



# Analisi dimensionale e modelli

- ⇒ Modelli matematici e fisici
- ⇒ Teorema II
- ⇒ Similitudine completa e incompleta

**N.B.: Questo indice NON è esaustivo e NON sostituisce il libro di testo**

**Alcune immagini sono prese dal libro di testo (Meccanica dei Fluidi, Y.A.Cengel e J.M. Cimbala, Ed. It G. Cozzo e C. Santoro) per scopi didattici**

# Dimensioni e unità di misura

Dimensione: misura di un'unità fisica

Unità di misura: valore numerico associato ad una dimensione

## Dimensioni fondamentali

| Dimensione                | Simbolo  | Unità SI    | Simbolo |
|---------------------------|----------|-------------|---------|
| lunghezza                 | L        | metro       | m       |
| massa                     | M        | chilogrammo | kg      |
| tempo, durata             | T        | secondo     | s       |
| corrente elettrica        | I        | ampère      | A       |
| temperatura termodinamica | $\Theta$ | kelvin      | K       |
| quantità di materia       | N        | mole        | mol     |
| intensità luminosa        | J        | candela     | cd      |

← fluidodinamica

← Termo-  
fluidodinamica

Dimensioni derivate: ottenute da combinazioni di dimensioni fondamentali

$$[\text{forza}] = \left[ \text{massa} \times \frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}^2} \right] = [\text{MLT}^{-2}]$$

# Omogeneità dimensionale

In un'equazione che esprime una legge fisica tutti gli addendi devono avere la medesima dimensione

Esempio: nel trinomio di Bernoulli i tre termini che rappresentano forme di energia per unità di peso sono espresse in metri

Spesso è opportuno rendere le equazioni adimensionali

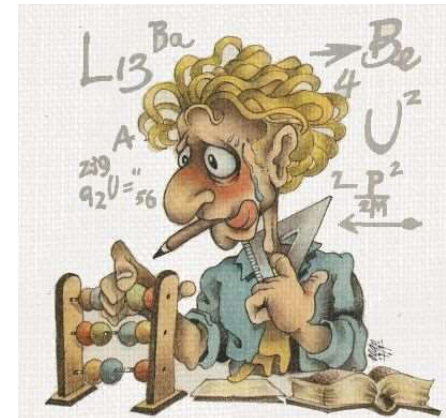
- Le variabili diventano adimensionali
- Le costanti (per esempio la viscosità) diventano numeri puri

Un fenomeno fisico può essere rappresentato attraverso:

Un modello matematico



Un modello fisico



# Modello matematico adimensionale

---

Importanza: identificare l'importanza relativa di alcuni termini rispetto ad altri

Esempio: importanza relativa di termini in fluidodinamica:

- Quanto è importante la viscosità rispetto all'inerzia?
- Quanto è importante l'inerzia rispetto alla rotazione terrestre?
- Quanto è importante la tensione superficiale rispetto all'inerzia?
- Quanto è importante il termine gravitazionale rispetto all'inerzia?
- .....

Come faccio?

- 1) Per il fenomeno che sto studiando individuo le **dimensioni scala** **significative** del problema (per esempio la fisica dell'atmosfera sulla scala temporale dei giorni si chiama meteorologia, sulla scala temporale degli anni, si chiama clima)
- 2) Combino queste dimensioni per rendere adimensionali le equazioni che governano il fenomeno fisico
- 3) Determino l'ordine di grandezza di ogni termine per capire quanto è importante nel problema che sto studiando

# Modello matematico adimensionale: esempio

---

Equazione che governa il moto di un oggetto lanciato verso l'alto, con posizione iniziale  $z_0$  e velocità iniziale  $v_0$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g$$

La soluzione assume la forma:

$$z = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

L'equazione contiene:

Variabili dimensionali ( $z, t$ )

Numeri puri ( $1/2$ )

Costanti dimensionali ( $g, z_0, v_0$ )

Due grandezze significative per il problema sono:

Quota iniziale  $z_0$

Velocità iniziale  $v_0$

Introduciamo le seguenti variabili adimensionali, costruite con le dimensioni scala del problema  $z_0$  e  $v_0$

$$z^* = \frac{z}{z_0} \quad t^* = \frac{v_0 t}{z_0}$$

L'equazione viene riscritta introducendo le variabili adimensionali:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 z_0 z^*}{d(z_0 t^* / v_0)^2} = \frac{v_0^2}{z_0} \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = -g$$

e si ottiene un'equazione adimensionale

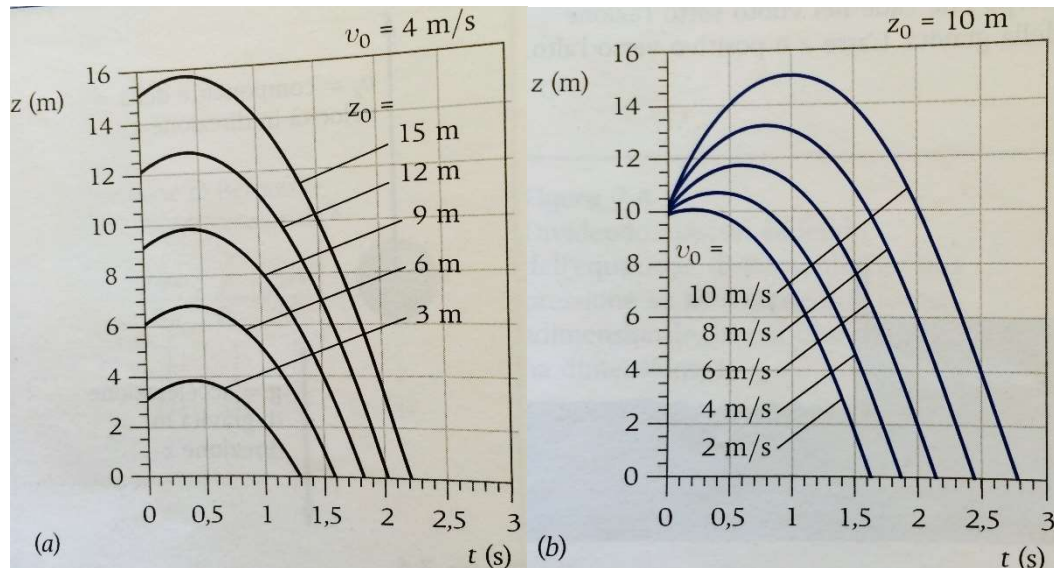
$$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = -\frac{1}{Fr^2} \quad \text{con} \quad Fr = \frac{v_0}{\sqrt{gz_0}}$$

Dove  $Fr$ , numero di Froude è un parametro adimensionale che esprime il rapporto tra la velocità iniziale e una grandezza proporzionale alla velocità di caduta dei gravi.

$$z^* = 1 + t^* - \frac{1}{2Fr^2} t^{*2}$$

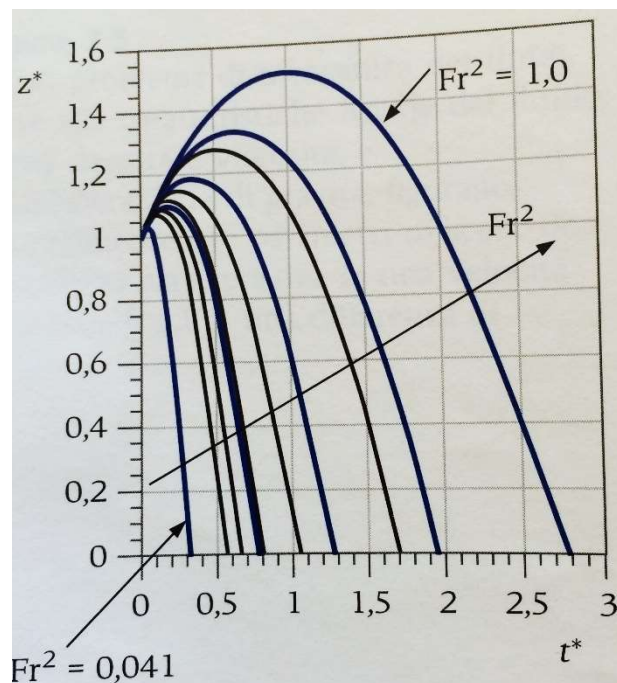
**La soluzione è espressa in termini adimensionali , mediante una parabola che varia con il parametro adimensionale  $Fr$**

# Modello adimensionale, vantaggi:



Lavorando con variabili dimensionali otteniamo una coppia di grafici per ogni coppia di valori  $z_0$  e  $v_0$

Difficile capire il peso relativo delle dimensioni scala del fenomeno



In forma adimensionale otteniamo un unico grafico con curve al variare di  $Fr$

Facile dare interpretazione fisica: Al crescere dell'importanza dell'inerzia sulla gravità aumenta l'altezza raggiunta per un assegnata altezza iniziale

L'analisi di  $Fr$  mostra che l'altezza finale non varia se raddoppiamo la velocità iniziale o aumentiamo l'altezza iniziale di un fattore 4



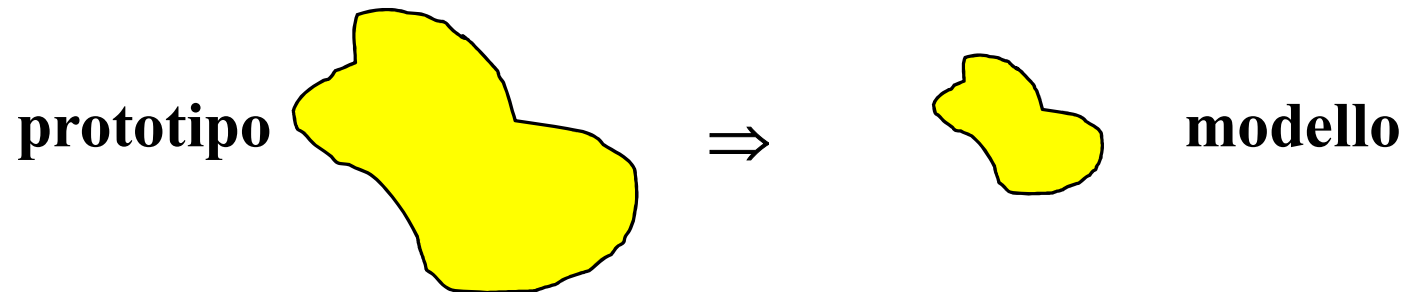
# Modelli Fisici

---

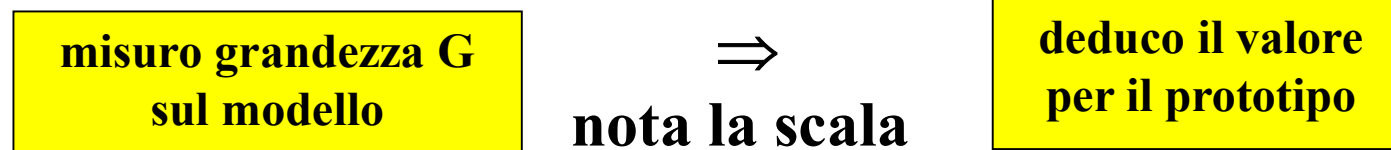
Può accadere che non si conoscano le equazioni matematiche che governano un fenomeno fisico, oppure che la loro risoluzione sia troppo complessa

Si ricorre allora al **modello fisico**

Un **modello fisico** è una **rappresentazione di un sistema fisico (prototipo)**.  
Il modello può essere utilizzato per **predire il comportamento del sistema in relazione ad alcune sue caratteristiche**.



Idea:





# Similitudine

---

## Similitudine geometrica:

Un modello è in similitudine geometrica rispetto ad un prototipo se le sue dimensioni geometriche sono  $\lambda_G$  volte quelle del prototipo:

$$l_{x_i,m} = \lambda_G l_{x_i,p}$$

Generalmente  $\lambda_G < 1$  (i.e. 1:20; 1:100)

## Similitudine cinematica:

In qualunque punto del campo di moto del modello le velocità sono  $\lambda_C$  volte quelle del prototipo nei punti corrispondenti

$$v_{x_i,m} = \lambda_C v_{x_i,p} \quad \text{con } \lambda_C > = < 1$$

**Similitudine cinematica possibile se esiste quella geometrica**

# Similitudine (2)

---

## Similitudine dinamica:

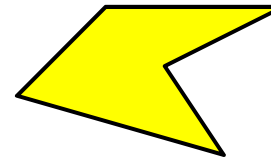
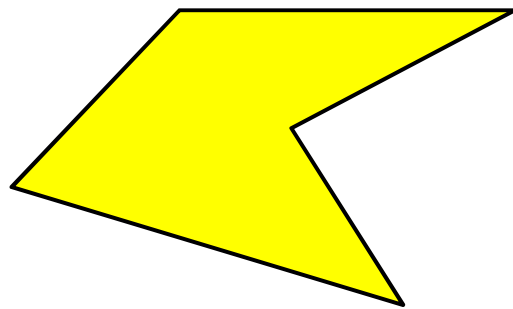
Un modello è in similitudine dinamica rispetto ad un prototipo se le sue forze sono in un rapporto costante  $\lambda_D$  volte quelle del prototipo:

$$F_m = \lambda_D F_p \quad \text{con } \lambda_D > = < 1$$

*Condizione necessaria ma non sufficiente per la similitudine dinamica è che per il modello e il prototipo esistano condizioni di similitudine geometrica e cinematica*

# SIMILITUDINE GEOMETRICA

---

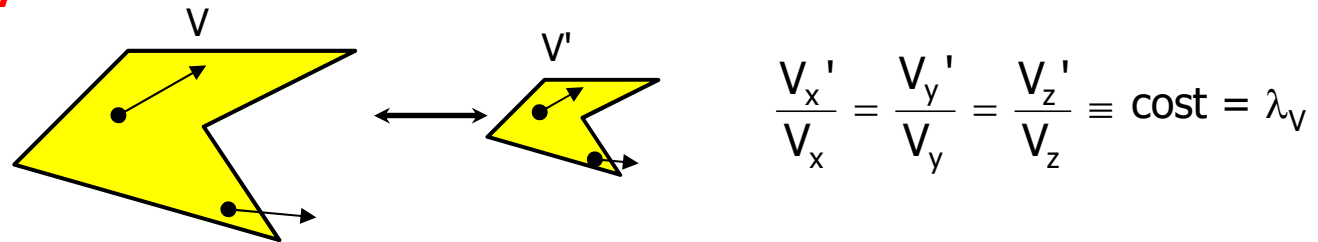


L'apice si  
riferisce al  
modello

$$\frac{L'}{L} \equiv \text{cost} = \lambda_L \text{ (scala delle lunghezze)} \quad \frac{A'}{A} \equiv \text{cost} = \lambda_A = \lambda_L^2$$

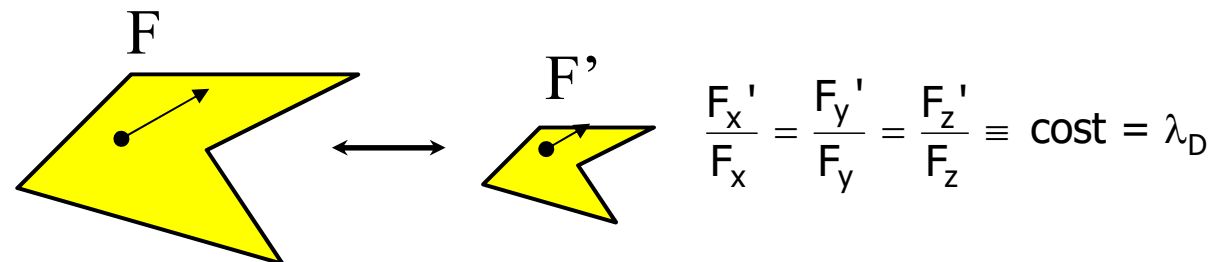
$$\frac{W'}{W} \equiv \text{cost} = \lambda_W = \lambda_L^3 \quad \frac{\alpha'}{\alpha} \equiv \text{cost} = \lambda_\alpha = 1 \quad (\text{Parità di forma})$$

### *Similitudine cinematica*



Le velocità in ogni coppia di punti omologhi sono in rapporto costante

### *Similitudine dinamica*



Le forze in ogni coppia di punti omologhi sono in rapporto costante

# Analisi dimensionale

---

Supponiamo che un fenomeno fisico sia esprimibile attraverso la relazione seguente, dove ogni  $\Pi$  rappresenta un parametro adimensionale

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_N)$$

Si ha similitudine completa se per il modello e per il prototipo si ha l'eguaglianza di tutti i gruppi adimensionali:

$$\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p} \dots \Pi_{N,m} = \Pi_{N,p}$$

Se ciò accade allora:

$$\Pi_{1,m} = \Pi_{1,p}$$

## ANALISI DIMENSIONALE (Teorema $\Pi$ )

Se una grandezza fisica  $x_1$  è legata a  $(n-1)$  grandezze fisiche secondo la seguente:

$$x_1 = f(x_2, x_3, \dots, x_N)$$

Si può scrivere

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) = 0$$

Se  $J$  sono le dimensioni fondamentali che esprimono le grandezze  $x_i$ , allora si possono introdurre  $N-J$  parametri adimensionali tali che:

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{N-J}) = 0$$

I parametri  $\Pi$  contengono  $J+1$  variabili

## (Teorema $\Pi$ )- applicazione

- 1) Elencare il numero di variabili dimensionali indipendenti che controllano il fenomeno fisico ( $N$ ).
- 2) Elencare il numero  $J$  di dimensioni fondamentali
- 3) Calcolare il numero di gruppi adimensionali ( $N-J$ )
- 4) Scegliere le  $J$  variabili ripetute che saranno usate per costruire i gruppi adimensionali
- 5) Calcolare gli  $N-J$  gruppi adimensionali
- 6) Scrivere la relazione funzionale

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_N)$$



## (Teorema $\Pi$ )- esempio

Determinare la legge che regola la caduta di una pallina nel vuoto (esempio già visto con modello matematico)

- 1) La legge è:  $z = f(t, z_0, v_0, g)$
- 2) Elenca le dimensioni fondamentali:  $J=2$  (spazio  $L$ , tempo  $t$ )
- 3) Calcolare il numero di gruppi adimensionali  $(N-J)=3$
- 4) Scegliere le  $J$  variabili ripetute che saranno usate per costruire i gruppi adimensionali:  $z_0$  e  $v_0$  (la scelta è cruciale per arrivare ad una forma utilizzabile della legge fisica)
- 5) Calcolare gli  $N-J$  gruppi adimensionali
- 6) Scrivere la relazione funzionale

Punto 4: come scegliamo le  $J$  variabili ripetute?

Tipicamente vengono scelte:

Densità (contiene la massa)

Velocità (contiene il tempo)

Lunghezza (spazio)

- escludere la variabile dipendente
- escludere variabili che, combinate fra loro, possano formare gruppi adimensionali
- fare in modo che le variabili prescelte contengano tutte le dimensioni fondamentali presenti nel problema.
- escludere le variabili adimensionali
- escludere variabili aventi le stesse dimensioni fondamentali
- preferire le costanti alle variabili
- preferire le variabili più comuni
- preferire le variabili semplici, aventi una o due dimensioni fondamentali

Punto 5: come costruiamo i gruppi adimensionali?

Cominciamo con il gruppo che coinvolge z:

$$\Pi_1 = z^1 z_0^\alpha v_0^\beta \rightarrow L^0 T^0 = L^1 L^\alpha L^\beta T^{-\beta}$$

$$1 + \alpha + \beta = 0 \quad , \quad -\beta = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = -1$$

$$\Pi_1 = z / z_0$$

Proseguiamo con il gruppo che coinvolge t e otteniamo:

$$\Pi_2 = tv_0 / z_0$$

Poi terminiamo con il gruppo che coinvolge g:

$$\Pi_3 = gz_0 / v_0^2$$

La legge sarà:


$$\frac{z}{z_0} = f\left(\frac{tv_0}{z_0}, \frac{v_0}{\sqrt{gz_0}}\right)$$

Da notare che si determina solamente la funzionalità non la legge esatta! (serve l'analisi sperimentale)

## (Teorema $\Pi$ )- Utilizzo in campagne sperimentali

Consideriamo un problema caratterizzato da 5 parametri dimensionali.

$$x_1 = f(x_2, x_3, x_4, x_5)$$

Per trovare la relazione supponiamo di eseguire 5 esperimenti per la variazione di ogni variabile.

Abbiamo bisogno di  $5^4=625$  differenti esperimenti

Se abbiamo 3 dimensioni fondamentali allora il Teorema  $\Pi$  ci dice che:

$$\Pi_1 = g(\Pi_2)$$

Abbiamo bisogno di sole 5 prove sperimentali!

Inoltre il gruppo  $\Pi_2$  può intrinsecamente contenere variazioni di variabili difficilmente ottenibili in un esperimento fisico (Fr dell'esempio precedente può riferirsi a differenti valori di  $g$ !)

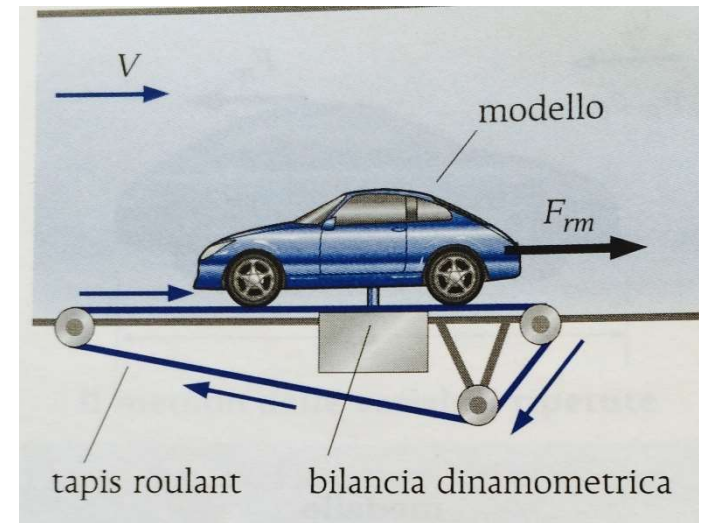


### ESEMPIO 7.4 Similitudine tra modello e prototipo di un'automobile

Si vuole studiare la resistenza al moto di una nuova automobile sportiva alla velocità  $V = 80,0$  km/h in aria a  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ , utilizzando un modello in scala 1:5 in una galleria del vento in cui l'aria è alla temperatura di  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Determinare la velocità  $V_a$  dell'aria nella galleria del vento perché vi sia similitudine tra modello e prototipo.

**Ipotesi** **1** La comprimibilità dell'aria è trascurabile. **2** Il modello e il prototipo sono geometricamente simili. **3** Per soddisfare la similitudine cinematica ovunque e, in particolare, sotto l'automobile, il modello poggia su un tapis roulant (Figura 7.13).

**Proprietà** Alla pressione atmosferica la densità e la viscosità dell'aria alla temperatura  $T = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$  sono, rispettivamente:  $\rho = 1,184\text{ kg/m}^3$  e  $\mu = 1,849 \times 10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Analogamente, per  $T = 5\text{ }^{\circ}\text{C}$  si ha:  $\rho = 1,269\text{ kg/m}^3$  e  $\mu = 1,754 \times 10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ .



Applicando il  
teorema  $\Pi$

$$F = f(\rho, \mu, V, l)$$

troviamo:

$$\frac{F}{\rho V^2 L^2} = g\left(\frac{\rho V l}{\mu}\right)$$

$$C_r = f(\text{Re})$$

$$C_r = \frac{F}{\rho V^2 L^2} \quad ; \quad \text{Re} = \frac{\rho V l}{\mu}$$

Coefficiente  
di resistenza

numero di  
Reynolds

**Analisi** Per la similitudine deve essere  $\Pi_{2m} = \Pi_{2p}$ , dove  $\Pi_2$  per la 7.13 è il numero di Reynolds. Pertanto, deve essere

$$\Pi_{2m} = \text{Re}_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \Pi_{2p} = \text{Re}_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

da cui

$$V_a = V_m = V_p \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{L_p}{L_m} \frac{\mu_m}{\mu_p} = 80 \times \frac{1,184}{1,269} \times 5 \times \frac{1,754}{1,849} = 354,0 \text{ km/h}$$

**Discussione** Il valore della velocità nel modello risulta piuttosto elevato (circa 98 m/s). Pertanto, è opportuno verificare se l'approssimazione di fluido incomprimibile è accettabile. A tale scopo, bisogna calcolare il numero di Mach del modello  $\text{Ma}_m = V_m/c_m$ , pari al rapporto tra la velocità del fluido e la velocità del suono nell'aria. Nelle condizioni in esame è  $c_m = 334 \text{ m/s}$ , per cui  $\text{Ma}_m = 98/334 = 0,29 < 0,3$ . L'ipotesi di incomprimibilità dell'aria è, quindi, accettabile.



## ESEMPIO 7.5 Calcolo della resistenza aerodinamica di un'automobile

Da diverse prove effettuate nella galleria del vento sul modello dell'Esempio 7.4 con aria a velocità  $V_a = 354$  km/h, si ricava che la resistenza aerodinamica, misurata con una **bilancia dinamometrica** (Figura 7.13), ha un valore medio  $F_{rm} = 10$  kgf. Calcolare la resistenza aerodinamica  $F_{rp}$  sul prototipo a 80 km/h in aria a 25 °C.

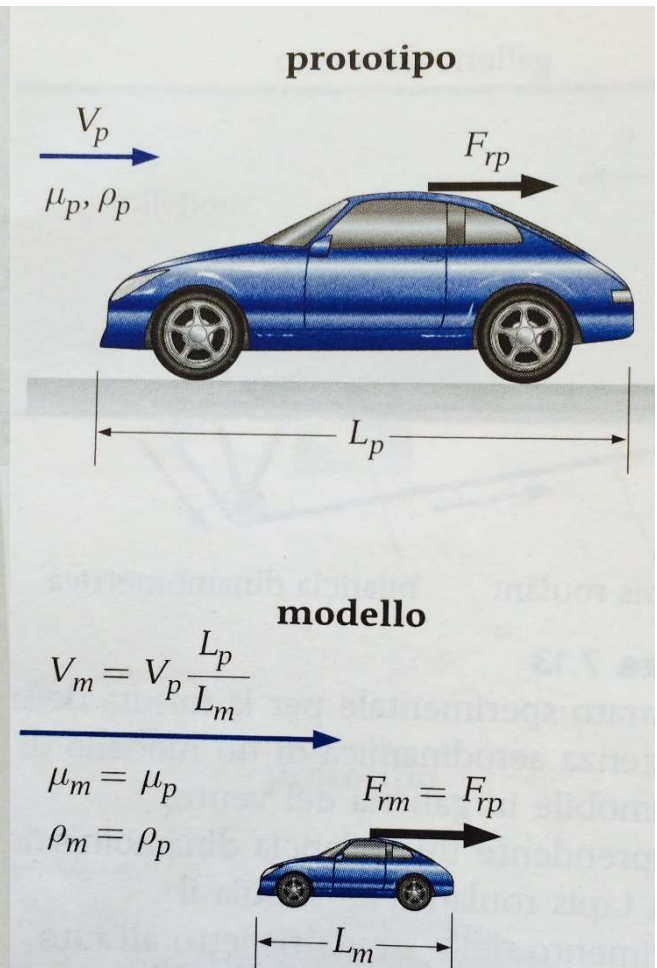
**Analisi** Per la condizione di similitudine, essendo  $\Pi_{2m} = \Pi_{2p}$ , deve essere anche  $\Pi_{1m} = \Pi_{1p}$ . Quindi, per la 7.11

$$\Pi_{1m} = \frac{F_{rm}}{\rho_m V_m^2 L_m^2} = \Pi_{1p} = \frac{F_{rp}}{\rho_p V_p^2 L_p^2}$$

da cui

$$F_{rp} = F_{rm} \frac{\rho_p V_p^2 L_p^2}{\rho_m V_m^2 L_m^2} = 10,0 \times \frac{1,184}{1,269} \times \left( \frac{80}{354} \right)^2 \times 5^2 = 11,9 \text{ kgf}$$

**Discussione** Poiché sia la velocità sia la lunghezza compaiono al quadrato nell'espressione di  $\Pi_1$ , l'alta velocità nella galleria del vento bilancia all'incirca la dimensione ridotta del modello per cui la resistenza del modello è quasi uguale a quella del prototipo. In particolare, se la densità e la viscosità dell'aria nel modello e nel prototipo fossero *identiche*, per l'uguaglianza dei numeri di Reynolds sarebbe  $V_m/V_p = L_p/L_m = 5$ , per cui le due forze sarebbero anch'esse uguali (Figura 7.14).



### ESEMPIO 7.7 Sforzo tangenziale alla parete di una tubazione

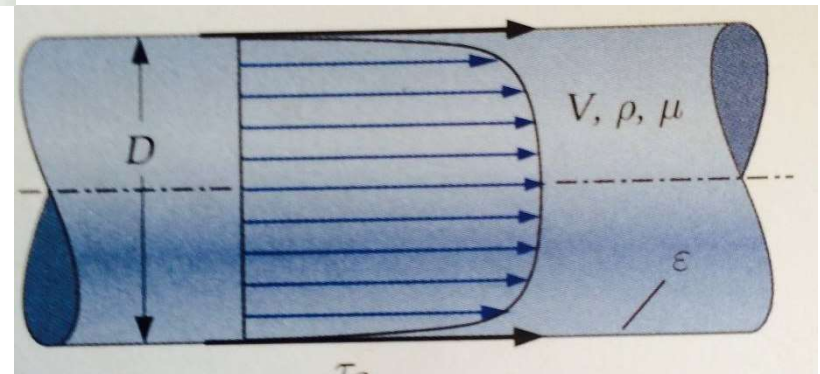
Nel moto di un fluido incompressibile di densità  $\rho$  e viscosità  $\mu$  in una tubazione circolare di diametro  $D$  e scabrezza rappresentata da una lunghezza  $\varepsilon$ , per la continuità, la velocità media  $V$  si mantiene costante. Se la tubazione è sufficientemente lunga per cui il moto è **completamente sviluppato**, anche il profilo di velocità in una sezione trasversale (Figura 7.21) e lo sforzo tangenziale alla parete  $\tau_0$  si mantengono costanti lungo la tubazione. La resistenza al moto della parete comporta una diminuzione della quota piezometrica lungo la tubazione o, se questa è orizzontale, solo della pressione. Stabilire una relazione adimensionale tra  $\tau_0$  e gli altri parametri del problema.

**Ipotesi** 1 Il moto è completamente sviluppato. 2 Il fluido è incompressibile.

**Analisi** Utilizzando il metodo delle variabili ripetute, si ricavano i parametri adimensionali.

**Fase 1** In questo problema compaiono sei parametri: lo sforzo tangenziale alla parete  $\tau_0$ , la velocità media  $V$ , il diametro  $D$ , la scabrezza  $\varepsilon$ , la densità  $\rho$  e la viscosità  $\mu$ . Quindi,  $n = 6$  e

$$\tau_0 = f(V, D, \varepsilon, \rho, \mu)$$





**Fase 2** Le dimensioni fondamentali dei parametri sono

$$\begin{aligned} [\tau_0] &= [ML^{-1}T^{-2}] & [V] &= [LT^{-1}] & [D] &= [L] \\ [\varepsilon] &= [L] & [\rho] &= [ML^{-3}] & [\mu] &= [ML^{-1}T^{-1}] \end{aligned}$$

**Fase 3** Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T), per cui, in prima istanza, si assume  $j = 3$ . Se questo valore è corretto, i parametri  $\Pi$  sono  $k = n - j = 6 - 3 = 3$ .

**Fase 4** Poiché  $j = 3$  bisogna scegliere tre parametri ripetuti. Si può escludere la variabile dipendente  $\tau_0$ . Non si possono scegliere  $D$  e  $\varepsilon$  insieme, perché hanno le stesse dimensioni. Conviene quindi scegliere  $V$ ,  $D$  e  $\rho$ .

**Fase 5** Si deriva il  $\Pi$  dipendente

$$\begin{aligned} [\Pi_1] &= [M^0L^0T^0] = [\tau_0 V^{a_1} D^{b_1} \rho^{c_1}] = \\ &= [ML^{-1}T^{-2} \cdot (LT^{-1})^{a_1} \cdot L^{b_1} \cdot (ML^{-3})^{c_1}] \end{aligned}$$

Imponendo che  $\Pi_1$  sia adimensionale si ottiene:

$$[M^0] = [M \cdot M^{c_1}] \quad 0 = 1 + c_1 \quad c_1 = -1$$

$$[T^0] = [T^{-2} \cdot T^{-a_1}] \quad 0 = -2 - a_1 \quad a_1 = -2$$

$$[L^0] = [L^{-1} \cdot L^{a_1} \cdot L^{b_1} \cdot L^{-3c_1}] \quad 0 = -1 + a_1 + b_1 - 3c_1 \quad b_1 = 0$$

Il gruppo  $\Pi_1$  risulta quindi

$$\Pi_1 = \tau_0 V^{-2} D^0 \rho^{-1} = \frac{\tau_0}{\rho V^2}$$

Simile a  $\Pi_1$  è l'**indice di resistenza**  $\lambda$  della formula di Darcy-Weisbach (vedi Capitolo 8), che differisce da  $\Pi_1$  per un fattore 8 al numeratore. Pertanto, conviene trasformare  $\Pi_1$  in

$$\Pi_{1'} = \frac{8\tau_0}{\rho V^2} = \lambda$$

Il primo  $\Pi$  indipendente è

$$\begin{aligned} [\Pi_2] &= [M^0 L^0 T^0] = [\mu V^{a_2} D^{b_2} \rho^{c_2}] = \\ &= [M L^{-1} T^{-1} \cdot (L T^{-1})^{a_2} \cdot L^{b_2} \cdot (M L^{-3})^{c_2}] \end{aligned}$$



da cui

$$[M^0] = [M \cdot M^{c_2}] \quad 0 = 1 + c_2 \quad c_2 = -1$$

$$[T^0] = [T^{-1} \cdot T^{-a_2}] \quad 0 = -1 - a_2 \quad a_2 = -1$$

$$[L^0] = [L^{-1} \cdot L^{a_2} \cdot L^{b_2} \cdot L^{-3c_2}] \quad 0 = -1 + a_2 + b_2 - 3c_2 \quad b_2 = -1$$

e quindi

$$\Pi_2 = \mu V^{-1} D^{-1} \rho^{-1} = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{1}{\text{Re}}$$

Per cui, invertendo,

$$\Pi_{2'} = \frac{\rho V D}{\mu} = \text{Re}$$

Analogamente, il terzo  $\Pi$  risulta

$$\begin{aligned} [\Pi_3] &= [M^0 L^0 T^0] = [\varepsilon V^{a_3} D^{b_3} \rho^{c_3}] = \\ &= [L \cdot (L T^{-1})^{a_3} \cdot L^{b_3} \cdot (M L^{-3})^{c_3}] \end{aligned}$$

da cui

$$[M^0] = [M^{c_3}] \quad 0 = c_3 \quad c_3 = 0$$

$$[T^0] = [T^{-a_3}] \quad 0 = -a_3 \quad a_3 = 0$$

$$[L^0] = [L^1 \cdot L^{a_3} \cdot L^{b_3} \cdot L^{-3c_3}] \quad 0 = 1 + a_3 + b_3 - 3c_3 \quad b_3 = -1$$

e quindi

$$\Pi_3 = \varepsilon V^0 D^{-1} \rho^0 = \frac{\varepsilon}{D}$$

parametro che prende il nome di *scabrezza relativa*.

**Fase 6** La relazione funzionale finale risulta

$$\lambda = \frac{8\tau_0}{\rho V^2} = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

**Discussione** Il risultato vale per qualunque regime di moto, purché completamente sviluppato, anche se, come si vedrà nel Capitolo 8, la scabrezza relativa  $\varepsilon/D$  fa sentire la sua influenza solo in regime turbolento. Inoltre, perché si abbia *similitudine geometrica* tra due tubazioni esse devono avere la stessa scabrezza relativa  $\varepsilon/D$ .

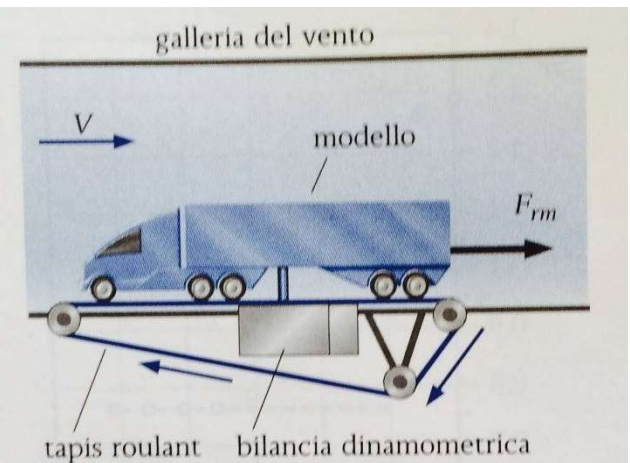


## ESEMPIO 7.8 Misure in galleria del vento su un modello di autotreno

In galleria del vento viene testato un modello in scala 1:16 di autotreno a 5 assi con motrice e rimorchio (Figura 7.24). Il modello ha lunghezza  $L_m = 0,991$  m, altezza  $h_m = 0,257$  m e larghezza  $B_m = 0,159$  m. Durante le prove, condotte per diversi valori della velocità dell'aria, il tapis roulant su cui poggia il modello viene fatto scorrere con velocità uguale alla velocità dell'aria. A ogni prova, viene misurata la forza di trascinamento  $F_{rm}$  (Tabella 7.3). Tracciare il grafico del coefficiente di resistenza  $C_r$  in funzione di  $Re$ , usando come area l'area frontale del modello e come scala di lunghezza per il calcolo di  $Re$  la lunghezza del modello, e verificare se esiste similitudine dinamica. Stimare la resistenza al moto sull'autotreno quando questo viaggia a una velocità di 95 km/h.

**Ipotesi 1** È verificata la condizione di similitudine geometrica.  
**2** La forza di trascinamento sui sostegni che vincolano il modello può essere considerata trascurabile.

**Proprietà** Sia nel modello sia nel prototipo l'aria è a pressione atmosferica e alla temperatura di 25 °C, per cui  $\rho = 1,184$  kg/m<sup>3</sup> e  $\mu = 1,849 \times 10^{-5}$  Pa · s.



**TABELLA 7.3** Resistenza aerodinamica misurata in galleria del vento sul modello di autotreno in funzione della velocità dell'aria

| $V$ (m/s) | $F_{rm}$ (N) |
|-----------|--------------|
| 20        | 12,4         |
| 25        | 19,0         |
| 30        | 22,1         |
| 35        | 29,0         |
| 40        | 34,3         |
| 45        | 39,9         |
| 50        | 47,2         |
| 55        | 55,5         |
| 60        | 66,0         |
| 65        | 77,6         |
| 70        | 89,9         |



**Analisi** Il coefficiente di resistenza del modello e il numero di Reynolds sono dati da

$$C_{rm} = \frac{F_{rm}}{\frac{1}{2} \rho_m V_m^2 A_m} \quad Re_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m}$$

Con i valori della Tabella 7.3, si ottiene:

| $V$ (m/s) | $F_{rm}$ (N) | $C_{rm}$ | $Re_m$             |
|-----------|--------------|----------|--------------------|
| 20        | 12,4         | 1,281    | $2,04 \times 10^5$ |
| 25        | 19,0         | 1,257    | $2,55 \times 10^5$ |
| 30        | 22,1         | 1,015    | $3,05 \times 10^5$ |
| 35        | 29,0         | 0,979    | $3,56 \times 10^5$ |
| 40        | 34,3         | 0,886    | $4,07 \times 10^5$ |
| 45        | 39,9         | 0,815    | $4,58 \times 10^5$ |
| 50        | 47,2         | 0,780    | $5,09 \times 10^5$ |
| 55        | 55,5         | 0,758    | $5,60 \times 10^5$ |
| 60        | 66,0         | 0,758    | $6,11 \times 10^5$ |
| 65        | 77,6         | 0,759    | $6,62 \times 10^5$ |
| 70        | 89,9         | 0,758    | $7,13 \times 10^5$ |

Il numero di Reynolds del prototipo, alla velocità di 95 km/h (26,4 m/s), è

$$Re_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p} = \frac{1,184 \times 26,4 \times 0,159 \times 16}{1,849 \times 10^{-5}} = 43,0 \times 10^5$$

cioè circa 6 volte quello del modello alla velocità massima di prova  $C_r$ . Pertanto, non essendo uguali i due numeri di Reynolds, non esiste similitudine dinamica.

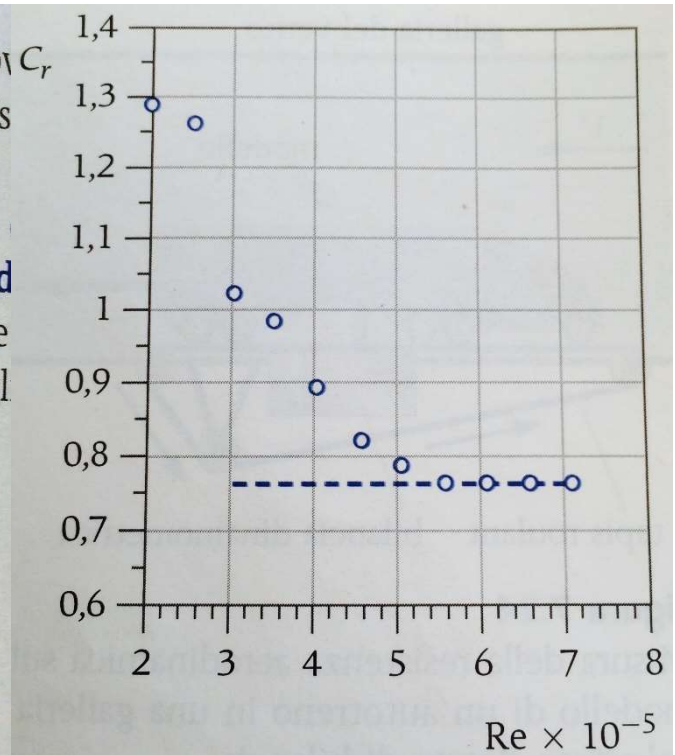
Dalla tabella sopra riportata o dal grafico di  $C_r$  in funzione di  $Re$  (Figura 7.25), emerge che, per  $Re > 5,5 \times 10^5$ ,  $C_r$  non dipende da  $Re$  e vale circa 0,76. Pertanto, tale risultato si può estrapolare a valori del numero di Reynolds maggiori del valore di soglia ( $5,5 \times 10^5$ ). La forza di trascinamento sul prototipo, essendo

$$A_p = 16^2 \times 0,159 \times 0,257 = 10,5 \text{ m}^2$$

risulta

$$F_{rp} = \frac{1}{2} C_r \rho_p V_p^2 A_p = 0,5 \times 0,76 \times 1,184 \times 26,4^2 \times 10,5 = 3300 \text{ N}$$

**Discussione** Il risultato è scritto con due cifre significative per mettere in evidenza che deriva da un'estrapolazione e che, quindi, va usato con qualche cautela.



Da notare che  $Re$  è il rapporto tra forze d'inerzia e forze viscosi.

Quando le prime sono molto maggiori delle seconde, ( $Re \rightarrow \infty$ ) allora la resistenza è solo inerziale e il  $C_r$  diventa costante con  $Re$



## ESEMPIO 7.6 Portanza su un profilo alare

Per studiare la portanza su un nuovo profilo alare (Figura 7.20), avente corda lunga  $L = 1,12$  m e area planimetrica (proiezione dell'ala su un piano orizzontale ad angolo d'incidenza  $\alpha = 0$ )  $A = 10,7$  m<sup>2</sup>, è stato costruito un modello in scala 1:10 da provare in galleria del vento. L'aereo deve volare a  $V = 52,0$  m/s in aria a temperatura  $T = 25$  °C. Determinare i valori di velocità e pressione nella galleria perché si abbia similitudine dinamica.

**Analisi** Determinati i parametri adimensionali con il metodo delle variabili ripetute, bisogna uguagliare i  $\Pi$  dipendenti del modello e del prototipo.

**Fase 1** In questo problema compaiono sette parametri: la portanza  $F_p$  sul profilo, la velocità  $V$  del fluido, la lunghezza  $L$  della corda, la densità  $\rho$  e la viscosità  $\mu$  del fluido, la velocità  $c$  del suono e l'angolo d'incidenza  $\alpha$  del profilo. Quindi,  $n = 7$  e

$$F_p = f(V, L, \rho, \mu, c, \alpha)$$

**Fase 2** Le dimensioni fondamentali dei parametri sono

$$\begin{array}{lll} [F_p] = [MLT^{-2}] & [V] = [LT^{-1}] & [L] = [L] \\ [\rho] = [ML^{-3}] & [\mu] = [ML^{-1}T^{-1}] & [c] = [LT^{-1}] \end{array}$$

L'angolo  $\alpha$  è adimensionale.

**Fase 3** Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T), per cui, in prima istanza, si assume  $j = 3$ . Se questo valore è corretto, i parametri  $\Pi$  sono  $k = n - j = 7 - 3 = 4$ .

**Fase 4** Essendo  $j = 3$ , bisogna scegliere tre parametri ripetuti. Si possono escludere la variabile dipendente  $F_p$  e l'angolo  $\alpha$ , che è già adimensionale. Non si possono scegliere  $V$  e  $c$  insieme, perché hanno le stesse dimensioni. Convienne, quindi, scegliere  $V$ ,  $L$  e  $\rho$ .

**Fase 5** Si ricava il  $\Pi$  dipendente

$$[\Pi_1] = [M^0 L^0 T^0] = [F_p V^{a_1} L^{b_1} \rho^{c_1}] = \\ = [MLT^{-2} \cdot (LT^{-1})^{a_1} \cdot L^{b_1} \cdot (ML^{-3})^{c_1}]$$

Imponendo che  $\Pi_1$  sia adimensionale si ottiene:

$$\begin{array}{lll} [M^0] = [M \cdot M^{c_1}] & 0 = 1 + c_1 & c_1 = -1 \\ [T^0] = [T^{-2} \cdot T^{-a_1}] & 0 = -2 - a_1 & a_1 = -2 \\ [L^0] = [L \cdot L^{a_1} \cdot L^{b_1} \cdot L^{-3c_1}] & 0 = 1 + a_1 + b_1 - 3c_1 & b_1 = -2 \end{array}$$

Il gruppo  $\Pi_1$  risulta quindi

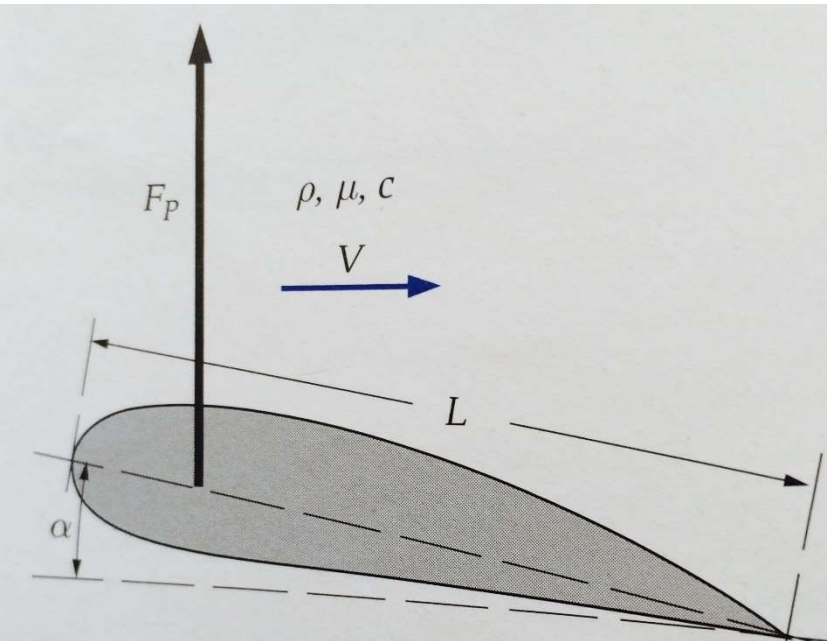
$$\Pi_1 = F_p V^{-2} L^{-2} \rho^{-1} = \frac{F_p}{\rho V^2 L^2}$$

Simile a  $\Pi_1$  è il **coefficiente di portanza**, definito in termini di area planimetrica  $A$ , invece che di quadrato della corda, e con un fattore  $1/2$  al denominatore. Pertanto, conviene trasformare  $\Pi_1$  in

$$\Pi_{1'} = \frac{F_p}{\frac{1}{2} \rho V^2 A} = C_p$$

Il primo  $\Pi$  indipendente è

$$[\Pi_2] = [M^0 L^0 T^0] = [\mu V^{a_2} L^{b_2} \rho^{c_2}] = \\ = [ML^{-1} T^{-1} \cdot (LT^{-1})^{a_2} \cdot L^{b_2} \cdot (ML^{-3})^{c_2}]$$





da cui

$$\begin{aligned} [M^0] &= [M \cdot M^{c_2}] & 0 &= 1 + c_2 & c_2 &= -1 \\ [T^0] &= [T^{-1} \cdot T^{-a_2}] & 0 &= -1 - a_2 & a_2 &= -1 \\ [L^0] &= [L^{-1} \cdot L^{a_2} \cdot L^{b_2} \cdot L^{-3c_2}] & 0 &= -1 + a_2 + b_2 - 3c_2 & b_2 &= -1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\Pi_2 = \mu V^{-1} L^{-1} \rho^{-1} = \frac{\mu}{\rho V L} = \frac{1}{\text{Re}}$$

Per cui, invertendo,

$$\Pi_{2'} = \frac{\rho V L}{\mu} = \text{Re}$$

Analogamente, il terzo  $\Pi$  risulta

$$[\Pi_3] = [M^0 L^0 T^0] = [c V^{a_3} L^{b_3} \rho^{c_3}] = [L T^{-1} \cdot (L T^{-1})^{a_3} \cdot L^{b_3} \cdot (M L^{-3})^{c_3}]$$

da cui

$$\begin{aligned} [M^0] &= [M^{c_3}] & 0 &= c_3 & c_3 &= 0 \\ [T^0] &= [T^{-1} \cdot T^{-a_3}] & 0 &= -1 - a_3 & a_3 &= -1 \\ [L^0] &= [L \cdot L^{a_3} \cdot L^{b_3} \cdot L^{-3c_3}] & 0 &= 1 + a_3 + b_3 - 3c_3 & b_3 &= 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\Pi_3 = cV^{-1}L^0\rho^0 = \frac{c}{V} = \frac{1}{\text{Ma}}$$

e, invertendo,

$$\Pi_{3'} = \frac{V}{c} = \text{Ma}$$

Infine, l'angolo d'incidenza, che è di per sé adimensionale, costituisce l'ultimo gruppo

$$\Pi_4 = \alpha$$

**Fase 6** La relazione funzionale finale risulta

$$C_p = \frac{F_p}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = f(\text{Re}, \text{Ma}, \alpha)$$

Perché si abbia similitudine dinamica, i tre parametri adimensionali dipendenti che figurano in tale relazione debbono essere uguali sia nel modello sia nel prototipo. Cioè:

$$\text{Re}_m = \text{Re}_p \quad \text{Ma}_m = \text{Ma}_p \quad \alpha_m = \alpha_p$$



Mentre è banale far coincidere gli angoli d'incidenza, non è altrettanto semplice soddisfare entrambe le prime due condizioni. Infatti, se la galleria funzionasse con aria alla stessa temperatura e alla stessa pressione del prototipo, sarebbe

$$\rho_m = \rho_p \quad \mu_m = \mu_p \quad c_m = c_p$$

da cui, per la prima condizione, essendo il modello in scala 1:10, dovrebbe essere

$$V_m = \frac{L_p}{L_m} V_p = 10V_p$$

Inoltre, essendo in aria a 25 °C la velocità del suono  $c = 346$  m/s, si avrebbe

$$\text{Ma}_m = \frac{V_m}{c_m} = \frac{10V_p}{c_m} = \frac{10V_p}{c_p} = 10 \cdot \text{Ma}_p = 10 \times \frac{52}{346} = 1,50$$

cioè il numero di Mach nel modello sarebbe maggiore di un fattore 10. Per di più, essendo maggiore di 1, il moto nel modello sarebbe supersonico. Ciò è inaccettabile, poiché in condizioni supersoniche il fenomeno cambia radicalmente. Viceversa, se si imponesse l'uguaglianza tra i numeri di Mach, il numero di Reynolds del modello sarebbe 10 volte più piccolo.

## Similitudine Incompleta:

Spesso non si riesce  
ad ottenere  
l'eguaglianza di tutti i  
gruppi adimensionali  
a causa di limitazioni  
fisiche (per esempio i  
fluidi disponibili,  
il parametro g, etc.)

Bisogna imporre  
l'uguaglianza dei  
gruppi più  
importanti

In realtà, quando risulta  $Ma_p < 0,3$ , come nel caso in esame, gli effetti della comprimibilità possono essere trascurati e, quindi, non è indispensabile avere lo stesso numero di Mach, purché risulti anche  $Ma_m < 0,3$ . In tal caso, la similitudine dinamica si limita solo alla condizione di eguaglianza dei numeri di Reynolds, per cui deve essere

$$\rho_m V_m = \frac{\mu_m}{\mu_p} \frac{L_p}{L_m} \rho_p V_p = 10 \rho_p V_p$$

Al più deve essere  $Ma_m = 0,3$ , cioè

$$V_m = 0,3c_m = 0,3 \times 346 = 104 = 2 \times 52 = 2V_p$$

e, introducendo nella precedente

$$\rho_m V_m = 10 \rho_p V_p = 5 \rho_p V_m$$

Quindi, perché siano soddisfatte ambedue le condizioni ( $Ma_m < 0,3$  e  $Re_m = Re_p$ ), deve essere

$$\rho_m = 5 \rho_p$$

Poiché, a temperatura costante, la densità aumenta linearmente con la pressione, restando invece praticamente costanti sia la viscosità sia la velocità del suono, basterà aumentare la pressione dell'aria nella galleria del vento fino a 5 volte la pressione atmosferica.

**Discussione** Come in questo esempio, spesso non è possibile realizzare una similitudine completa facendo coincidere, cioè, tutti i parametri adimensionali sia nel modello sia nel prototipo. Bisogna,

quindi, accettare dei compromessi facendo coincidere solo i  $\Pi$  più importanti. Nel caso in esame, se il numero di Mach del prototipo fosse maggiore di 0,3, per ottenere risultati più rispondenti al caso reale, sarebbe preferibile far coincidere i numeri di Mach piuttosto che i numeri di Reynolds.