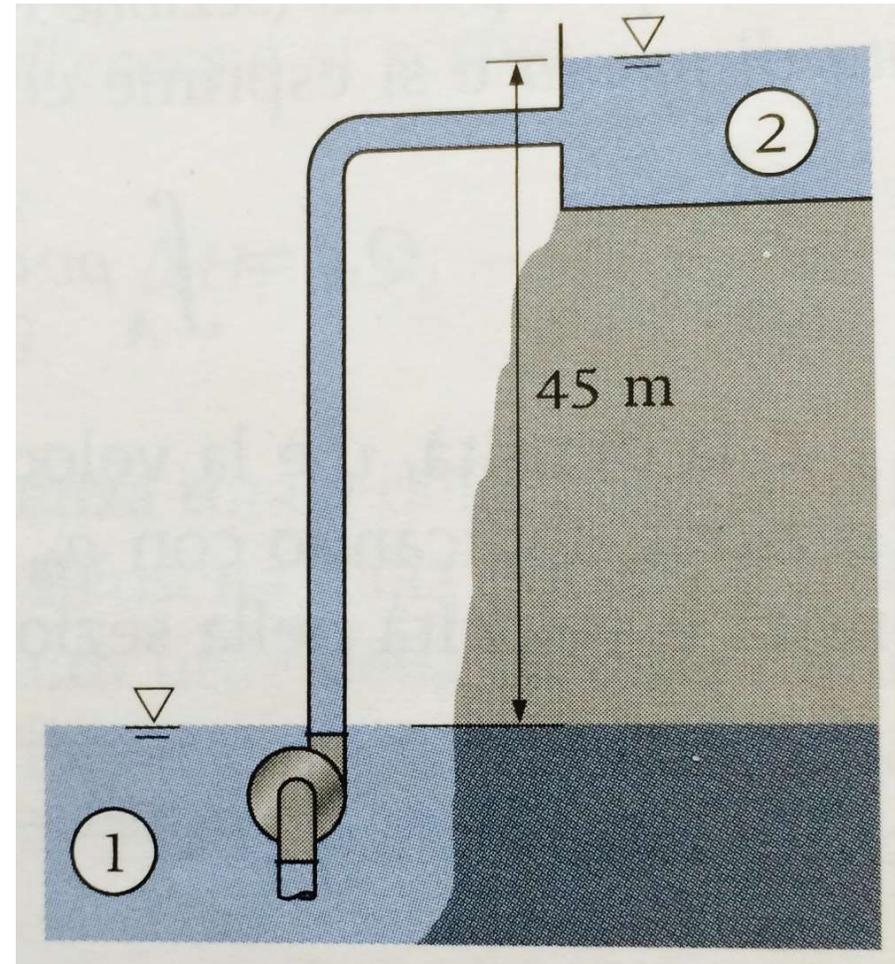
$$\left(gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2} \right) - \left(gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2} \right) = gY$$

per cui

$$\begin{aligned} P_d &= P_F - Q_m gY = P_F - \rho Q gY = \\ &= 16000 - 1000 \times 0,03 \times 9,81 \times 45 = 2,76 \text{ kW} \end{aligned}$$

Dividendo la potenza dissipata per la portata in peso, si ottiene il carico ΔH_d dissipato nelle tubazioni

$$\Delta H_d = \frac{P_d}{\rho g Q} = \frac{2760}{1000 \times 9,81 \times 0,03} = 9,37 \text{ m}$$



Da notare che in assenza di perdite si potrebbe sollevare l'acqua di 9.37 metri in più rispetto al caso reale

Legge di conservazione della quantità di moto

La somma delle forze (superficiali e di volume) agenti su un elemento di fluido è pari alla massa del fluido per l'accelerazione a cui lo stesso è soggetto:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Nell'approccio Lagrangiano, può anche essere espressa come:

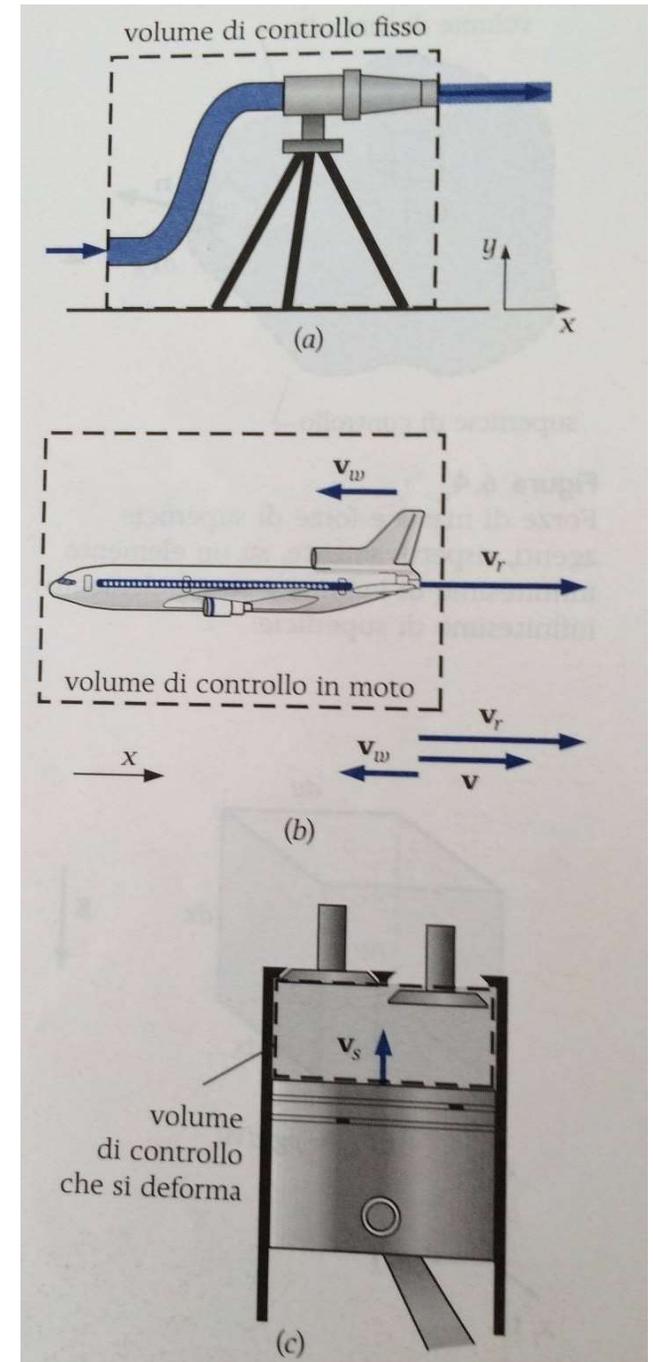
La variazione della quantità di moto di un sistema è pari alla risultante delle forze applicate.

Come per le leggi precedenti, scriviamo la legge di conservazione per un volume di controllo di ampiezza finita (approccio Euleriano e integrale)

Volume di controllo

Dipende dal problema specifico che si affronta,
Il volume di controllo può essere:

- Fisso
- Solidale al corpo in movimento
(In questo caso bisogna considerare le velocità relative attraverso le superfici del volume di controllo)
- Di dimensioni variabili nel tempo
(in questo caso bisogna considerare la velocità relativa tra quella assoluta e quella delle superfici del volume di controllo)



Forze agenti sull'elemento di fluido

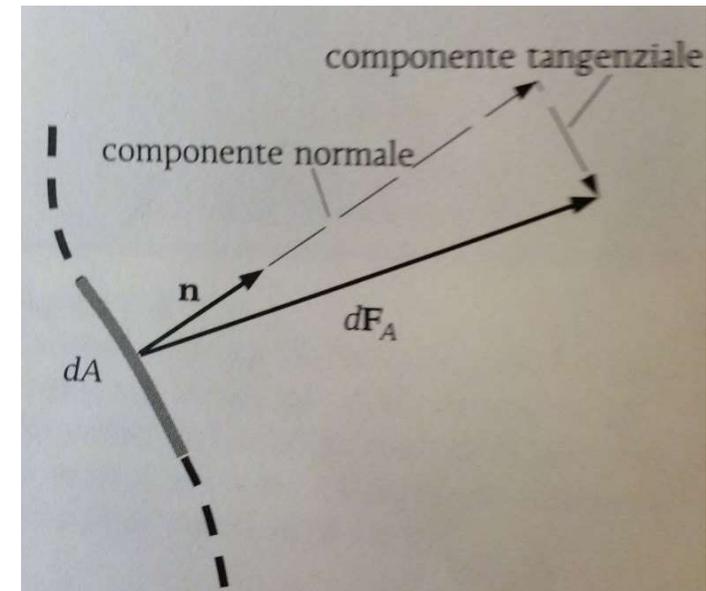
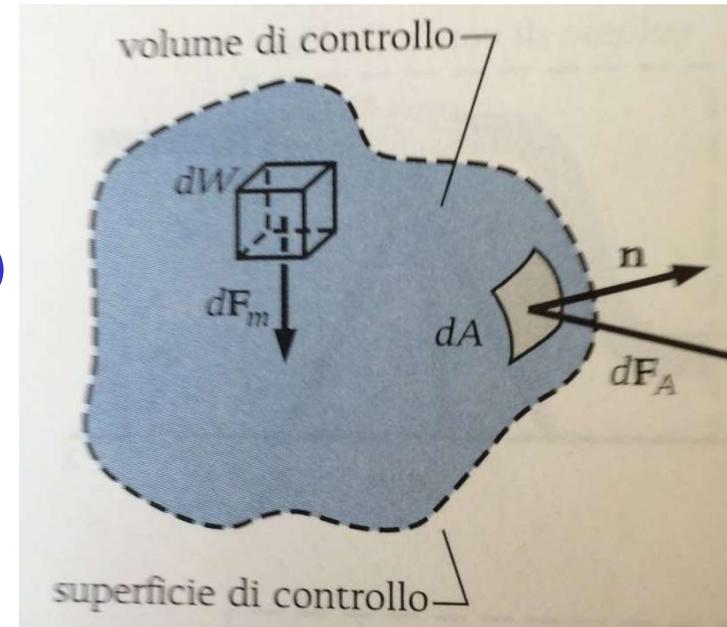
Forze di massa (il vettore g è una forza di massa per unità di massa, e non necessariamente la gravità)

$$\vec{F}_m = \int_W \rho \vec{g} dW$$

Forze di superficie

$$\vec{F}_s = \int_A \vec{\Phi}_n dA$$

Dove Φ_n rappresenta lo sforzo sull'areola dA di normale n



Legge di conservazione applicando il teorema di Reynolds:

$$\mathbf{B} = m\mathbf{v} \quad ; \quad \mathbf{b} = \mathbf{v}$$

$$\underbrace{\vec{F}_m + \vec{F}_s}_{\text{Forze applicate al sistema}} = \underbrace{\frac{dm \vec{v}}{dt}}_{\text{Variazione della quantità di moto nel sistema}} = \frac{d}{dt} \underbrace{\int_W \rho \vec{v} dW}_{\text{Variazione della quantità di moto nel volume di controllo fisso nello spazio}} + \underbrace{\int_A \rho \vec{v} (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) dA}_{\text{Flusso di quantità di moto attraverso la superficie del volume di controllo in moto}}$$

$$\underbrace{\int_W \rho \vec{g} dW + \int_A \vec{\Phi}_n dA}_{\text{Forze applicate al sistema}} - \frac{d}{dt} \underbrace{\int_W \rho \vec{v} dW}_{\text{Variazione della quantità di moto nel volume di controllo fisso nello spazio}} - \underbrace{\int_A \rho \vec{v} (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) dA}_{\text{Flusso di quantità di moto attraverso la superficie del volume di controllo in moto}} = 0$$

$$G + \Pi + I + M = 0$$

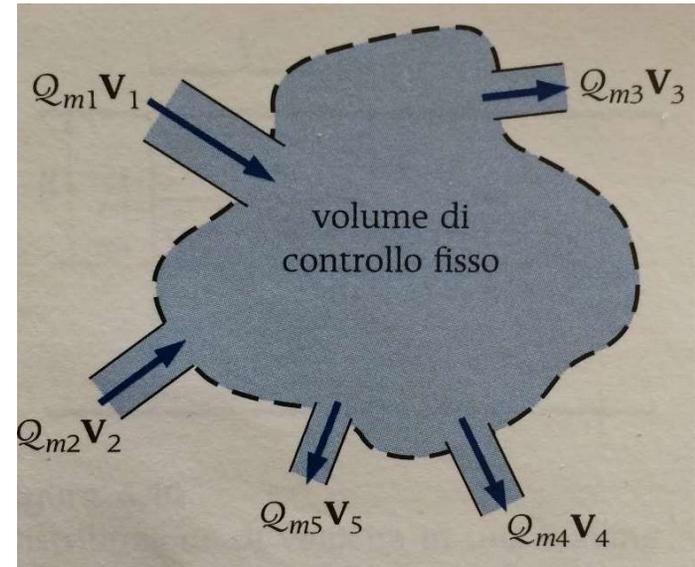
Equazione Globale della Quantità di Moto (equazione vettoriale!)

CQM in moto permanente

I=0

Ipotizziamo volume di controllo fisso

$$\int_W \rho \vec{g} dW + \int_A \vec{\Phi}_n dA - \int_A \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0$$



Se $\rho = \text{cost}$ possiamo esprimere la portata massica come:

$$Q_m = \int_A \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \rho V A$$

Con V velocità media sulla sezione e, nell'ipotesi di velocità quasi uniforme il flusso di quantità di moto sarà:

$$\int_A \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \rho V A \vec{V}$$

Coefficiente di ragguglio della quantità di moto

In generale la velocità non è costante lungo la sezione. Si introduce quindi un coefficiente di ragguglio β :

$$\int_A \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \beta \rho V A \vec{V}$$

Il legame tra i coefficienti di ragguglio è il seguente

$$\alpha - 1 = 3(\beta - 1)$$

Se la densità è costante:

$$\beta = \frac{\int_A \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA}{\rho V A \vec{V}} = \frac{\int v^2 dA}{V^2 A}$$

Sezione circolare

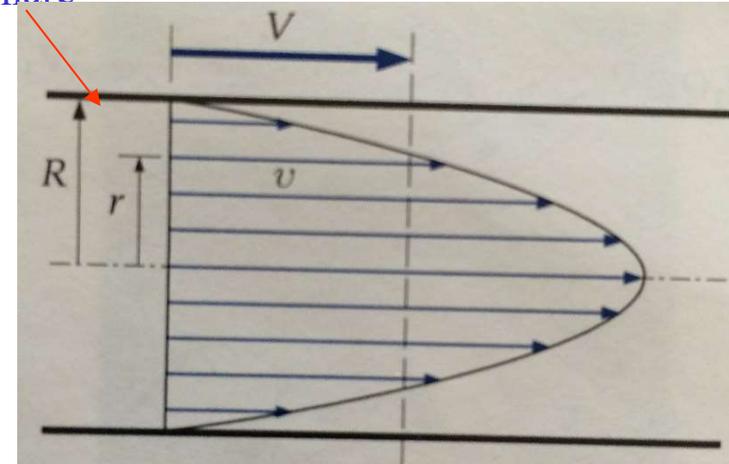
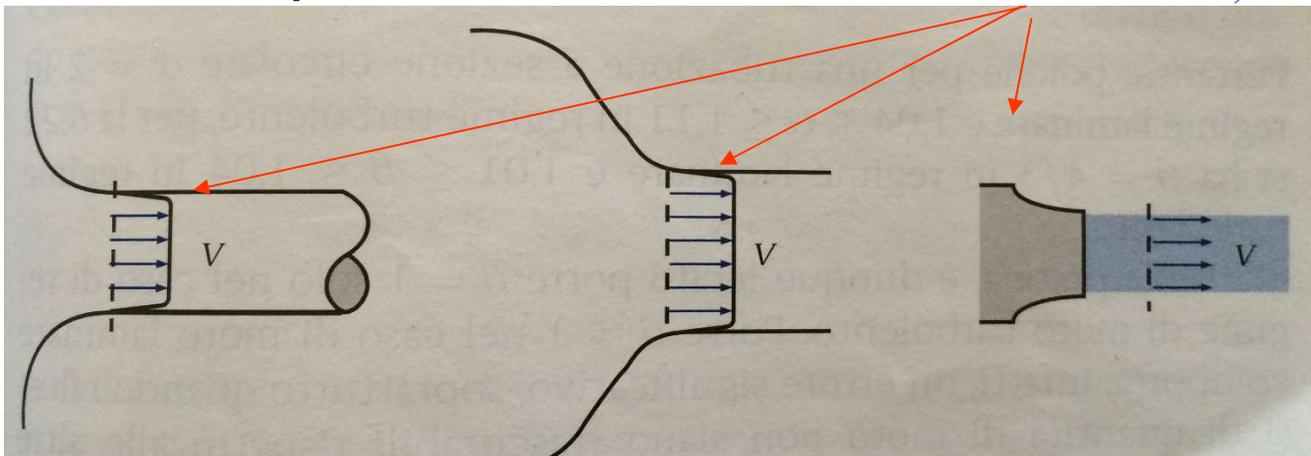
Regime laminare

$\alpha=2$
 $\beta=4/3$

Regime turbolento

$1.04 < \alpha < 1.11$
 $1.01 < \beta < 1.04$

Regimi
Turbolento; laminare



CQM: una forma pratica

Conviene distinguere le sezioni di ingresso e uscita:

$$\int_A \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \sum_{i=1, n_u} \beta_i Q_i \vec{V}_i - \sum_{i=1, n_e} \beta_i Q_i \vec{V}_i = M_u - M_e$$

L'equazione diventa quindi:

$$G + \Pi + I + M_e - M_u = 0$$

La legge di conservazione è spesso applicata per la determinazione della spinta dinamica sulle pareti solide del volume di controllo

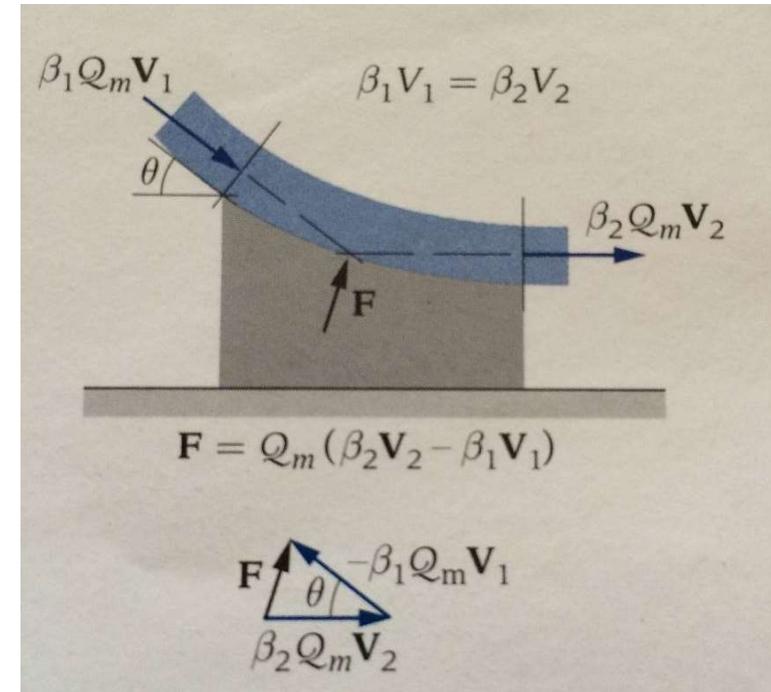
CQM: Applicazioni a casi particolari

Assenza di forze esterne

In alcuni casi la gravità è trascurabile e le Forze di pressione sono assenti

la variazione della quantità di moto nel tempo è pari al flusso netto di quantità di moto nel volume di controllo.

Da notare che per quanto i moduli dei flussi di quantità di moto siano spesso uguali, la loro somma va eseguita **vettorialmente**



$$F_x = \beta_2 Q_m V_2 - \beta_1 Q_m V_1 \cos \theta$$

$$F_y = \beta_1 Q_m V_1 \sin \theta$$

ESEMPIO 6.2 Spinta dinamica su un gomito

Il tratto terminale di una tubazione orizzontale, di diametro $D_1 = 12$ cm, è costituito da un gomito a sezione decrescente che devia di $\theta = 30^\circ$ verso l'alto un getto d'acqua effluente nell'atmosfera (Figura 6.15). La portata è $Q = 14$ l/s. Il centro della sezione di sbocco, di diametro $D_2 = 4$ cm è a quota $z_2 = 30$ cm rispetto all'asse del tubo. Calcolare **(a)** la pressione p_1 nel centro della sezione iniziale del gomito e **(b)** la spinta dinamica \mathbf{S} sul gomito.

Ipotesi 1 Il moto è permanente e le perdite di carico trascurabili. **2** Il peso dell'acqua all'interno del gomito è trascurabile. **3** Il coefficiente di ragguglio dei flussi di quantità di moto è $\beta = 1,03$.

Proprietà La densità dell'acqua è $\rho = 1000$ kg/m³.

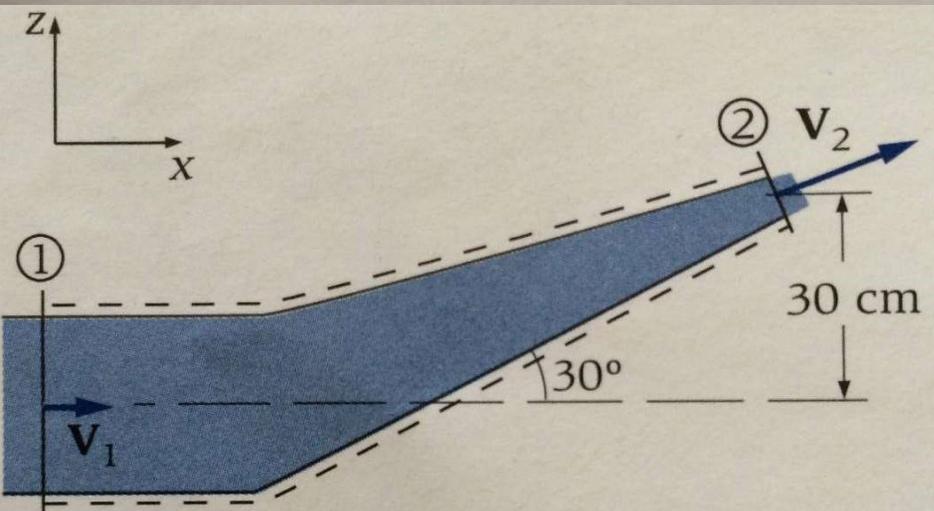
Analisi

(a) Per l'equazione di Bernoulli 5.117, applicata alla corrente tra la sezione 1 subito a monte del gomito e la sezione 2 di sbocco, si ha

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}$$

da cui, in termini di pressione relativa, essendo $p_2 = 0$

$$p_1 = \rho g \left(\frac{\alpha_2 V_2^2 - \alpha_1 V_1^2}{2g} + z_2 - z_1 \right)$$



Per l'equazione di continuità 5.26, si ha anche

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$$

da cui

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{4 \times 0,014}{\pi \times 0,12^2} = 1,24 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{4 \times 0,014}{\pi \times 0,04^2} = 11,1 \text{ m/s}$$

Sostituendo nell'espressione di p_1 ed essendo, per la 6.22, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1 + 3(\beta - 1) = 1,09$, si ha

$$p_1 = 9,81 \times 1000 \times \left(1,09 \times \frac{11,1^2 - 1,24^2}{2 \times 9,81} + 0,30 \right) = 69,3 \text{ kPa}$$

(b) La 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra le sezioni 1 e 2 (Figura 6.16), tenendo presente che il termine $\mathbf{I} = 0$ perché

il moto è permanente, che il termine $\Pi_2 = 0$ perché la pressione sulla sezione di sbocco è nulla e che il peso \mathbf{G} è trascurabile per ipotesi, diviene

$$\Pi_1 + \Pi_0 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

avendo indicato con Π_0 la risultante delle forze di superficie che la parete del gomito esercita sul fluido. La spinta dinamica che il liquido esercita sul gomito è uguale e contraria a quella che il gomito esercita sul liquido. Pertanto, si ha

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \Pi_1 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

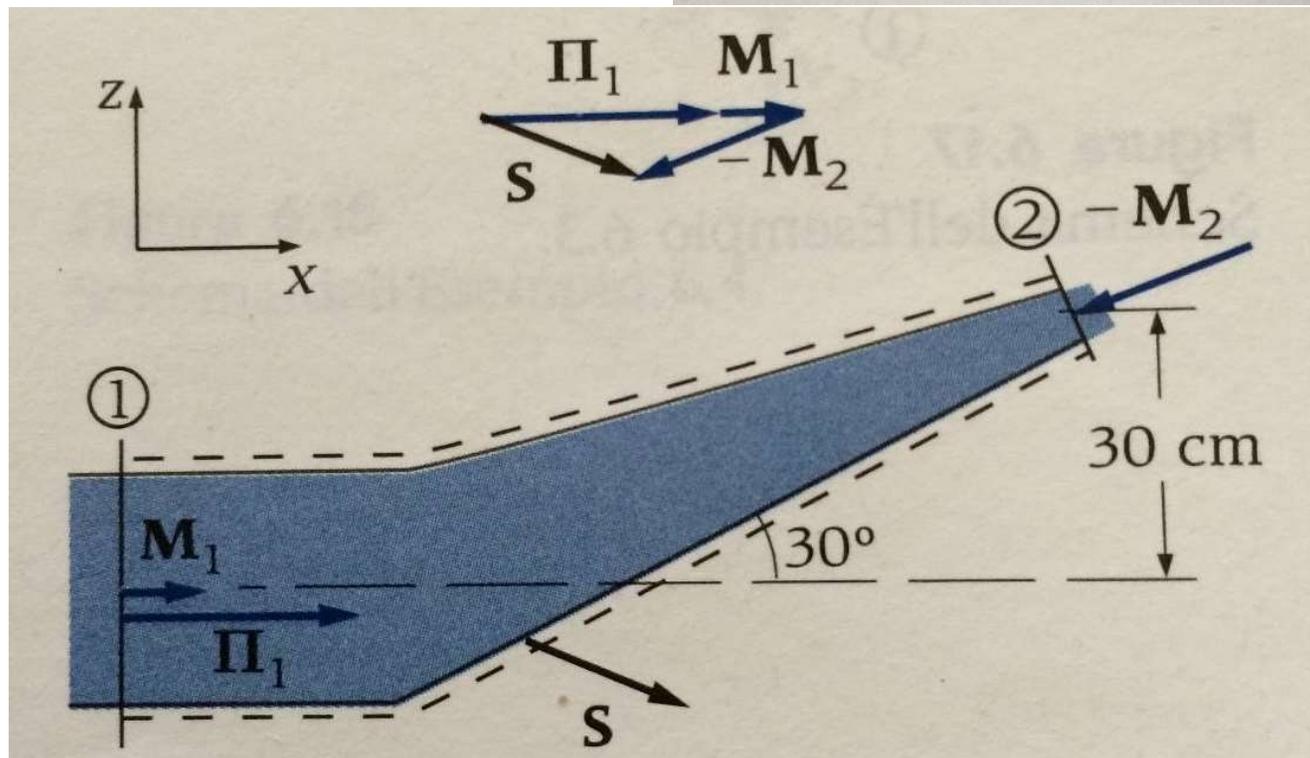
e, proiettando sull'orizzontale (asse x) e sulla verticale (asse z)

$$\begin{aligned} S_x &= \Pi_1 + M_1 - M_2 \cos \theta = p_1 A_1 + \beta \rho Q (V_1 - V_2 \cos \theta) = \\ &= 69300 \times \pi/4 \times 0,12^2 + \\ &\quad + 1,03 \times 1000 \times 0,014 \times (1,21 - 11,1 \times 0,866) = \\ &= 783 - 122 = 661 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_z &= -M_2 \sin \theta = -\beta \rho Q V_2 \sin \theta = \\ &= -1,03 \times 1000 \times 0,014 \times 11,1 \times 0,5 = -80,0 \text{ N} \end{aligned}$$

La spinta è, pertanto, diretta verso destra e verso il basso e forma con l'orizzontale un angolo

$$\phi = \arctan \frac{S_z}{S_x} = \arctan \frac{80,0}{661} = 6,90^\circ$$



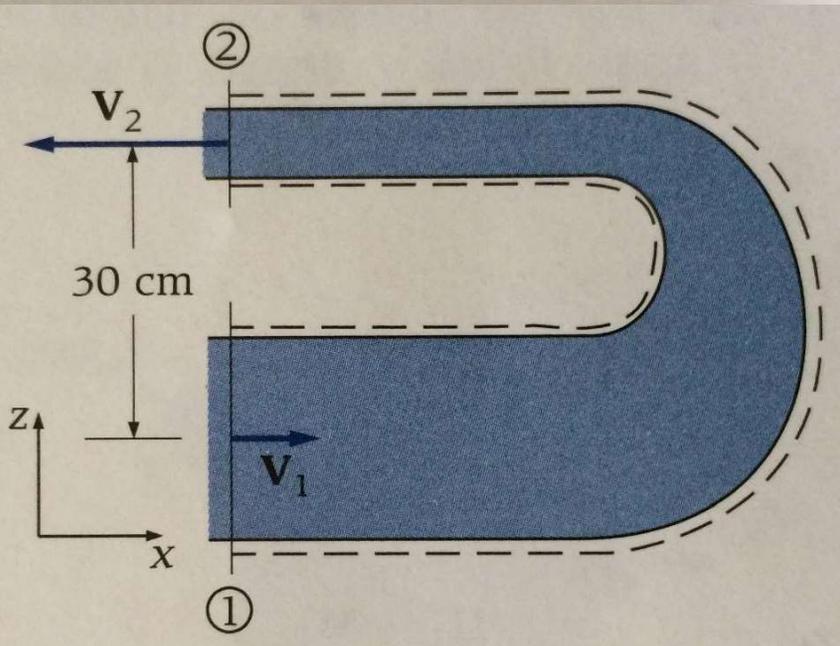
ESEMPIO 6.3 Spinta dinamica su un gomito a 180°

Un gomito a sezione decrescente inverte di 180° il senso del moto di una corrente d'acqua prima che essa sbocchi in atmosfera (Figura 6.17). I diametri delle sezioni iniziale e finale sono, rispettivamente, $D_1 = 12$ cm e $D_2 = 4$ cm. La portata è $Q = 14$ l/s. La differenza di quota tra i centri delle due sezioni di imbocco e di sbocco è $z_2 - z_1 = 30$ cm. Calcolare la spinta dinamica \mathbf{S} del liquido sul gomito.

Ipotesi 1 Il moto è permanente e le perdite di carico trascurabili. **2** Il peso dell'acqua all'interno del gomito è trascurabile. **3** Il coefficiente di ragguaglio dei flussi di quantità di moto è $\beta = 1,03$.

Proprietà La densità dell'acqua è $\rho = 1000$ kg/m³.

Analisi Le velocità nelle sezioni 1 e 2 e la pressione nella sezione 1 sono uguali a quelli dell'Esempio 6.2. La 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra le sezioni 1 e 2, tenendo presente che il termine $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente, che il termine $\Pi_2 = 0$



perché la pressione relativa sulla sezione di sbocco è nulla e che il peso \mathbf{G} è trascurabile per ipotesi, diviene

$$\Pi_1 + \Pi_0 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

avendo indicato con Π_0 la risultante delle forze di superficie che la parete del gomito esercita sul fluido. La spinta dinamica che il liquido esercita sul gomito è uguale e contraria a quella che il gomito esercita sul liquido.

Pertanto, si ha

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \Pi_1 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

e, proiettando sull'orizzontale (asse x) e sulla verticale (asse z)

$$\begin{aligned} S_x &= \Pi_1 + M_1 + M_2 = p_1 A_1 + \beta \rho Q (V_1 + V_2) = \\ &= 69300 \times \pi/4 \times 0,12^2 + 1,03 \times 1000 \times 0,014 \times (1,21 + 11,1) = \\ &= 783 + 178 = 951 \text{ N} \end{aligned}$$

$$S_z = 0$$

La spinta risultante è, pertanto, orizzontale e diretta verso destra.

Discussione La spinta risulta maggiore di quella dell'Esempio 6.2. Ciò perché il gomito devia la corrente completamente, per cui i moduli dei flussi di quantità di moto entrante e uscente si sommano.

ESEMPIO 6.4 Spinta di un getto su una piastra piana verticale

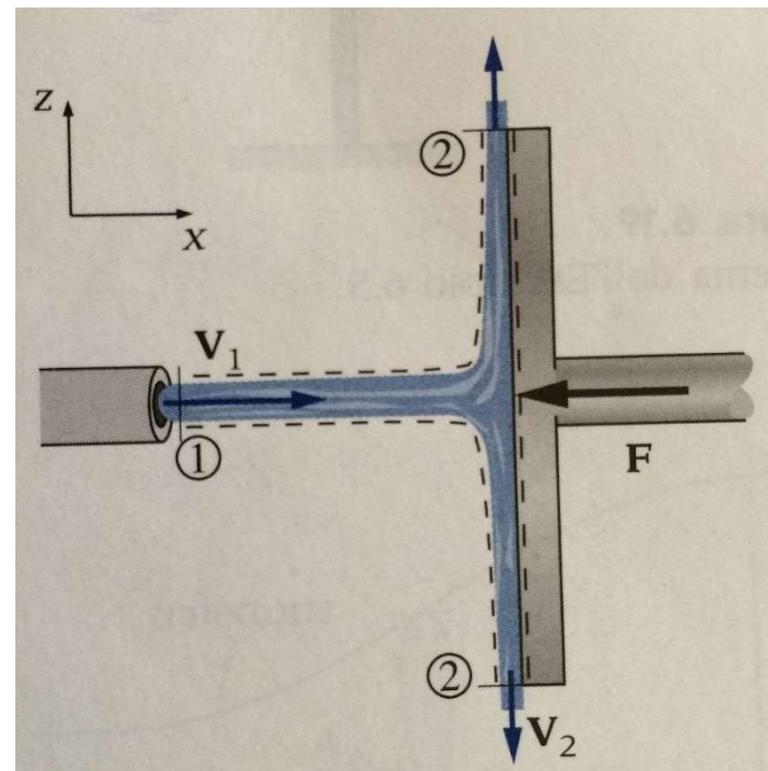
Un getto d'acqua di portata $Q = 10 \text{ l/s}$ che fuoriesce orizzontalmente da una tubazione di diametro $D = 2,5 \text{ cm}$ colpisce una piastra verticale in quiete (Figura 6.18). Calcolare la forza orizzontale \mathbf{F} da applicare alla piastra per impedire che si sposti.

Ipotesi 1 Il moto è permanente. 2 Il getto viene deviato dalla piastra su un piano verticale. 3 Si assume $\beta = 1$.

Analisi La 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra la sezione terminale della tubazione 1 e la sezione 2 di uscita dal bordo della piastra, tenendo presente che il termine $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e che le pressioni relative sono ovunque nulle tranne che sulla superficie della piastra, diviene

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_0 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

avendo indicato con $\mathbf{\Pi}_0$ la risultante delle forze di superficie che la piastra esercita sul fluido. La spinta dinamica \mathbf{S} che il liquido eser-



cita sulla piastra è uguale e contraria a quella che la piastra esercita sul liquido. Pertanto, si ha

$$\mathbf{S} = -\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{G} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il vettore \mathbf{G} è verticale e il flusso di quantità di moto uscente \mathbf{M}_2 giace su un piano verticale, per cui, proiettando sull'orizzontale, si ottiene

$$S = M_1 = \beta \rho Q V_1 = \beta \rho \frac{Q^2}{A_1} = 1000 \times \frac{4 \times 0,010^2}{\pi \times 0,025^2} = 204 \text{ N}$$

La spinta è, pertanto, orizzontale e diretta verso destra. Per impedire che la piastra si sposti, bisogna applicarvi una forza $F = 204 \text{ N}$ avente direzione orizzontale e verso opposto a quello del getto.

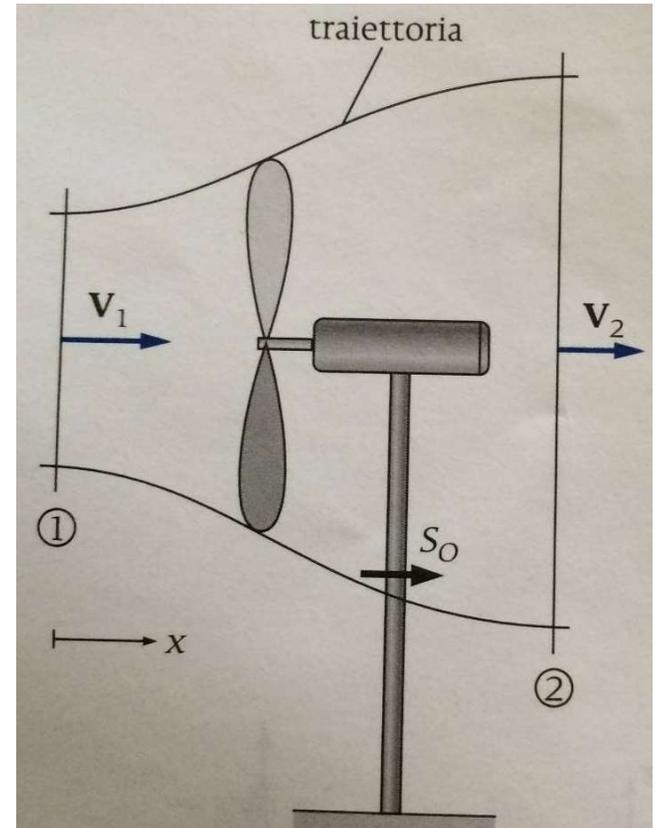
ESEMPIO 6.5 Potenza di una turbina eolica

Una turbina eolica, costituita da una pala con apertura $D = 9$ m, inizia a produrre energia quando la velocità del vento supera una velocità di soglia $V_1 = 3$ m/s, in corrispondenza della quale fornisce una potenza elettrica $P_E = 0,3$ kW (Figura 6.19).

Calcolare (a) il rendimento η_{TA} del gruppo turbina-alternatore, (b) la componente orizzontale S_o della spinta del vento sull'albero di sostegno della turbina, (c) la potenza elettrica e la spinta quando la velocità del vento raddoppia.

Ipotesi 1 Il moto è permanente e l'aria si comporta come un fluido incomprimibile. 2 Il rendimento del gruppo turbina-alternatore è indipendente dalla velocità del vento. 3 Le perdite di carico sono trascurabili. 4 La velocità dell'aria nella turbina è uguale alla velocità a monte di essa (anche se in realtà è notevolmente inferiore, vedi discussione). 5 Si assume $\beta = 1$.

Proprietà La densità dell'aria è $\rho = 1,20$ kg/m³.



Analisi

- (a) Tra una sezione 1 a monte della turbina e una sezione 2 a valle l'aria non subisce variazioni di quota né di pressione, per cui l'unica forma di energia che può essere ceduta alla turbina è quella cinetica. Se l'energia cinetica dell'aria in ingresso viene interamente convertita in lavoro, la potenza P_f ceduta dal fluido alla turbina è data dal prodotto dell'energia cinetica per unità di massa della corrente d'aria che investe la turbina per la massa dell'aria che transita attraverso la turbina nell'unità di tempo, cioè per la portata di massa. Essendo

$$Q_m = \rho V_1 A = \rho V_1 \frac{\pi D^2}{4} = 1,20 \times 3 \times \frac{\pi \times 9^2}{4} = 229 \text{ kg/s}$$

si ha

$$P_F = Q_m \frac{V_1^2}{2} = 229 \times \frac{3^2}{2} = 1,03 \text{ kW}$$

e

$$\eta_{TA} = \frac{P_E}{P_F} = \frac{0,3}{1,03} = 0,29$$

La 6.25, applicata al volume di controllo delimitato dalle traiettorie che lambiscono i punti di estremità della pala e dalle sezioni trasversali 1 e 2, tenendo presente che la pressione relativa sulla superficie di controllo è ovunque nulla e che il peso dell'aria è trascurabile, diviene

$$\mathbf{F}_R = Q_m(\beta_2 \mathbf{V}_2 - \beta_1 \mathbf{V}_1)$$

essendo \mathbf{F}_R la forza di reazione della turbina. La spinta \mathbf{S} che l'aria esercita sul corpo della turbina è uguale e contraria alla forza di reazione, per cui

$$\mathbf{S} = -\mathbf{F}_R = Q_m(\beta_1 \mathbf{V}_1 - \beta_2 \mathbf{V}_2)$$

Nella sezione 2, essendo per ipotesi trascurabili le perdite di carico tra le sezioni 1 e 2, la corrente possiede solo quella parte dell'energia cinetica di monte che non viene ceduta alla turbina, cioè l'aliquota residua $1 - \eta_{TA}$, per cui

$$\frac{V_2^2}{2} = (1 - \eta_{TA}) \frac{V_1^2}{2}$$

e, quindi,

$$V_2 = V_1 \sqrt{1 - \eta_{TA}} = 3 \times \sqrt{1 - 0,29} = 2,53 \text{ m/s}$$

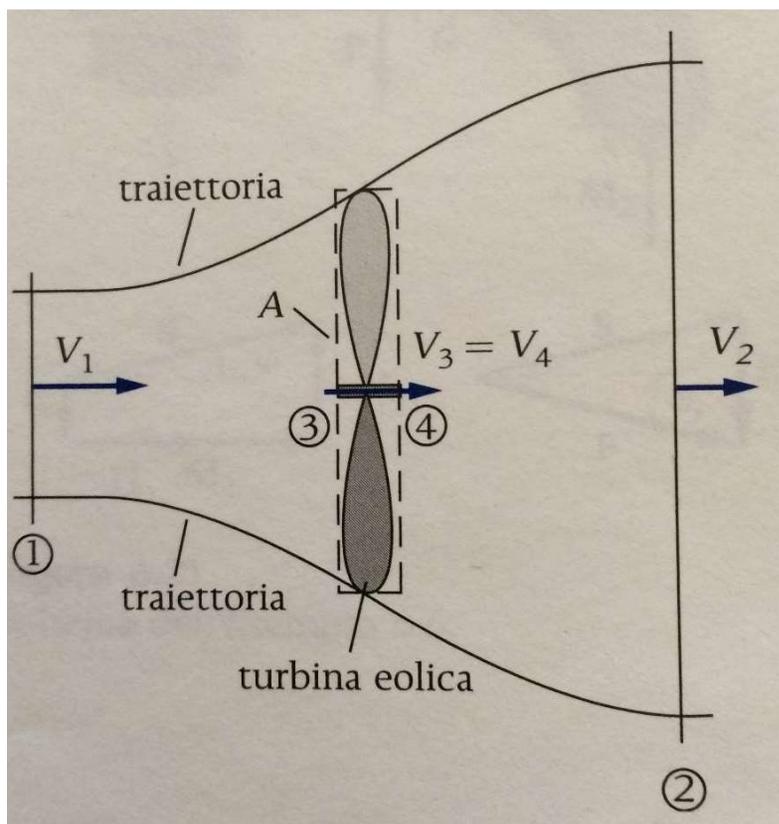
La componente della spinta nella direzione orizzontale, coincidente con la direzione del moto, essendo $\beta_2 = \beta_1 = 1$, risulta

$$S_o = Q_m(V_1 - V_2) = 229 \times (3 - 2,53) = 108 \text{ N}$$

(c) La potenza è proporzionale a V^3 , poiché la portata è proporzionale a V e l'energia cinetica a V^2 . Quindi, se la velocità del vento raddoppia, la potenza generata aumenta di un fattore $2^3 = 8$, per cui $P_E = 0,3 \times 8 = 2,4 \text{ kW}$.

La spinta è invece proporzionale a V^2 . Quindi, se la velocità del vento raddoppia, la forza aumenta di un fattore $2^2 = 4$, per cui $S_o = 108 \times 4 = 432 \text{ N}$.

Discussione Per un'analisi più approfondita del funzionamento della turbina si consideri il volume di controllo delimitato (Figura 6.20) dalle traiettorie che lambiscono i punti estremi della pala e dalle sezioni trasversali 1 e 2 sufficientemente lontane dalla turbina in



modo che $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$. Come già notato, la 6.25, applicata a tale volume di controllo e proiettata nella direzione del moto, fornisce

$$F_R = Q_m(\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1)$$

Invece, per il volume di controllo compreso tra le sezioni 3 e 4 subito a monte e subito a valle della turbina, essendo $A_3 = A_4 = A$ e $V_3 = V_4$, la 6.25, proiettata nella direzione del moto, diviene

$$F_R + p_3 A - p_4 A = 0$$

da cui

$$F_R = A(p_4 - p_3)$$

Eguagliando con la precedente espressione di F_R e ponendo $\beta_2 = \beta_1 = 1$, si ha

$$Q_m(V_2 - V_1) = A(p_4 - p_3)$$

da cui, essendo $Q_m = \rho A V_3$

$$V_3 = \frac{p_3 - p_4}{\rho(V_1 - V_2)}$$

Per l'equazione di Bernoulli, applicata tra le sezioni 1 e 3, si ha

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g}$$

Analogamente, tra le sezioni 4 e 2, si ha

$$z_4 + \frac{p_4}{\rho g} + \frac{V_4^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

e sommando le due equazioni, essendo $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$ e $p_1 = p_2 = p_{atm}$,

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_4}{\rho g} + \frac{V_4^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g}$$

Essendo anche $V_3 = V_4$, riordinando si ottiene

$$\frac{p_3 - p_4}{\rho} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2}$$

e, sostituendo, infine, nell'espressione di V_3 ,

$$V_3 = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2(V_1 - V_2)} = \frac{(V_1 + V_2)(V_1 - V_2)}{2(V_1 - V_2)} = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

per la quale la velocità media di un fluido attraverso una turbina eolica è pari alla media delle velocità a monte e a valle di essa.

Tale relazione fornisce un legame fra le velocità nelle sezioni 1 e 2. Infatti, ponendo $V_3 = V_1(1 - a)$, con $a < 1$ perché $V_3 < V_1$, e sostituendo nell'espressione di V_3 , si ottiene $V_2 = V_1(1 - 2a)$, relazione che consente di esprimere la potenza della turbina in funzione della velocità nella sezione 1 e del parametro a . La potenza della turbina, se le perdite sono trascurabili, è pari alla differenza tra le potenze cinetiche nelle sezioni 1 e 2, per cui

$$P_T = Q_m \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = \rho A V_1 (1 - a) \frac{V_1^2 - V_1^2 (1 - 2a)^2}{2} = 2\rho A V_1^3 a (1 - a)^2$$

Dividendo tale espressione per la potenza massima disponibile P_d , cioè quella che si avrebbe se l'aria attraversasse la turbina con velocità V_1 cedendole tutta la sua energia cinetica, si ottiene il rendimento della turbina in funzione di a

$$\eta_T = \frac{P_T}{P_d} = \frac{2\rho A V_1^3 a (1 - a)^2}{(\rho A V_1) V_1^2 / 2} = 4a(1 - a)^2$$

Derivando ed eguagliando a zero si ottiene $a = 1/3$ che è, dunque, il valore di a per cui si ha il massimo rendimento. Per tale valore di a si ha

$$\eta_T = 4 \times 1/3 \times (1 - 1/3)^2 = 16/27 = 0,593$$

che è il limite superiore del rendimento di una turbina eolica detto **limite di Beltz**. Il rendimento effettivo è circa la metà di tale valore.

ESEMPIO 6.6 Spinta su una flangia

Da un rubinetto flangiato, parzialmente chiuso, di diametro $D = 2$ cm, fuoriesce, in regime permanente, una portata d'acqua $Q = 1,5$ l/s (Figura 6.21). La pressione relativa nella sezione iniziale del rubinetto è $p_1 = 80$ kPa. Il rubinetto ha peso $P = 1,5$ kgf. Determinare la forza \mathbf{F} che si scarica sulla flangia.

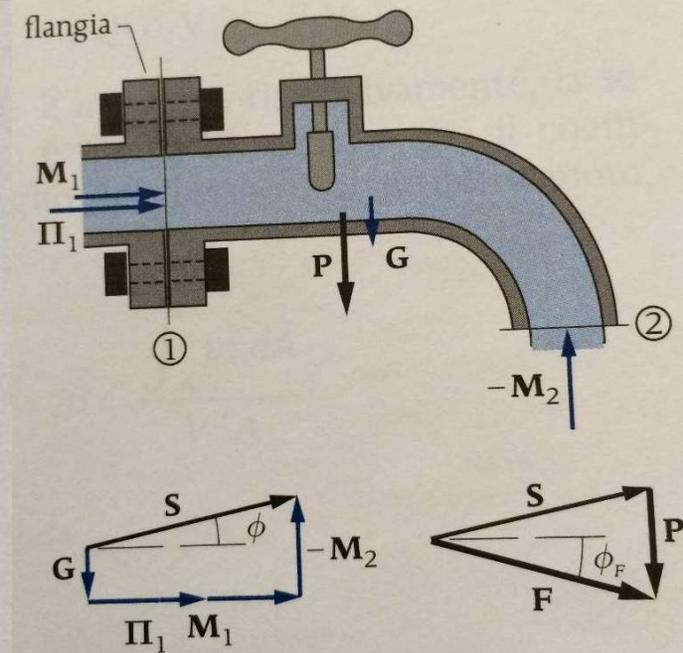
Ipotesi 1 Il moto è permanente e il fluido incomprimibile. 2 Si assume $\beta = 1$.

Proprietà La densità dell'acqua è $\rho = 1000$ kg/m³.

Analisi La 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra la sezione iniziale del rubinetto 1 e la sezione di sbocco 2, tenendo presente che il termine $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e che nella sezione di sbocco la pressione relativa è nulla, diviene

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_0 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

avendo indicato con $\mathbf{\Pi}_0$ la risultante delle forze di superficie che le pareti del rubinetto esercitano sul fluido. La spinta dinamica \mathbf{S}



che il liquido esercita sul rubinetto è uguale e contraria a quella che il rubinetto esercita sul liquido. Pertanto, si ha

$$\mathbf{S} = -\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Proiettando sull'orizzontale e sulla verticale, si ha

$$S_x = \Pi_1 + M_1 = p_1 A_1 + \beta \rho Q V_1$$

$$S_z = -G + M_2 = -\rho g W + \beta \rho Q V_2$$

L'area A della sezione trasversale del rubinetto è

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times 0,02^2}{4} = 0,000314 \text{ m}^2$$

per cui la velocità risulta

$$V_1 = V_2 = \frac{Q}{A} = \frac{0,0015}{0,000314} = 4,78 \text{ m/s}$$

Esprimendo il volume d'acqua all'interno del rubinetto come prodotto dell'area della sezione per una lunghezza L pari a circa 5 volte il diametro, per cui

$$W = LA \cong 5DA = 5 \times 0,02 \times 0,000314 = 0,0000314 \text{ m}^3$$

si ha

$$V_1 = V_2 = \frac{Q}{A} = \frac{0,0015}{0,000314} = 4,78 \text{ m/s}$$

Esprimendo il volume d'acqua all'interno del rubinetto come prodotto dell'area della sezione per una lunghezza L pari a circa 5 volte il diametro, per cui

$$W = LA \cong 5DA = 5 \times 0,02 \times 0,000314 = 0,0000314 \text{ m}^3$$

si ha

$$\begin{aligned} S_x &= p_1 A_1 + \beta \rho Q V_1 = \\ &= 80\,000 \times 0,000314 + 1000 \times 0,0015 \times 4,78 = \\ &= 25,1 + 7,17 = 32,3 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_z &= -\rho g W + \beta \rho Q V_2 = \\ &= -1000 \times 9,81 \times 0,0000314 + 1000 \times 0,0015 \times 4,78 = \\ &= -0,308 + 7,17 = 6,86 \text{ N} \end{aligned}$$

La spinta risultante è, pertanto, diretta verso destra e verso l'alto e forma con l'orizzontale un angolo

$$\phi = \arctan \frac{S_z}{S_x} = \arctan \frac{6,86}{32,3} = 12,0^\circ$$

La forza che si scarica sulla flangia è $\mathbf{F} = \mathbf{S} + \mathbf{P}$ e ha componente orizzontale $F_x = S_x = 32,3 \text{ N}$ e componente verticale

$$F_z = S_z - P = 6,86 - 1,5 \times 9,81 = 6,86 - 14,7 = -7,84 \text{ N}$$

Il vettore \mathbf{F} è, pertanto, diretto verso destra e verso il basso e forma con l'orizzontale un angolo

$$\phi_F = \arctan \frac{F_z}{F_x} = \arctan \frac{7,84}{32,3} = 13,6^\circ$$