Yunus A. Çengel
John M. Cimbala

per l'edizione italiana
Giuseppe Cozzo
Cinzia Santoro

Meccanica dei fluidi

Seconda edizione

Soluzione dei problemi
Capitolo 7

McGraw-Hill

Indice

ANALISI DIMENSIONALE E MODELLAZIONE

7

SOMMARIO

Una *dimensione* è una misura (priva di valore numerico) di una quantità fisica, mentre un'*unità* è un modo per assegnare un numero a quella dimensione. Le *dimensioni fondamentali* sono: lunghezza, massa, tempo, corrente elettrica, temperatura, quantità di materia e intensità luminosa. *Tutte le altre dimensioni possono essere ottenute come combinazione di queste sette dimensioni fondamentali*.

Tutte le equazioni matematiche devono essere *dimensionalmente omogenee*, cioè tutti gli addendi dell'equazione devono avere le stesse dimensioni. Questo principio fondamentale può essere applicato a un'equazione per renderla adimensionale, identificando opportuni *gruppi* o *parametri adimensionali*. L'*analisi dimensionale* consente di ridurre il numero di parametri indipendenti necessari a definire un problema. Il *metodo delle variabili ripetute* è una procedura passo-passo che aiuta a individuare i parametri adimensionali.

Quando tutti i corrispondenti gruppi adimensionali relativi a un modello e al prototipo sono uguali, si ha *similitudine dinamica* ed è possibile predire il comportamento del prototipo sulla base di prove effettuate sul modello. Tuttavia, non sempre è possibile avere l'uguaglianza tra *tutti* i gruppi. In tali casi, le prove su modello vengono effettuate in condizioni di *similitudine incompleta*, cioè facendo in modo che siano uguali i valori dei parametri più importanti ed estrapolando i risultati del modello alle condizioni del prototipo.

PROBLEMI

Dimensioni e unita, dimensioni fondamentali

7.1 Che differenza c'è tra dimensioni e unità?

Analisi Una **dimensione** è una misura (priva di valore numerico) di una quantità fisica, mentre una **unità** è un modo per assegnare un *numero* a quella dimensione.

7.2 Elencare le sette dimensioni fondamentali. Qual è la loro particolarità?

Analisi Le sette **dimensioni fondamentali** sono: lunghezza, massa, tempo, corrente elettrica, temperatura, quantità di materia e intensità luminosa. Qualunque altra dimensione può essere ottenuta come combinazione di quelle fondamentali.

7.3 Nel Sistema Internazionale le dimensioni fondamentali sono massa, lunghezza e tempo. In passato, gli ingegneri usavano come dimensioni fondamentali forza, lunghezza e tempo. Scrivere le dimensioni di densità, tensione superficiale e viscosità nel sistema forza-lunghezza-tempo.

Analisi Nel Sistema Internazionale la forza è un'unità derivata le cui dimensioni sono, per la seconda legge di Newton,

$$\begin{aligned}[\text{forza}] &= [\text{massa} \times \text{accelerazione}] = \\ &= \left[\text{massa} \times \frac{\text{velocità}}{\text{tempo}}\right] = \\ &= \left[\text{massa} \times \frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}} \times \frac{1}{\text{tempo}}\right] = [\text{MLT}^{-2}]\end{aligned}$$

Assumendo come unità fondamentale la forza [F], la massa diviene un'unità derivata le cui dimensioni, dalla relazione precedente, risultano

$$[\text{massa}] = [\text{FL}^{-1}\text{T}^2]$$

Tenendo presente tale relazione, per la 2.1 si ha

$$[\text{densità}] = \left[\frac{\text{massa}}{\text{volume}}\right] = \left[\frac{\text{massa}}{\text{lunghezza}^3}\right] = [\text{ML}^{-3}] = [\text{FL}^{-4}\text{T}^2]$$

La tensione superficiale, data dal rapporto tra una forza e una lunghezza, ha dimensioni

$$[\text{tensione superficiale}] = \left[\frac{\text{forza}}{\text{lunghezza}}\right] = [\text{FL}^{-1}]$$

Analogamente, per la 2.48

$$\begin{aligned}[\text{viscosità}] &= \left[\frac{\text{sforzo}}{\text{gradiente di velocità}}\right] = \left[\frac{\text{forza}}{\text{lunghezza}^2} \times \frac{\text{lunghezza}}{\text{velocità}}\right] = \\ &= \left[\frac{\text{forza}}{\text{lunghezza}^2} \times \text{lunghezza} \times \frac{\text{tempo}}{\text{lunghezza}}\right] = [\text{FTL}^{-2}]\end{aligned}$$

7.4 Elencare le dimensioni fondamentali dell'accelerazione, della velocità angolare e dell'accelerazione angolare.

Analisi L'accelerazione è la variazione di velocità nell'unità di tempo. Pertanto, ha dimensioni

$$[\text{accelerazione}] = \left[\frac{\text{velocità}}{\text{tempo}}\right] = \left[\frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}} \times \frac{1}{\text{tempo}}\right] = [\text{LT}^{-2}]$$

La velocità angolare è l'angolo di rotazione di un generico elemento nell'unità di tempo, per cui

$$[\text{velocità angolare}] = \left[\frac{\text{angolo}}{\text{tempo}}\right] = \left[\frac{1}{\text{tempo}}\right] = [\mathrm{T}^{-1}]$$

L'accelerazione angolare è la variazione di velocità angolare nell'unità di tempo. Pertanto, ha dimensioni

$$[\text{accelerazione angolare}] = \left[\frac{\text{velocità angolare}}{\text{tempo}}\right] = \\ = \left[\frac{\text{angolo}}{\text{tempo}} \times \frac{1}{\text{tempo}}\right] = [\mathrm{T}^{-2}]$$

7.5 Elencare le dimensioni fondamentali del calore specifico a pressione costante, del peso specifico e dell'entalpia specifica.

Analisi Il calore specifico a pressione costante è la quantità di calore necessaria per aumentare di 1 °C la temperatura dell'unità di massa con una trasformazione isobara. Per la 2.11, ha le dimensioni del rapporto fra entalpia specifica e temperatura. Poiché l'entalpia specifica ha le dimensioni di una energia per unità di massa e l'energia ha le dimensioni di una forza per una lunghezza, si ha

$$[\text{calore specifico}]_p = \left[\frac{\text{entalpia}}{\text{temperatura}}\right] = \left[\frac{\text{energia}}{\text{massa}} \times \frac{1}{\text{temperatura}}\right] = \\ = \left[\frac{\text{forza} \times \text{lunghezza}}{\text{massa}} \times \frac{1}{\text{temperatura}}\right] = \\ = \left[\frac{\text{massa} \times \text{lunghezza}}{\text{tempo}^2} \times \frac{\text{lunghezza}}{\text{massa}} \times \frac{1}{\text{temperatura}}\right] = \\ = \left[\frac{\text{lunghezza}^2}{\text{tempo}^2} \times \frac{1}{\text{temperatura}}\right] = [\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}\Theta^{-1}]$$

Il peso specifico è il peso dell'unità di volume, per cui

$$[\text{peso}] = \left[\frac{\text{forza}}{\text{volume}}\right] = \left[\frac{\text{massa} \times \text{lunghezza}}{\text{tempo}^2} \times \frac{1}{\text{lunghezza}^3}\right] = [\mathrm{ML}^{-2}\mathrm{T}^{-2}]$$

L'entalpia specifica è un'energia per unità di massa e, pertanto, ha dimensioni

$$[\text{entalpia specifica}] = \left[\frac{\text{energia}}{\text{massa}}\right] = \left[\frac{\text{forza} \times \text{lunghezza}}{\text{massa}}\right] = \\ = \left[\frac{\text{massa} \times \text{lunghezza}}{\text{tempo}^2} \times \frac{\text{lunghezza}}{\text{massa}}\right] = [\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}]$$

7.6 Elencare le dimensioni fondamentali dell'energia, dell'energia specifica e della potenza.

Analisi L'energia, come il lavoro, è il prodotto di una forza per una lunghezza. Quindi, ha dimensioni

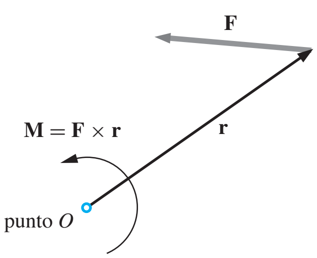
$$[\text{energia}] = \left[\text{massa} \times \frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}^2} \times \text{lunghezza}\right] = [\text{ML}^2\text{T}^{-2}]$$

L'energia specifica, cioè l'energia per unità di massa, è il rapporto tra energia e massa, per cui

$$[\text{energia specifica}] = \left[\frac{\text{energia}}{\text{massa}}\right] = \\ = \left[\text{massa} \times \frac{\text{lunghezza}^2}{\text{tempo}^2} \times \frac{1}{\text{massa}}\right] = [\text{L}^2\text{T}^{-2}]$$

La potenza è l'energia nell'unità di tempo e, quindi, ha dimensioni

$$[\text{potenza}] = \left[\frac{\text{energia}}{\text{tempo}}\right] = \\ = \left[\text{massa} \times \frac{\text{lunghezza}^2}{\text{tempo}^2} \times \frac{1}{\text{tempo}}\right] = [\text{ML}^2\text{T}^{-3}]$$



7.7 Il momento di una forza è il prodotto vettoriale della forza per il braccio, come indicato in figura. Quali sono le dimensioni fondamentali del momento di una forza? In quali unità si misura?

Analisi Trattandosi del prodotto di una lunghezza per una forza, il momento ha dimensioni

$$[\text{momento}] = \left[\text{lunghezza} \times \text{massa} \times \frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}^2}\right] = [\text{ML}^2\text{T}^{-2}]$$

In termini di dimensioni fondamentali, il momento è il prodotto di una massa per una lunghezza al quadrato diviso un tempo al quadrato. Si misura in newton per metro ($\text{N} \cdot \text{m}$).

Omogeneità dimensionale

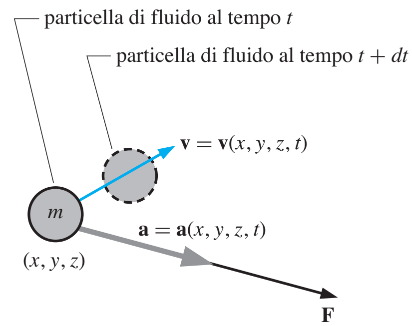
7.8 Spiegare il *principio di omogeneità dimensionale*.

Analisi Il principio di omogeneità dimensionale afferma che *tutti gli addendi di un'equazione devono avere le stesse dimensioni*. Nell'analisi di un problema deve essere rispettata anche l'omogeneità delle unità di misura, cioè tutti gli addendi devono essere espressi con le stesse unità di misura.

7.9 L'accelerazione totale di una particella di fluido, che è l'accelerazione di una particella seguita nel suo moto, è definita (Cap. 4) come

$$\mathbf{a}(x, y, z, t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v}$$

Quali sono le dimensioni fondamentali dell'operatore gradiente? Quali sono le dimensioni dei termini dell'equazione?



Analisi Il gradiente di una funzione scalare è un vettore che ha come componenti le derivate della funzione nelle tre direzioni coordinate, cioè

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Pertanto, le dimensioni primarie dell'operatore gradiente sono l'inverso di una lunghezza. Le dimensioni dei termini dell'equazione sono, nell'ordine:

$$\left[\text{accelerazione}\right] = \left[\frac{\text{forza}}{\text{massa}}\right] = \\ = \left[\text{massa} \times \frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}^2} \times \frac{1}{\text{massa}}\right] = \left[\text{LT}^{-2}\right]$$

$$\left[\frac{\text{velocità}}{\text{tempo}}\right] = \left[\frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}} \times \frac{1}{\text{tempo}}\right] = \left[\text{LT}^{-2}\right]$$

$$\left[\text{velocità} \times \nabla \times \text{velocità}\right] = \\ = \left[\frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}} \times \frac{1}{\text{lunghezza}} \times \frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}}\right] = \left[\text{LT}^{-2}\right]$$

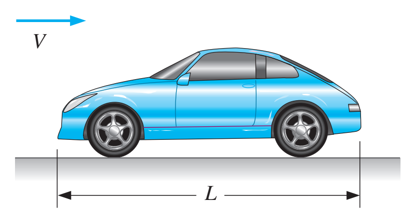
Quindi, tutti i termini hanno in effetti le stesse dimensioni.

Adimensionalizzazione delle equazioni

7.10 Qual è il motivo principale per il quale conviene adimensionalizzare un'equazione?

Analisi Il motivo principale per il quale conviene adimensionalizzare una equazione è quello di **ridurre il numero di parametri di un problema**.

7.11 Nel moto permanente di un fluido incomprimibile, la velocità di deformazione cubica è nulla (Cap. 4), per cui



$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Per un certo campo di moto, siano, rispettivamente, V e L la velocità e la lunghezza caratteristiche. Definite le variabili adimensionali

$$x^* = \frac{x}{L}, \qquad y^* = \frac{y}{L}, \qquad z^* = \frac{z}{L},$$
$$v_x^* = \frac{v_x}{V}, \qquad v_y^* = \frac{v_y}{V}, \qquad v_z^* = \frac{v_z}{V},$$

adimensionalizzare l'equazione e identificare i parametri notevoli che vi dovessero comparire.

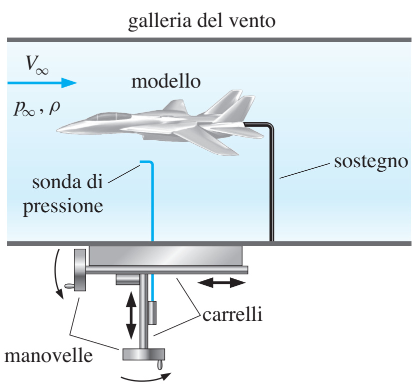
Analisi Sostituendo nell'equazione data alle variabili dimensionali le corrispondenti espressioni, funzioni delle variabili adimensionali, si ottiene

$$\frac{\partial\,(V v_x^*)}{\partial\,(L x^*)} + \frac{\partial\,(V v_y^*)}{\partial\,(L y^*)} + \frac{\partial\,(V v_z^*)}{\partial\,(L z^*)} = 0$$

che, mettendo in evidenza V/L e semplificando, diventa

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_z^*}{\partial z*} = 0$$

Nell'equazione adimensionale **non compaiono parametri adimensionali**. Infatti, l'equazione deriva da considerazioni puramente cinematiche che non coinvolgono alcuna proprietà del fluido.



7.12 In una galleria del vento viene misurata la distribuzione di pressione sul profilo alare del modello di un aeroplano. La velocità dell'aria nella galleria è sufficientemente bassa affinché gli effetti della comprimibilità possano essere trascurati. In tale situazione, l'equazione di Bernoulli è valida ovunque tranne che nelle immediate vicinanze delle pareti solide e nella regione di scia dietro il modello (Cap. 5). Lontano dal modello, l'aria si muove con velocità V_∞ e pressione p_∞ e la sua densità ρ è praticamente costante. Poiché nel moto dell'aria gli effetti della gravità sono trascurabili, il teorema di Bernoulli si può scrivere:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2.$$

Adimensionalizzare l'equazione e scrivere l'espressione del **coefficiente di pressione** C_p, definito come

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\rho V_\infty^2/2}$$

in ciascun punto del campo di moto in cui vale l'equazione di Bernoulli.

Analisi Adimensionalizzando l'equazione, dividendo ciascun termine per la pressione dinamica $\rho V_\infty^2/2$, si ottiene

$$\frac{p}{\rho V_\infty^2/2} + \frac{v^2}{V_\infty^2} = \frac{p_\infty}{\rho V_\infty^2/2} + 1$$

Riordinando, l'espressione del coefficiente di pressione risulta

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\rho V_\infty^2/2} = 1 - \frac{v^2}{V_\infty^2}$$

Analisi dimensionale e similitudine

7.13 Illustrare quali sono gli scopi principali dell'analisi dimensionale.

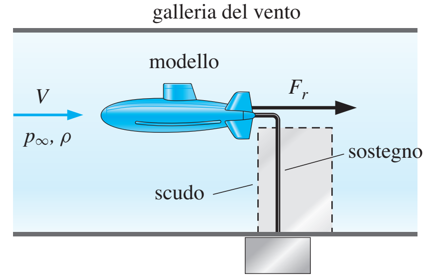
Analisi Gli scopi principali dell'analisi dimensionale sono:

- generare parametri adimensionali utili per la sperimentazione su modello e per la scrittura e interpretazione dei risultati sperimentali
- ottenere leggi di scala per trasferire al prototipo i risultati ottenuti su modello
- prevedere, a volte, l'andamento delle relazioni tra parametri.

7.14 Illustrare le condizioni necessarie perché si abbia similitudine completa tra modello e prototipo.

Analisi In generale, per un campo di moto qualunque, si ha similitudine completa tra il modello e il prototipo quando è soddisfatta la condizione di similitudine dinamica (e quindi anche le condizioni di similitudine geometrica e cinematica).

7.15 Un gruppo di studenti deve progettare un sottomarino a propulsione umana per una gara che deve svolgersi in un lago con acqua alla temperatura di 15 °C (ρ = 999,1 kg/m^3; $\mu = 1{,}138 \times 10^{-3}$ Pa·s). La lunghezza complessiva del prototipo, che in immersione dovrebbe essere in grado di muoversi alla velocità di 0,560 m/s, è di 2,24 m. Il gruppo costruisce un modello, in scala 1:8, per testarlo in una galleria del vento. Il sostegno che collega il modello alla bilancia dinamometrica è protetto da uno scudo così che la resistenza aerodinamica dello stesso sostegno non influenzi il valore misurato dalla bilancia. Nella galleria del vento, l'aria è a pressione atmosferica e alla temperatura di 25 °C (ρ = 1,184 kg/m^3; $\mu = 1{,}849 \times 10^{-5}$ Pa·s). Che valore deve avere la velocità dell'aria perché si abbia similitudine?



Analisi Perché si abbia similitudine completa, devono essere uguali i valori del numero di Reynolds del modello e del prototipo

$$\mathrm{Re}_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \mathrm{Re}_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

per cui la velocità dell'aria deve essere

$$V_m = V_p \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{L_p}{L_m} \frac{\mu_m}{\mu_p} = 0{,}560 \times \frac{999{,}1}{1{,}184} \times 8 \times \frac{1{,}849 \times 10^{-5}}{1{,}138 \times 10^{-3}} = 61{,}4 \text{ m/s}$$

Discussione Alla temperatura di 25 °C la velocità del suono è di circa 340 m/s, per cui nella galleria il numero di Mach è $\mathrm{Ma} = 61{,}4/340 = 0{,}181$. Essendo $\mathrm{Ma} < 0{,}3$ l'aria può essere trattata come un fluido incomprimibile.

7.16 Con riferimento al problema precedente, gli studenti misurano in galleria del vento, sul loro modello di sottomarino, ponendo molta cura nel mantenere le condizioni necessarie ad assicurare la similitudine col prototipo, una forza di 2,3 N. Calcolare il valore della forza corrispondente nel prototipo.

Analisi Essendo già assicurata l'uguaglianza del numero di Reynolds, per le 7.13 deve essere anche

$$\frac{F_{rm}}{\rho_m V_m^2 L_m^2} = \frac{F_{rp}}{\rho_p V_p^2 L_p^2}$$

da cui

$$F_{rp} = F_{rm}\,\frac{\rho_p}{\rho_m}\left(\frac{L_p}{L_m}\right)^2\left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2 = 2{,}3 \times \frac{999{,}1}{1{,}184} \times 8^2 \times \left(\frac{0{,}56}{61{,}4}\right)^2 = 10{,}3\ \text{N}$$

Discussione Nonostante la velocità del prototipo in acqua sia notevolmente inferiore a quella dell'aria nel modello, essendo la densità dell'acqua molto più alta di quella dell'aria e il prototipo 8 volte più grande del modello, la forza risultante nel prototipo risulta quasi 5 volte più grande di quella misurata nel modello.

7.17 Con riferimento al problema 7.15, potendo gli studenti accedere solamente ad una galleria del vento molto più piccola, il modello viene costruito in scala 1:24, anziché 1:8. Che velocità deve avere l'aria nella galleria del vento perché si abbia similitudine? Cosa c'è nei risultati che induce a riflettere?

Analisi Perché si abbia similitudine completa, devono essere uguali i valori del numero di Reynolds del modello e del prototipo

$$\text{Re}_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \text{Re}_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

per cui la velocità dell'aria deve essere

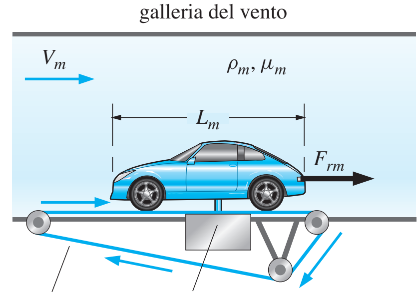
$$V_m = V_p\,\frac{\rho_p}{\rho_m}\,\frac{L_p}{L_m}\,\frac{\mu_m}{\mu_p} = 0{,}560 \times \frac{999{,}1}{1{,}184} \times 24 \times \frac{1{,}849 \times 10^{-5}}{1{,}138 \times 10^{-3}} = 184\ \text{m/s}$$

Essendo rimaste invariate, rispetto al problema 7.15, tutte le condizioni, ad eccezione del rapporto di scala pari a un terzo del precedente, la velocità dell'aria nel modello, che è proporzionale all'inverso del rapporto di scala, risulta il triplo. Risulta triplicato, però, anche il numero di Mach $\text{Ma} = 184/340 = 0{,}542$ che è troppo alto perché l'aria possa essere trattata come incomprimibile. Nella galleria, pertanto, i test devono essere condotti con una velocità dell'aria pari a quella massima corrispondente a $\text{Ma} = 0{,}3$, cioè ad una velocità di $0{,}3 \times 340 = 102\,\text{m/s}$. Per tale velocità, però, non vale più la similitudine di Reynolds. Si può, quindi, cercare di estrapolare i risultati a valori di Re maggiori o sperare che il fenomeno risulti indipendente da Re (v. figura 7.23).

7.18 Alcune gallerie del vento sono *pressurizzate*. Se in una galleria del vento la pressione dell'aria aumenta di 1,5 volte, di quanto aumenterà, a parità di tutto il resto, il numero di Reynolds?

Analisi Supponendo che l'aria si comporti come un gas ideale, se la pressione aumenta di un fattore 1,5, mantenendosi la temperatura costante, anche la sua densità aumenterà nello stesso rapporto e, di conseguenza, anche il numero di Reynolds, a parità di tutto il resto, aumenterà di un fattore 1,5.

7.19 Si deve stimare la resistenza all'avanzamento di una nuova automobile sportiva alla velocità di 100 km/h e a una temperatura dell'aria di 25 °C ($\rho = 1{,}184$ kg/m^3; $\mu = 1{,}849 \times 10^{-5}$ Pa·s). Viene pertanto costruito un modello in scala 1:4 da testare in galleria del vento. Anche nella galleria del vento, la temperatura dell'aria è di 25 °C. La forza di trascinamento dell'aria viene misurata con una bilancia dinamometrica e il movimento della strada (rispetto all'automobile) viene simulato facendo scorrere un tapis roulant sotto il modello. Calcolare la velocità che deve avere l'aria nella galleria del vento perché si abbia similitudine tra modello e prototipo.



Analisi Perché si abbia similitudine completa, devono essere uguali i valori del numero di Reynolds del modello e del prototipo

$$\mathrm{Re}_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \mathrm{Re}_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

per cui la velocità dell'aria deve essere

$$V_m = V_p \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{L_p}{L_m} \frac{\mu_m}{\mu_p} = V_p \times 4 = 100 \times 4 = 400 \text{ m/s}$$

valore molto alto e che potrebbe non essere realizzabile nella galleria.

7.20 Con riferimento al problema precedente, nelle condizioni che assicurano la similitudine tra modello e prototipo, la resistenza del modello nella galleria del vento vale 16,5 N. Calcolare il valore della forza corrispondente nel prototipo.

Analisi Nell'ipotesi che sia già assicurata l'uguaglianza del numero di Reynolds, per le 7.13 deve essere anche

$$\frac{F_{rm}}{\rho_m V_m^2 L_m^2} = \frac{F_{rp}}{\rho_p V_p^2 L_p^2}$$

da cui

$$F_{rp} = F_{rm} \frac{\rho_p}{\rho_m} \left(\frac{L_p}{L_m}\right)^2 \left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2 = 16{,}5 \times 4^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 16{,}5 \text{ N}$$

Discussione Essendo le proprietà dell'aria uguali nel prototipo e nel modello, la resistenza all'avanzamento risulta uguale nel modello e nel prototipo. Il risultato sarebbe, naturalmente, diverso se nella galleria l'aria si trovasse a temperatura e/o pressione diversa.

7.21 Volendo far corrispondere, in una galleria del vento, il numero di Reynolds del prototipo di un grande veicolo con quello di un modello a scala ridotta, è meglio che l'aria nella galleria del vento sia, a parità di tutto il resto, a 10 °C o a 50 °C? Perché?

Analisi Poiché, in similitudine di Reynolds, la velocità nel modello risulta

$$V_m = V_p \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{L_p}{L_m} \frac{\mu_m}{\mu_p}$$

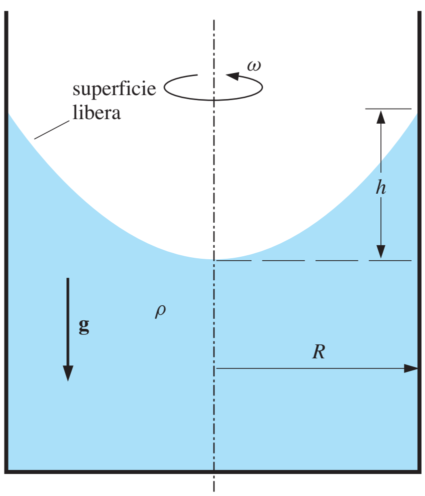
quando il rapporto di scala tra le lunghezze del modello e quelle del prototipo è piccolo, può succedere (come ad esempio nel caso del problema 7.19) che la velocità V_m nel modello risulti molto elevata. Per ridurre tale valore di velocità si può allora agire sulle proprietà dell'aria nel modello e, in particolare, sulla viscosità e sulla densità. Poiché al diminuire della temperatura dell'aria la viscosità decresce e la densità aumenta, la velocità V_m diminuisce perché è direttamente proporzionale alla prima e inversamente proporzionale alla seconda. Nel caso considerato, pertanto, è meglio che l'aria nella galleria del vento sia a 10 °C piuttosto che a 50 °C. In particolare, essendo a 10 °C la viscosità $\mu_{10} = 1{,}778 \times 10^{-5}$ Pa · s e la densità $\rho_{10} = 1{,}246$ kg/m^3 e a 50 °C $\mu_{50} = 1{,}963 \times 10^{-5}$ Pa · s e $\rho_{50} = 1{,}092$ kg/m^3, il rapporto tra i due valori del numero di Reynolds corrispondenti è

$$\frac{\mathrm{Re}_{10}}{\mathrm{Re}_{50}} = \frac{\dfrac{\rho_{10}V_{10}L_{10}}{\mu_{10}}}{\dfrac{\rho_{50}V_{50}L_{50}}{\mu_{50}}} = \frac{\rho_{10}}{\rho_{50}}\,\frac{\mu_{50}}{\mu_{10}} = \frac{1{,}246}{1{,}092} \times \frac{1{,}963 \times 10^{-5}}{1{,}778 \times 10^{-5}} = 1{,}26$$

Pertanto, a parità di tutto il resto, provando con aria a 10 °C si può raggiungere un numero di Reynolds più alto del 26% di quello che si può raggiungere provando con aria a 50 °C.

Discussione Bisogna, comunque, tener conto di altri fattori. Innanzitutto, la potenza della pompa usata per assicurare il moto dell'aria in galleria è proporzionale alla portata in massa e quindi cresce al crescere della densità. Inoltre, la velocità del suono è proporzionale alla radice quadrata della temperatura, per cui, a parità di velocità dell'aria, il numero di Mach è più alto a basse temperature e, quindi, gli effetti della comprimibilità diventano più significativi.

Parametri adimensionali e metodo delle variabili ripetute



7.22 Un contenitore cilindrico in rotazione attorno al suo asse verticale si muove di moto rigido insieme al liquido che lo riempie. La differenza di quota h tra due punti sulla superficie libera, al bordo e sull'asse, è funzione della velocità angolare ω, della densità ρ del fluido, dell'accelerazione di gravità g e del raggio R del contenitore. Utilizzare il metodo delle variabili ripetute per stabilire una relazione adimensionale tra i parametri.

Analisi I parametri adimensionali vengono determinati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.
Fase 1 Nel problema compaiono 5 parametri. Quindi, $n = 5$ e

$$h = f(\omega, \rho, g, R)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$[h] = [\mathrm{L}] \qquad [\omega] = [\mathrm{T}^{-1}] \qquad [\rho] = [\mathrm{ML}^{-3}]$$
$$[g] = [\mathrm{LT}^{-2}] \qquad [R] = [\mathrm{L}]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 5 - 3 = 2$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente h, si scelgono ω, ρ e R.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$\left[\Pi_1\right] = \left[\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\right] = \left[h \cdot \omega^{a_1} \cdot \rho^{b_1} \cdot R^{c_1}\right] = \\ = \left[\mathrm{L} \cdot \left(\mathrm{T}^{-1}\right)^{a_1} \cdot \left(\mathrm{ML}^{-3}\right)^{b_1} \cdot (\mathrm{L})^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\begin{array}{lll} \left[\mathrm{M}^0\right] = \left[\mathrm{M}^{b_1}\right] & 0 = b_1 & b_1 = 0 \\ \left[\mathrm{T}^0\right] = \left[\mathrm{T}^{-a_1}\right] & 0 = -a_1 & a_1 = 0 \\ \left[\mathrm{L}^0\right] = \left[\mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{-3b_1} \cdot \mathrm{L}^{c_1}\right] & 0 = 1 - 3b_1 + c_1 & c_1 = -1 \end{array}$$

Il gruppo Π_1 risulta, quindi,

$$\Pi_1 = \frac{h}{R}$$

Il primo Π indipendente è

$$\left[\Pi_2\right] = \left[\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\right] = \left[g \cdot \omega^{a_2} \cdot \rho^{b_2} \cdot R^{c_2}\right] = \\ = \left[\left(\mathrm{LT}^{-2}\right) \cdot \left(\mathrm{T}^{-1}\right)^{a_2} \cdot \left(\mathrm{ML}^{-3}\right)^{b_2} \cdot (\mathrm{L})^{c_2}\right]$$

Imponendo che Π_2 sia adimensionale si ottiene

$$\begin{array}{lll} \left[\mathrm{M}^0\right] = \left[\mathrm{M}^{b_2}\right] & 0 = b_2 & b_2 = 0 \\ \left[\mathrm{T}^0\right] = \left[\mathrm{T}^{-2} \cdot \mathrm{T}^{-a_2}\right] & 0 = -2 - a_2 & a_2 = -2 \\ \left[\mathrm{L}^0\right] = \left[\mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{-3b_2} \cdot \mathrm{L}^{c_2}\right] & 0 = 1 - 3b_2 + c_2 & c_2 = -1 \end{array}$$

Il gruppo Π_2 risulta, quindi,

$$\Pi_2 = \frac{g}{\omega^2 R}$$

Osservando che il prodotto ωR è la velocità del contenitore in corrispondenza del bordo, se si inverte Π_2 e se ne estrae la radice quadrata si ottiene il gruppo modificato Π_2'

$$\Pi_2' = \frac{\omega R}{\sqrt{gR}}$$

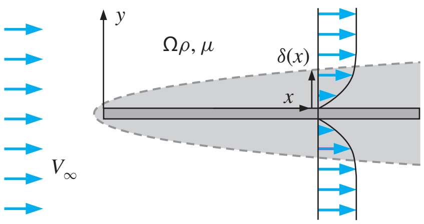
che è un numero di Froude.

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta

$$\frac{h}{R} = f\left(\mathrm{Fr}\right)$$

Discussione La densità, non essendo contenuta in alcuno dei gruppi finali, non è un parametro significativo.

7.23 Uno strato limite è una regione sottile (di solito lungo una parete solida) nella quale gli effetti viscosi sono importanti e il moto è rotazionale. Nel caso



dello strato limite su una lastra piana sottile, lo spessore δ dello strato limite alla generica ascissa x è funzione di x, della velocità V_∞ della corrente indisturbata, della densità ρ e della viscosità μ del fluido. Usando il metodo delle variabili ripetute, stabilire una relazione adimensionale tra δ e le variabili da cui dipende.

Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.

Fase 1 Nel problema compaiono 5 parametri. Quindi, $n = 5$ e

$$\delta = f\left(x, V_\infty, \rho, \mu\right)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$\left[\delta\right] = \left[\mathrm{L}\right] \qquad \left[x\right] = \left[\mathrm{L}\right] \qquad \left[V_\infty\right] = \left[\mathrm{LT^{-1}}\right]$$
$$\left[\rho\right] = \left[\mathrm{ML^{-3}}\right] \qquad \left[\mu\right] = \left[\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}\right]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 5 - 3 = 2$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente δ, si scelgono x, ρ e V_∞.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$\left[\Pi_1\right] = \left[\mathrm{M^0L^0T^0}\right] = \left[\delta \cdot x^{a_1} \cdot \rho^{b_1} \cdot V_\infty^{c_1}\right] = \\ = \left[\mathrm{L} \cdot (\mathrm{L})^{a_1} \cdot (\mathrm{ML^{-3}})^{b_1} \cdot (\mathrm{LT^{-1}})^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\left[\mathrm{M^0}\right] = \left[\mathrm{M}^{b_1}\right] \qquad 0 = b_1 \qquad b_1 = 0$$
$$\left[\mathrm{T^0}\right] = \left[\mathrm{T}^{-c_1}\right] \qquad 0 = -c_1 \qquad c_1 = 0$$
$$\left[\mathrm{L^0}\right] = \left[\mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{a_1} \cdot \mathrm{L}^{-3b_1} \cdot \mathrm{L}^{c_1}\right] \qquad 0 = 1 + a_1 - 3b_1 + c_1 \qquad a_1 = -1$$

Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi = \frac{\delta}{x}$$

Il primo Π indipendente è

$$\left[\Pi_2\right] = \left[\mathrm{M^0L^0T^0}\right] = \left[\mu \cdot x^{a_2} \cdot \rho^{b_2} \cdot V_\infty^{c_2}\right] = \\ = \left[(\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}) \cdot (\mathrm{L})^{a_2} \cdot (\mathrm{ML^{-3}})^{b_2} \cdot (\mathrm{LT^{-1}})^{c_2}\right]$$

Imponendo che Π_2 sia adimensionale si ottiene

$$\left[\mathrm{M^0}\right] = \left[\mathrm{M} \cdot \mathrm{M}^{b_2}\right] \qquad 0 = 1 + b_2 \qquad b_2 = -1$$
$$\left[\mathrm{T^0}\right] = \left[\mathrm{T^{-1}} \cdot \mathrm{T}^{-c_2}\right] \qquad 0 = -1 - c_2 \qquad c_2 = -1$$
$$\left[\mathrm{L^0}\right] = \left[\mathrm{L^{-1}} \cdot \mathrm{L}^{a_2} \cdot \mathrm{L}^{-3b_2} \cdot \mathrm{L}^{c_2}\right] \qquad 0 = -1 + a_2 - 3b_2 + c_2 \qquad a_2 = -1$$

Il gruppo Π_2 risulta quindi

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V_\infty x}$$

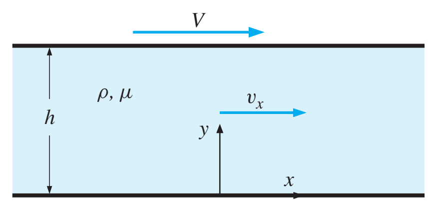
Invertendo Π_2, si ottiene un numero di Reynolds

$$\Pi_2' = \mathrm{Re}_x = \frac{\rho V_\infty x}{\mu}$$

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta

$$\frac{\delta}{x} = f\left(\mathrm{Re}_x\right)$$

7.24 Un **moto alla Couette** è il moto di un fluido tra due lastre piane parallele, a distanza h l'una dall'altra, di cui quella superiore in moto con velocità V e l'altra ferma. Con riferimento al moto permanente e bidimensionale nel piano xy di un fluido incomprimibile, usando il metodo delle variabili ripetute, stabilire una relazione adimensionale tra la componente v_x della velocità secondo x nel generico punto a distanza y dalla lastra inferiore e la velocità V della lastra superiore, la distanza h fra le lastre, la viscosità μ del fluido e la sua densità ρ.



Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.

Fase 1 Nel problema compaiono 6 parametri. Quindi, $n = 6$ e

$$v_x = f\left(\mu, V, h, \rho, y\right)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$\left[v_x\right] = \left[\mathrm{LT}^{-1}\right] \qquad \left[\mu\right] = \left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}\right] \qquad \left[V\right] = \left[\mathrm{LT}^{-1}\right]$$
$$\left[h\right] = \left[\mathrm{L}\right] \qquad \left[\rho\right] = \left[\mathrm{ML}^{-3}\right] \qquad \left[y\right] = \left[\mathrm{L}\right]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 6 - 3 = 6$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente v_x e notando che h e y hanno le stesse dimensioni ma che tra le due è preferibile una lunghezza fissa piuttosto che una variabile, si scelgono V, ρ e h.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$\left[\Pi_1\right] = \left[\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\right] = \left[v_x \cdot V^{a_1} \cdot \rho^{b_1} \cdot h^{c_1}\right] =$$
$$= \left[\left(\mathrm{LT}^{-1}\right)\left(\mathrm{LT}^{-1}\right)^{a_1} \cdot \left(\mathrm{ML}^{-3}\right)^{b_1} \cdot \left(\mathrm{L}\right)^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\left[\mathrm{M}^0\right] = \left[\mathrm{M}^{b_1}\right] \qquad 0 = b_1 \qquad b_1 = 0$$
$$\left[\mathrm{T}^0\right] = \left[\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-a_1}\right] \qquad 0 = -1 - a_1 \qquad a_1 = -1$$
$$\left[\mathrm{L}^0\right] = \left[\mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{a_1} \cdot \mathrm{L}^{-3b_1} \cdot \mathrm{L}^{c_1}\right] \qquad 0 = 1 + a_1 - 3b_1 + c_1 \qquad c_1 = 0$$

Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = \frac{v_x}{V}$$

Il primo Π indipendente è

$$\left[\Pi_2\right] = \left[M^0L^0T^0\right] = \left[\mu \cdot V^{a_2} \cdot \rho^{b_2} \cdot h^{c_2}\right] = \\ = \left[\left(ML^{-1}T^{-1}\right) \cdot \left(LT^{-1}\right)^{a_2} \cdot \left(ML^{-3}\right)^{b_2} \cdot (L)^{c_2}\right]$$

Imponendo che Π_2 sia adimensionale si ottiene

$$\begin{array}{lll} \left[M^0\right] = \left[M \cdot M^{b_2}\right] & 0 = 1 + b_2 & b_2 = -1 \\ \left[T^0\right] = \left[T^{-1} \cdot T^{-a_2}\right] & 0 = -1 - a_2 & a_2 = -1 \\ \left[L^0\right] = \left[L^{-1} \cdot L^{a_2} \cdot L^{-3b_2} \cdot L^{c_2}\right] & 0 = -1 + a_2 - 3b_2 + c_2 & c_2 = -1 \end{array}$$

Il gruppo Π_2 risulta quindi

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V h}$$

Invertendo Π_2, si ottiene un numero di Reynolds

$$\Pi_2' = \mathrm{Re} = \frac{\rho V h}{\mu}$$

Il secondo Π indipendente è

$$\left[\Pi_3\right] = \left[M^0L^0T^0\right] = \left[y \cdot V^{a_3} \cdot \rho^{b_3} \cdot h^{c_3}\right] = \\ = \left[(L) \cdot \left(LT^{-1}\right)^{a_3} \cdot \left(ML^{-3}\right)^{b_3} \cdot (L)^{c_3}\right]$$

Imponendo che Π_3 sia adimensionale si ottiene

$$\begin{array}{lll} \left[M^0\right] = \left[M^{b_3}\right] & 0 = b_3 & b_3 = 0 \\ \left[T^0\right] = \left[T^{-a_3}\right] & 0 = -a_3 & a_3 = 0 \\ \left[L^0\right] = \left[L \cdot L^{a_3} \cdot L^{-3b_3} \cdot L^{c_3}\right] & 0 = 1 + a_3 - 3b_3 + c_3 & c_3 = -1 \end{array}$$

Il gruppo Π_3 risulta quindi

$$\Pi_3 = \frac{y}{h}$$

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta

$$\frac{v_x}{V} = f\left(\mathrm{Re}, \frac{y}{h}\right)$$

7.25 Si consideri lo stesso moto del problema precedente durante il transitorio, cioè considerando anche il tempo t come variabile aggiuntiva. Stabilire una relazione adimensionale tra la componente v_x della velocità secondo x e le variabili da cui dipende.

Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.
Fase 1 Nel problema compaiono 7 parametri. Quindi, $n = 7$ e

$$v_x = f(\mu, V, h, \rho, y, t)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$[v_x] = [\mathrm{LT}^{-1}] \quad [\mu] = [\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}] \quad [V] = [\mathrm{LT}^{-1}]$$
$$[h] = [\mathrm{L}] \quad [\rho] = [\mathrm{ML}^{-3}] \quad [y] = [\mathrm{L}] \quad [t] = [\mathrm{T}]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 7 - 3 = 4$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Analogamente a quanto fatto nel problema precedente, si scelgono V, ρ e h.

Fase 5 Il Π dipendente e i due Π indipendenti sono uguali a quelli ottenuti nel problema precedente. In questo caso c'è un ulteriore gruppo Π_4 indipendente

$$[\Pi_4] = [\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0] = [t \cdot V^{a_4} \cdot \rho^{b_4} \cdot h^{c_4}] = \\ = [(\mathrm{T}) \cdot (\mathrm{LT}^{-1})^{a_4} \cdot (\mathrm{ML}^{-3})^{b_4} \cdot (\mathrm{L})^{c_4}]$$

Imponendo che Π_4 sia adimensionale si ottiene

$$[\mathrm{M}^0] = [\mathrm{M}^{b_4}] \qquad 0 = b_4 \qquad b_4 = 0$$
$$[\mathrm{T}^0] = [\mathrm{T} \cdot \mathrm{T}^{-a_4}] \qquad 0 = 1 - a_4 \qquad a_4 = 1$$
$$[\mathrm{L}^0] = [\mathrm{L}^{a_4} \cdot \mathrm{L}^{-3b_4} \cdot \mathrm{L}^{c_4}] \qquad 0 = a_4 - 3b_4 + c_4 \qquad c_4 = -1$$

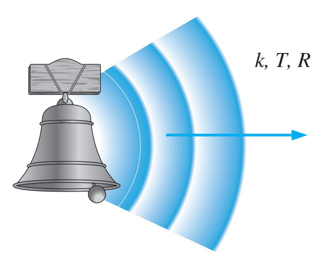
Il gruppo Π_4 risulta quindi

$$\Pi_4 = \frac{tV}{h}$$

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta

$$\frac{v_x}{V} = f\left(\mathrm{Re}, \frac{y}{h}, \frac{tV}{h}\right)$$

7.26 La velocità del suono in un gas perfetto è funzione del rapporto k tra i calori specifici, della temperatura assoluta T e della costante del gas R. Stabilire una relazione adimensionale tra questi parametri.



Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.
Fase 1 Nel problema compaiono 4 parametri. Quindi, $n = 4$ e

$$c = f(k, T, R)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$[c] = [\mathrm{LT}^{-1}] \qquad [k] = [1]$$
$$[T] = [\Theta] \qquad [R] = [\mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \Theta^{-1}]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (L, T, Θ) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 4 - 3 = 1$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente c, la scelta è limitata ai tre parametri indipendenti k, T e R. Tuttavia, poiché k è adimensionale, conviene assumere $j = 2$, per cui i parametri Π sono $k = n - j = 4 - 2 = 2$. Si scelgono, quindi, T e R.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$[\Pi_1] = \left[\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\Theta^0\right] = \left[c \cdot T^{a_1} \cdot R^{b_1}\right] = \\ = \left[(\mathrm{LT}^{-1}) \cdot (\Theta)^{a_1} \cdot (\mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2}\Theta^{-1})^{b_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$[\mathrm{L}^0] = \left[\mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{2b_1}\right] \qquad 0 = 1 + 2b_1 \qquad b_1 = -\frac{1}{2}$$
$$[\mathrm{T}^0] = \left[\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2b_1}\right] \qquad 0 = -1 - 2b_1 \qquad b_1 = -\frac{1}{2}$$
$$[\Theta^0] = \left[\Theta^{a_1} \cdot \Theta^{-b_1}\right] \qquad 0 = a_1 - b_1 \qquad a_1 = b_1$$

sistema di 3 equazioni nelle 2 incognite a_1 e b_1 Fortunatamente, i due valori di b_1 coincidono. Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = \frac{c}{\sqrt{RT}}$$

Il Π indipendente è

$$\Pi_2 = k$$

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta

$$\frac{c}{\sqrt{RT}} = f(k)$$

Discussione L'analisi dimensionale non consente, in generale, di determinare la formulazione esatta della relazione funzionale. Tuttavia, in questo caso, il risultato ottenuto coincide con la 2.41, che fornisce la velocità del suono in un gas ideale, $c = \sqrt{kRT}$.

7.27 Si consideri che la velocità del suono sia funzione del rapporto k tra i calori specifici, della temperatura assoluta T, della costante universale dei gas R_u e della massa molare M. Stabilire una relazione adimensionale tra questi parametri.

Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.

Fase 1 Nel problema compaiono 5 parametri. Quindi, $n = 5$ e

$$c = f(k, T, R_u, M)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$[c] = [\mathrm{LT}^{-1}] \qquad [k] = [1] \qquad [T] = [\Theta]$$
$$[R_u] = [\mathrm{ML}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \Theta^{-1} \cdot \mathrm{N}^{-1}] \qquad [M] = [\mathrm{MN}^{-1}]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono cinque (M, L, T, Θ, N) per cui, in prima istanza, si assume $j = 5$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 5 - 5 = 0$. Ovviamente, non è possibile che non vi siano parametri Π. Si assume, quindi, $j = 4$, per cui i parametri Π sono $k = n - j = 5 - 4 = 1$.

Fase 4 Poiché $j = 4$ bisogna scegliere quattro variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente c, la scelta è limitata ai quattro parametri indipendenti k, T, R_u e M. Tuttavia, poiché k è adimensionale, conviene assumere $j = 3$, per cui i parametri Π sono $k = n - j = 5 - 3 = 2$. Si scelgono, quindi, T, R_u e M.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$[\Pi_1] = \left[\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\Theta^0\mathrm{N}^0\right] = \left[c \cdot T^{a_1} \cdot R_u^{b_1} \cdot M^{c_1}\right] =$$
$$= \left[(\mathrm{LT}^{-1}) \cdot (\Theta)^{a_1} \cdot (\mathrm{ML}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2}\Theta^{-1}\mathrm{N}^{-1})^{b_1} \cdot (\mathrm{MN}^{-1})^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$[\mathrm{M}^0] = \left[\mathrm{M}^{b_1} \cdot \mathrm{M}^{c_1}\right] \qquad 0 = b_1 + c_1 \qquad c_1 = -b_1$$
$$[\mathrm{L}^0] = \left[\mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{2b_1}\right] \qquad 0 = 1 + 2b_1 \qquad b_1 = -\frac{1}{2}$$
$$[\mathrm{T}^0] = \left[\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2b_1}\right] \qquad 0 = -1 - 2b_1 \qquad b_1 = -\frac{1}{2}$$
$$[\Theta^0] = \left[\Theta^{a_1} \cdot \Theta^{-b_1}\right] \qquad 0 = a_1 - b_1 \qquad a_1 = b_1$$
$$[\mathrm{N}^0] = \left[\mathrm{N}^{-b_1} \cdot \mathrm{N}^{-c_1}\right] \qquad 0 = -b_1 - c_1 \qquad c_1 = -b_1$$

sistema di 5 equazioni nelle 3 incognite a_1, b_1 e c_1. Fortunatamente, i due valori di b_1 sono coincidenti così come i due valori di c_1. Il gruppo Π_1 risulta, quindi,

$$\Pi_1 = \frac{c\sqrt{M}}{\sqrt{R_u T}}$$

Il Π indipendente è

$$\Pi_2 = k$$

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta

$$\frac{c\sqrt{M}}{\sqrt{R_u T}} = f(k)$$

Discussione Essendo $R = R_u/M$, la relazione funzionale ottenuta coincide con quella del problema precedente.

7.28 Si consideri che la velocità del suono sia funzione solamente della temperatura assoluta T e della costante del gas R. Stabilire una relazione adimensionale tra questi parametri.

Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.
Fase 1 Nel problema compaiono 3 parametri. Quindi, $n = 3$ e

$$c = f\left(T, R\right)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$\left[c\right] = \left[\mathrm{LT}^{-1}\right] \qquad \left[T\right] = \left[\Theta\right] \qquad \left[R\right] = \left[\mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \Theta^{-1}\right]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (L, T, Θ) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 3 - 3 = 0$. Ovviamente, non è possibile che non vi siano parametri Π. Si assume, quindi, $j = 2$, per cui i parametri Π sono $k = n - j = 3 - 2 = 1$.

Fase 4 Poiché $j = 2$ bisogna scegliere due variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente c, la scelta è limitata ai due parametri indipendenti T e R.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$\left[\Pi_1\right] = \left[\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\Theta^0\right] = \left[c \cdot T^{a_1} \cdot R^{b_1}\right] =$$
$$= \left[\left(\mathrm{LT}^{-1}\right) \cdot \left(\Theta\right)^{a_1} \cdot \left(\mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2}\Theta^{-1}\right)^{b_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\left[\mathrm{L}^0\right] = \left[\mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{2b_1}\right] \qquad 0 = 1 + 2b_1 \qquad b_1 = -\frac{1}{2}$$
$$\left[\mathrm{T}^0\right] = \left[\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2b_1}\right] \qquad 0 = -1 - 2b_1 \qquad b_1 = -\frac{1}{2}$$
$$\left[\Theta^0\right] = \left[\Theta^{a_1} \cdot \Theta^{-b_1}\right] \qquad 0 = a_1 - b_1 \qquad a_1 = b_1$$

sistema di 3 equazioni nelle 2 incognite a_1 e b_1. Fortunatamente, i due valori di b_1 sono coincidenti. Il gruppo Π_1 risulta, quindi,

$$\Pi_1 = \frac{c}{\sqrt{RT}}$$

Fase 6 Vi è un solo Π, che non è funzione di alcun altro parametro. Per cui deve essere necessariamente costante. La relazione funzionale finale risulta

$$\frac{c}{\sqrt{RT}} = \text{costante}$$

Discussione Il risultato ottenuto rappresenta un caso "fortunato". Infatti, pur avendo, erroneamente, omesso di considerare tra i parametri il rapporto k tra i calori specifici, il risultato ottenuto è corretto se alla costante si attribuisce il valore $\sqrt{k}$.

7.29 Si consideri che la velocità del suono sia funzione solamente della pressione p e della densità ρ del gas. Stabilire una relazione adimensionale tra questi parametri, verificando che il risultato sia coerente con l'equazione $c = \sqrt{kRT}$.

Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.
Fase 1 Nel problema compaiono 3 parametri. Quindi, $n = 3$ e

$$c = f\left(p, \rho\right)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$\left[c\right] = \left[\mathrm{LT}^{-1}\right] \qquad \left[p\right] = \left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right] \qquad \left[\rho\right] = \left[\mathrm{ML}^{-3}\right]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 3 - 3 = 0$. Tale risultato, ovviamente, non è corretto. Si assume, quindi, $j = 2$, per cui i parametri Π sono $k = n - j = 3 - 2 = 1$

Fase 4 Poiché $j = 2$ bisogna scegliere due variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente c, la scelta è limitata ai due parametri indipendenti p e ρ.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$\begin{aligned}\left[\Pi_1\right] = \left[\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\right] = \left[c \cdot p^{a_1} \cdot \rho^{b_1}\right] = \\ = \left[\left(\mathrm{LT}^{-1}\right) \cdot \left(\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right)^{a_1} \cdot \left(\mathrm{ML}^{-3}\right)^{b_1}\right]\end{aligned}$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\begin{aligned}
&\left[\mathrm{M}^0\right] = \left[\mathrm{M}^{a_1} \cdot \mathrm{M}^{b_1}\right] && 0 = a_1 + b_1 && a_1 = -b_1 \\
&\left[\mathrm{L}^0\right] = \left[\mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{-a_1} \cdot \mathrm{L}^{-3b_1}\right] && 0 = 1 - a_1 - 3b_1 && b_1 = \frac{1}{2} \\
&\left[\mathrm{T}^0\right] = \left[\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2a_1}\right] && 0 = -1 - 2a_1 && a_1 = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

sistema di 3 equazioni nelle 2 incognite a_1 e b_1. Fortunatamente, i due valori di a_1 sono coincidenti. Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = c\sqrt{\frac{\rho}{p}}$$

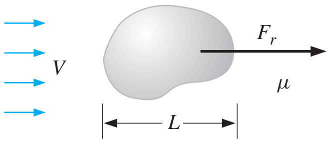
Fase 6 Vi è un solo Π, che non è funzione di alcun altro parametro. Per cui deve essere necessariamente costante. La relazione funzionale finale risulta

$$c\sqrt{\frac{\rho}{p}} = \text{costante}$$

da cui, per l'equazione di stato dei gas perfetti,

$$c = \text{costante}\sqrt{\frac{p}{\rho}} = \text{costante}\sqrt{RT}$$

Discussione L'analisi dimensionale non consente di determinare il valore della costante, uguale a $\sqrt{k}$.



7.30 Si chiama **moto di puro scorrimento** quello di minuscole particelle di aerosol o microrganismi che si muovono in aria o in acqua con numero di Reynolds molto piccolo (Re $\ll$ 1). Nei moti di puro scorrimento, la resistenza F_r che un corpo incontra è funzione solo della sua velocità V, di una lunghezza caratteristica L del corpo e della viscosità μ del fluido. Utilizzando l'analisi dimensionale, stabilire la relazione che lega F_r alle variabili indipendenti.

Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.
Fase 1 Nel problema compaiono 4 parametri. Quindi, $n = 4$ e

$$F_r = f\left(V, L, \mu\right)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$\left[F_r\right] = \left[\mathrm{MLT^{-2}}\right] \qquad \left[V\right] = \left[\mathrm{LT^{-1}}\right]$$
$$\left[L\right] = \left[\mathrm{L}\right] \qquad \left[\mu\right] = \left[\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}\right]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 4 - 3 = 1$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente F_r, si scelgono V, L e μ.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$\left[\Pi_1\right] = \left[\mathrm{M^0L^0T^0}\right] = \left[F_r \cdot V^{a_1} \cdot L^{b_1} \cdot \mu^{c_1}\right] =$$
$$= \left[\left(\mathrm{MLT^{-2}}\right) \cdot \left(\mathrm{LT^{-1}}\right)^{a_1} \cdot \left(\mathrm{L}\right)^{b_1} \cdot \left(\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}\right)^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\left[\mathrm{M^0}\right] = \left[\mathrm{M \cdot M^{c_1}}\right] \qquad 0 = 1 + c_1 \qquad c_1 = -1$$
$$\left[\mathrm{T^0}\right] = \left[\mathrm{T^{-2} \cdot T^{-a_1} \cdot T^{-c_1}}\right] \qquad 0 = -2 - a_1 - c_1 \qquad a_1 = -1$$
$$\left[\mathrm{L^0}\right] = \left[\mathrm{L \cdot L^{a_1} \cdot L^{b_1} \cdot L^{-c_1}}\right] \qquad 0 = 1 + a_1 + b_1 - c_1 \qquad b_1 = -1$$

Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = \frac{F_r}{\mu V L}$$

Fase 6 Poiché esiste un solo gruppo adimensionale, esso non può essere funzione di qualcos'altro, cioè deve essere costante:

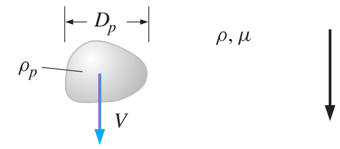
$$\frac{F_r}{\mu V L} = \text{costante} = k$$

per cui

$$F_r = k \mu V L$$

Pertanto, nei moti di puro scorrimento la resistenza offerta dal fluido alla particella è proporzionale a $\mu V L$.

Discussione La costante di proporzionalità risulta funzione della forma della particella.



7.31 Una minuscola particella di aerosol di densità ρ_p e diametro caratteristico D_p cade liberamente in aria di densità ρ e viscosità μ. Se la particella è sufficientemente piccola, risulta valida l'approssimazione di moto di puro scorrimento e la velocità terminale di sedimentazione V dipende solo da D_p, da μ, dall'accelerazione di gravità g e dalla differenza di densità $(\rho_p - \rho)$. Utilizzando l'analisi dimensionale, stabilire la relazione che lega V alle variabili indipendenti.

Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.
Fase 1 Nel problema compaiono 5 parametri. Quindi, $n = 5$ e

$$V = f\left(D_p, \rho_p - \rho, \mu, g\right)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$[V] = [\mathrm{LT}^{-1}] \qquad [D_p] = [\mathrm{L}] \qquad [\rho_p - \rho] = [\mathrm{ML}^{-3}]$$
$$[\mu] = [\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}] \qquad [g] = [\mathrm{LT}^{-2}]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 5 - 3 = 2$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Si scelgono D_p, la differenza di densità $(\rho_p - \rho)$ e g.

Fase 4 Si deriva il Π dipendente

$$[\Pi_1] = \left[\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\right] = \left[V \cdot D_p^{a_1} \cdot (\rho_p - \rho)^{b_1} \cdot g^{c_1}\right] =$$
$$= \left[(\mathrm{LT}^{-1}) \cdot (\mathrm{L})^{a_1} \cdot (\mathrm{ML}^{-3})^{b_1} \cdot (\mathrm{LT}^{-2})^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$[\mathrm{M}^0] = \left[\mathrm{M}^{b_1}\right] \qquad 0 = b_1 \qquad b_1 = 0$$
$$[\mathrm{T}^0] = \left[\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2c_1}\right] \qquad 0 = -1 - 2c_1 \qquad c_1 = -\frac{1}{2}$$
$$[\mathrm{L}^0] = \left[\mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{a_1} \cdot \mathrm{L}^{-3b_1} \cdot \mathrm{L}^{c_1}\right] \qquad 0 = 1 + a_1 - 3b_1 + c_1 \qquad a_1 = -\frac{1}{2}$$

Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = \frac{V}{\sqrt{gD_p}}$$

che è un numero di Froude. Il Π indipendente è

$$[\Pi_2] = \left[\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\right] = \left[\mu \cdot D_p^{a_2} \cdot (\rho_p - \rho)^{b_2} \cdot g^{c_2}\right] =$$
$$= \left[(\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}) \cdot (\mathrm{L})^{a_2} \cdot (\mathrm{ML}^{-3})^{b_2} \cdot (\mathrm{LT}^{-2})^{c_2}\right]$$

Imponendo che Π_2 sia adimensionale si ottiene

$$[\mathrm{M}^0] = \left[\mathrm{M} \cdot \mathrm{M}^{b_2}\right] \qquad 0 = 1 + b_2 \qquad b_2 = -1$$
$$[\mathrm{T}^0] = \left[\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2c_2}\right] \qquad 0 = -1 - 2c_2 \qquad c_2 = -\frac{1}{2}$$
$$[\mathrm{L}^0] = \left[\mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{L}^{a_2} \cdot \mathrm{L}^{-3b_2} \cdot \mathrm{L}^{c_2}\right] \qquad 0 = -1 + a_2 - 3b_2 + c_2 \qquad a_2 = -\frac{3}{2}$$

Il gruppo Π_2 risulta quindi

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{(\rho_p - \rho) D_p^{3/2} \sqrt{g}}$$

Invertendo e scrivendo $D_p^{3/2}$ come $D_p\sqrt{D_p}$ si ottiene

$$\Pi_2' = \frac{(\rho_p - \rho) D_p \sqrt{g D_p}}{\mu}$$

che, se si considera che $\sqrt{g D_p}$ è una velocità, è una sorta di numero di Reynolds.

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta

$$\frac{V}{\sqrt{g D_p}} = f\left(\frac{(\rho_p - \rho) D_p \sqrt{g D_p}}{\mu}\right)$$

7.32 Combinando i risultati dei problemi 7.30 e 7.31, scrivere l'equazione della velocità di sedimentazione V di una particella di aerosol in aria, verificando che sia coerente con la relazione funzionale ottenuta nel problema precedente (a velocità costante, il peso della particella deve essere uguale alla resistenza al moto).

Analisi Uguagliando il peso P sommerso della particella alla resistenza al moto F_r, utilizzando il risultato del problema 7.30, si può scrivere

$$P = k_1(\rho_p - \rho) g D_p^3 = F_r = k_2\, \mu V D_p$$

essendo k_1 e k_2 due costanti, dipendenti dalla forma della particella. Ricavando la velocità, risulta

$$V = k\,\frac{(\rho_p - \rho) g D_p^2}{\mu}$$

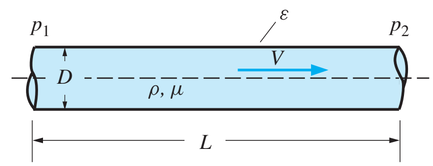
essendo $k = k_1/k_2$. Dividendo ambo i membri per $\sqrt{g D_p}$, si ottiene una relazione coerente con quella ottenuta nel problema precedente.

7.33 Una minuscola particella di aerosol cade in aria a velocità di sedimentazione costante V. Il numero di Reynolds è sufficientemente piccolo da poter considerare valida l'approssimazione di moto di puro scorrimento. Se il diametro della particella raddoppia, in che percentuale aumenta, a parità di tutto il resto, la velocità di caduta? Se invece raddoppia la differenza di densità $(\rho_p - \rho)$, in che percentuale aumenta, a parità di tutto il resto, la velocità di caduta?

Analisi Il risultato del problema precedente mostra che la velocità di sedimentazione V è proporzionale alla differenza di densità $(\rho_p - \rho)$ e al quadrato del diametro della particella. Pertanto, se il diametro raddoppia, la velocità aumenta di un fattore $2^2 = 4$, mentre se raddoppia la differenza di densità raddoppia anche la velocità.

Discussione Le conclusioni appena tratte valgono fino a che il moto rimane di puro scorrimento, cioè finché il numero di Reynolds Re è molto basso. Poiché aumentando la velocità aumenta dello stesso fattore anche Re, le conclusioni potrebbero non essere corrette qualora per i nuovi valori di Re il moto non fosse più di puro scorrimento.

7.34 Un fluido incomprimibile di densità ρ e viscosità μ defluisce, con velocità media V, in una tubazione orizzontale a sezione circolare di diametro D, lunghezza L e scabrezza ε. Il moto è completamente sviluppato, cioè il profilo di velocità nella sezione trasversale non varia nella direzione del moto. Il fluido è mantenuto in movimento dalla differenza di pressione $\Delta p = p_1 - p_2$ che si stabilisce tra due generiche sezioni, per vincere le resistenze al moto. Usando il metodo delle variabili ripetute, stabilire una relazione adimensionale tra Δp e gli altri parametri nel problema.



Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.

Fase 1 Nel problema compaiono 7 parametri. Quindi, $n = 7$ e

$$\Delta p = f\left(\rho, \mu, V, D, L, \varepsilon\right)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$\left[\Delta p\right] = \left[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right] \qquad \left[\rho\right] = \left[\mathrm{ML^{-3}}\right]$$
$$\left[\mu\right] = \left[\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}\right] \qquad \left[V\right] = \left[\mathrm{LT^{-1}}\right]$$
$$\left[D\right] = \left[\mathrm{L}\right] \qquad \left[L\right] = \left[\mathrm{L}\right] \qquad \left[\varepsilon\right] = \left[\mathrm{L}\right]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 7 - 3 = 4$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente Δp e notando che i parametri ε, L e D hanno le stesse dimensioni per cui se ne può scegliere solo una, si scelgono V, ρ e D.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$\left[\Pi_1\right] = \left[\mathrm{M^0L^0T^0}\right] = \left[\Delta p \cdot V^{a_1} \cdot \rho^{b_1} \cdot D^{c_1}\right] =$$
$$= \left[\left(\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right) \cdot \left(\mathrm{LT^{-1}}\right)^{a_1} \cdot \left(\mathrm{ML^{-3}}\right)^{b_1} \cdot \left(\mathrm{L}\right)^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\left[\mathrm{M^0}\right] = \left[\mathrm{M \cdot M^{b_1}}\right] \qquad 0 = 1 + b_1 \qquad b_1 = -1$$
$$\left[\mathrm{T^0}\right] = \left[\mathrm{T^{-2} \cdot T^{-a_1}}\right] \qquad 0 = -2 - a_1 \qquad a_1 = -2$$
$$\left[\mathrm{L^0}\right] = \left[\mathrm{L^{-1} \cdot L^{a_1} \cdot L^{-3b_1} \cdot L^{c_1}}\right] \qquad 0 = -1 + a_1 - 3b_1 + c_1 \qquad c_1 = 0$$

Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$$

Il primo Π indipendente è

$$\left[\Pi_2\right] = \left[\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\right] = \left[\mu \cdot V^{a_2} \cdot \rho^{b_2} \cdot D^{c_2}\right] = \\ = \left[\left(\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}\right) \cdot \left(\mathrm{LT}^{-1}\right)^{a_2} \cdot \left(\mathrm{ML}^{-3}\right)^{b_2} \cdot \left(\mathrm{L}\right)^{c_2}\right]$$

Imponendo che Π_2 sia adimensionale si ottiene

$$\begin{array}{lll} \left[\mathrm{M}^0\right] = \left[\mathrm{M} \cdot \mathrm{M}^{b_2}\right] & 0 = 1 + b_2 & b_2 = -1 \\ \left[\mathrm{T}^0\right] = \left[\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-a_2}\right] & 0 = -1 - a_2 & a_2 = -1 \\ \left[\mathrm{L}^0\right] = \left[\mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{L}^{a_2} \cdot \mathrm{L}^{-3b_2} \cdot \mathrm{L}^{c_2}\right] & 0 = -1 + a_2 - 3b_2 + c_2 & c_2 = -1 \end{array}$$

Il gruppo Π_2 risulta quindi

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

che è l'inverso del numero di Reynolds

$$\Pi_2' = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Il secondo Π indipendente è

$$\left[\Pi_3\right] = \left[\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\right] = \left[L \cdot V^{a_3} \cdot \rho^{b_3} \cdot D^{c_3}\right] = \\ = \left[\left(\mathrm{L}\right) \cdot \left(\mathrm{LT}^{-1}\right)^{a_3} \cdot \left(\mathrm{ML}^{-3}\right)^{b_3} \cdot \left(\mathrm{L}\right)^{c_3}\right]$$

Imponendo che Π_3 sia adimensionale si ottiene

$$\begin{array}{lll} \left[\mathrm{M}^0\right] = \left[\mathrm{M}^{b_3}\right] & 0 = b_3 & b_3 = 0 \\ \left[\mathrm{T}^0\right] = \left[\mathrm{T}^{-a_3}\right] & 0 = -a_3 & a_3 = 0 \\ \left[\mathrm{L}^0\right] = \left[\mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{a_3} \cdot \mathrm{L}^{-3b_3} \cdot \mathrm{L}^{c_3}\right] & 0 = 1 + a_3 - 3b_3 + c_3 & c_3 = -1 \end{array}$$

Il gruppo Π_3 risulta quindi

$$\Pi_3 = \frac{L}{D}$$

Analogamente, si può concludere che, avendo ε le stesse dimensioni di L, il terzo gruppo indipendente risulterà

$$\Pi_4 = \frac{\varepsilon}{D}$$

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f\left(\mathrm{Re}, \frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

7.35 In regime laminare, il moto non dipende dalla scabrezza della parete. Nella tubazione del problema precedente, la portata Q risulta quindi funzione del diametro D della tubazione, della viscosità μ del fluido e del gradiente di pressione dp/dx. In che percentuale aumenta la portata se, a parità di tutto il resto, il diametro della tubazione raddoppia?

Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.

Fase 1 Nel problema compaiono 4 parametri. Quindi, $n = 4$ e

$$Q = f\left(D, \mu, \frac{dp}{dx}\right)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$[Q] = [\mathrm{L^3T^{-1}}] \qquad [D] = [\mathrm{L}]$$
$$[\mu] = [\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}] \qquad \left[\frac{dp}{dx}\right] = [\mathrm{ML^{-2}T^{-2}}]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 4 - 3 = 1$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente, rimangono le altre tre.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$[\Pi_1] = [\mathrm{M^0L^0T^0}] = \left[Q \cdot \left(\frac{dp}{dx}\right)^{a_1} \cdot D^{b_1} \cdot \mu^{c_1}\right] =$$
$$= \left[(\mathrm{L^3T^{-1}}) \cdot (\mathrm{ML^{-2}T^{-2}})^{a_1} \cdot (\mathrm{L})^{b_1} \cdot (\mathrm{ML^{-1}T^{-1}})^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$[\mathrm{M^0}] = [\mathrm{M}^{a_1} \cdot \mathrm{M}^{c_1}] \qquad 0 = a_1 + c_1$$
$$[\mathrm{T^0}] = [\mathrm{T^{-1}} \cdot \mathrm{T}^{-2a_1} \cdot \mathrm{T}^{-c_1}] \qquad 0 = -1 - 2a_1 - c_1$$
$$0 = -1 - 2a_1 + a_1 \qquad a_1 = -1$$
$$c_1 = 1$$
$$[\mathrm{L^0}] = [\mathrm{L^3} \cdot \mathrm{L}^{-2a_1} \cdot \mathrm{L}^{b_1} \cdot \mathrm{L}^{-c_1}] \qquad 0 = 3 - 2a_1 + b_1 - c_1 \qquad b_1 = -4$$

Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = \frac{Q\mu}{\left(\frac{dp}{dx}\right) D^4}$$

Fase 6 Poiché esiste un solo gruppo adimensionale, esso deve essere costante, per cui $\Pi_1 = \text{costante} = k$ e, quindi,

$$Q = k\frac{D^4}{\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)$$

Pertanto, essendo la portata proporzionale alla quarta potenza del diametro, se il diametro raddoppia, la portata aumenta di un fattore $2^4 = 16$.

7.36 Una pompa, la cui sezione di ingresso ha diametro D, quando la sua girante ruota con velocità angolare ω solleva una portata Q di un liquido di densità ρ e viscosità μ. Stabilire una relazione adimensionale tra questi parametri e l'incremento di pressione Δp subito dal fluido.

Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.

Fase 1 Nel problema compaiono 6 parametri. Quindi, $n = 6$ e

$$\Delta p = f\left(\rho, \omega, D, \mu, Q\right)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$\left[\Delta p\right] = \left[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right] \qquad \left[\rho\right] = \left[\mathrm{ML^{-3}}\right] \qquad \left[\omega\right] = \left[\mathrm{T^{-1}}\right]$$
$$\left[D\right] = \left[\mathrm{L}\right] \qquad \left[\mu\right] = \left[\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}\right] \qquad \left[Q\right] = \left[\mathrm{L^3T^{-1}}\right]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 6 - 3 = 3$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Si scelgono ρ, ω e D.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$\left[\Pi_1\right] = \left[\mathrm{M^0L^0T^0}\right] = \left[\Delta p \cdot \rho^{a_1} \cdot \omega^{b_1} \cdot D^{c_1}\right] = \\ = \left[\left(\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right) \cdot \left(\mathrm{ML^{-3}}\right)^{a_1} \cdot \left(\mathrm{T^{-1}}\right)^{b_1} \cdot \left(\mathrm{L}\right)^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\left[\mathrm{M^0}\right] = \left[\mathrm{M \cdot M^{a_1}}\right] \qquad 0 = 1 + a_1 \qquad a_1 = -1$$
$$\left[\mathrm{L^0}\right] = \left[\mathrm{L^{-1} \cdot L^{-3a_1} \cdot L^{c_1}}\right] \qquad 0 = -1 - 3a_1 + c_1 \qquad c_1 = -2$$
$$\left[\mathrm{T^0}\right] = \left[\mathrm{T^{-2} \cdot T^{-b_1}}\right] \qquad 0 = -2 - b_1 \qquad b_1 = -2$$

Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho \omega^2 D^2}$$

Il primo Π indipendente è

$$\left[\Pi_2\right] = \left[\mathrm{M^0L^0T^0}\right] = \left[\mu \cdot \rho^{a_2} \cdot \omega^{b_2} \cdot D^{c_2}\right] = \\ = \left[\left(\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}\right) \cdot \left(\mathrm{ML^{-3}}\right)^{a_2} \cdot \left(\mathrm{T^{-1}}\right)^{b_2} \cdot \left(\mathrm{L}\right)^{c_2}\right]$$

Imponendo che Π_2 sia adimensionale si ottiene

$$\left[\mathrm{M^0}\right] = \left[\mathrm{M \cdot M^{a_2}}\right] \qquad 0 = 1 + a_2 \qquad a_2 = -1$$
$$\left[\mathrm{L^0}\right] = \left[\mathrm{L^{-1} \cdot L^{-3a_2} \cdot L^{c_2}}\right] \qquad 0 = -1 - 3a_2 + c_2 \qquad c_2 = -2$$
$$\left[\mathrm{T^0}\right] = \left[\mathrm{T^{-1} \cdot T^{-b_2}}\right] \qquad 0 = -1 - b_2 \qquad b_2 = -1$$

Il gruppo Π_2 risulta quindi

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho\omega D^2}$$

che è l'inverso di una sorta di numero di Reynolds

$$\Pi_2' = \frac{\rho\omega D^2}{\mu}$$

Il secondo Π indipendente è

$$\begin{aligned}\left[\Pi_3\right] = \left[\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\right] &= \left[Q \cdot \rho^{a_3} \cdot \omega^{b_3} \cdot D^{c_3}\right] = \\ &= \left[\left(\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-1}\right) \cdot \left(\mathrm{ML}^{-3}\right)^{a_3} \cdot \left(\mathrm{T}^{-1}\right)^{b_3} \cdot \left(\mathrm{L}\right)^{c_3}\right]\end{aligned}$$

Imponendo che Π_3 sia adimensionale si ottiene

$$\begin{array}{lll}\left[\mathrm{M}^0\right] = \left[\mathrm{M}^{a_3}\right] & 0 = a_3 & a_3 = 0 \\ \left[\mathrm{L}^0\right] = \left[\mathrm{L}^3 \cdot \mathrm{L}^{-3a_3} \cdot \mathrm{L}^{c_3}\right] & 0 = 3 - 3a_3 + c_3 & c_3 = -3 \\ \left[\mathrm{T}^0\right] = \left[\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-b_3}\right] & 0 = -1 - b_3 & b_3 = -1\end{array}$$

Il gruppo Π_3 risulta quindi

$$\Pi_3 = \frac{Q}{\omega D^3}$$

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta

$$\frac{\Delta p}{\rho\omega^2 D^2} = f\left(\frac{\rho\omega D^2}{\mu}, \frac{Q}{\omega D^3}\right)$$

Prove sperimentali e similitudine incompleta

7.37 Qual è la regola da seguire per evitare che in galleria del vento le pareti influenzino il moto attorno a un modello? Perché si avrebbero errori di misura se non si seguisse tale regola?

Analisi Se il rapporto tra l'area frontale del modello e l'area della sezione trasversale della galleria non è piccolo, l'aria accelera attorno al modello in maniera significativa, per cui il moto non può più considerarsi non confinato. Conseguentemente, non è più pienamente soddisfatta la similitudine cinematica e ciò porta, ad esempio, ad una resistenza aerodinamica maggiore. Pertanto, si segue la regola che l'area frontale del modello sia inferiore al 7,5% dell'area della sezione trasversale della galleria in corrispondenza del tratto di prova.

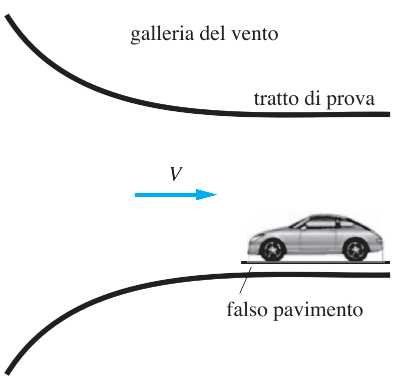
7.38 Qual è il valore limite del numero di Mach al di sotto del quale è accettabile l'approssimazione di fluido incomprimibile? Perché le prove in galleria del vento vanno condotte con numero di Mach inferiore a tale valore?

Analisi Il **numero di Mach Ma** è dato dal rapporto tra la velocità v del moto e la velocità c con la quale si propaga il suono nel mezzo aeriforme. La variazione della densità di un gas in moto dipende dal numero di Mach. Poiché per $\mathrm{Ma} < 0{,}3$ le variazioni di densità sono all'incirca inferiori al 5%, in tal caso, per semplicità, è possibile studiare il moto del gas come fosse incomprimibile senza commettere un errore apprezzabile. Quindi, le prove in galleria del vento vanno condotte con numero di Mach inferiore a 0,3 perché, per valori superiori, per la comprimibilità dell'aria non sussisterebbe più la similitudine tra modello e prototipo.

7.39 Abitualmente, un modello è più piccolo del prototipo. In quali situazioni è meglio che il modello sia *più grande* del prototipo?

Analisi Le situazioni in cui risulta più utile un modello più grande del prototipo sono relative a campi di moto di dimensioni ridotte e/o con velocità elevate. In tali casi, infatti, un modello di dimensioni maggiori e con velocità minori rende le misure e la visualizzazione del moto più semplici e precise. Alcuni esempi sono:

- il moto degli insetti
- il moto di sedimentazione di piccole particelle in acqua o in aria
- il moto di goccioline d'acqua all'interno delle nuvole
- il moto in tubi di diametro molto piccolo
- il moto in sistemi biologici, come quello del sangue nei capillari o dell'aria nei bronchi.

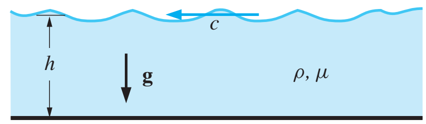


7.40 Qual è il motivo della presenza dei tapis roulant nelle prove in galleria del vento su modelli di autoveicoli? Se la galleria non è dotata di tapis roulant, quale soluzione alternativa si può adottare?

Analisi Osservando il moto di un'automobile da un sistema di riferimento solidale con essa, sia l'aria che la superficie stradale vanno incontro all'automobile con la stessa velocità. Quando si effettuano prove in galleria del vento su modelli di autoveicoli, l'aria è in moto attorno al modello ma, se il pavimento è fermo, le caratteristiche del moto in galleria non sono uguali a quelle del prototipo. In particolare, al di sotto del modello si sviluppa uno strato limite di velocità la cui presenza rende non pienamente soddisfatta la similitudine cinematica. In alternativa all'uso del tapis roulant, si potrebbe collocare il modello su una sottile lastra (falso pavimento) posta subito al di sopra dello strato limite del pavimento, in modo da ridurre lo spessore dello strato limite e rendere così la sua influenza sul moto praticamente trascurabile.

7.41 La celerità c con cui si propaga un'onda sulla superficie di un liquido è funzione dell'altezza h, dell'accelerazione di gravità g, della densità del fluido ρ e della viscosità μ. Usando l'analisi dimensionale, mostrare che in un problema di moto ondoso in acque basse sia il numero di Froude sia il numero di Reynolds sono parametri adimensionali significativi. Manipolare i gruppi Π in modo da ottenere i parametri nella forma

$$\mathrm{Fr} = \frac{c}{\sqrt{gh}} = f\,(\mathrm{Re}) \qquad \text{in cui} \qquad \mathrm{Re} = \frac{\rho c h}{\mu}$$



Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.

Fase 1 Nel problema compaiono 5 parametri. Quindi, $n = 5$ e

$$c = f(h, g, \rho, \mu)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$[c] = [\mathrm{LT}^{-1}] \qquad [g] = [\mathrm{LT}^{-2}]$$
$$[\rho] = [\mathrm{ML}^{-3}] \qquad [\mu] = [\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 5 - 3 = 2$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Si scelgono h, ρ e g.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$[\Pi_1] = [\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0] = [c \cdot h^{a_1} \cdot \rho^{b_1} \cdot g^{c_1}] = \\ = [(\mathrm{LT}^{-1}) \cdot (\mathrm{L})^{a_1} \cdot (\mathrm{ML}^{-3})^{b_1} \cdot (\mathrm{LT}^{-2})^{c_1}]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$[\mathrm{M}^0] = [\mathrm{M}^{b_1}] \qquad 0 = b_1 \qquad b_1 = 0$$
$$[\mathrm{T}^0] = [\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2c_1}] \qquad 0 = -1 - 2c_1 \qquad c_1 = -\frac{1}{2}$$
$$[\mathrm{L}^0] = [\mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{a_1} \cdot \mathrm{L}^{-3b_1} \cdot \mathrm{L}^{c_1}] \qquad 0 = 1 + a_1 - 3b_1 + c_1 \qquad a_1 = -\frac{1}{2}$$

Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = \frac{c}{\sqrt{gh}}$$

che è un numero di Froude. Il Π indipendente è

$$[\Pi_2] = [\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0] = [\mu \cdot h^{a_2} \cdot \rho^{b_2} \cdot g^{c_2}] = \\ = [(\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}) \cdot (\mathrm{L})^{a_2} \cdot (\mathrm{ML}^{-3})^{b_2} \cdot (\mathrm{LT}^{-2})^{c_2}]$$

Imponendo che Π_2 sia adimensionale si ottiene

$$[\mathrm{M}^0] = [\mathrm{M} \cdot \mathrm{M}^{b_2}] \qquad 0 = 1 + b_2 \qquad b_2 = -1$$
$$[\mathrm{T}^0] = [\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2c_2}] \qquad 0 = -1 - 2c_2 \qquad c_2 = -\frac{1}{2}$$
$$[\mathrm{L}^0] = [\mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{L}^{a_2} \cdot \mathrm{L}^{-3b_2} \cdot \mathrm{L}^{c_2}] \qquad 0 = -1 + a_2 - 3b_2 + c_2 \qquad a_2 = -\frac{3}{2}$$

Il gruppo Π_2 risulta quindi

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho h^{3/2}\sqrt{g}}$$

Invertendo, scrivendo $h^{3/2}$ come $h\sqrt{h}$ e moltiplicando per Π_1, si ottiene

$$\Pi'_2 = \frac{\rho c h}{\mu}$$

che è un numero di Reynolds.

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta

$$\mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gh}} = f(\mathrm{Re})$$

con

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho c h}{\mu}$$

7.42 Una piccola galleria del vento di un laboratorio didattico ha una sezione trasversale di 50 cm × 50 cm ed è lunga 1,2 m. La massima velocità dell'aria è di 50 m/s. Alcuni studenti devono costruire un modello di un autotreno, lungo 15 m, largo 2,5 m e alto 3,6 m, per studiare l'effetto dell'arrotondamento della parte posteriore del rimorchio sulla resistenza aerodinamica. In galleria del vento l'aria è a pressione atmosferica e alla temperatura di 25 °C. Qual è la massima scala alla quale gli studenti possono costruire il modello affinché il moto attorno ad esso non sia influenzato in maniera significativa dalle pareti della galleria? Qual è il massimo valore del numero di Reynolds del modello che può essere raggiunto? È possibile raggiungere il campo di valori in cui il moto risulta indipendente dal numero di Reynolds?

Analisi Affinché il moto attorno al modello non sia influenzato in maniera significativa dalle pareti della galleria, l'area frontale del modello deve essere inferiore al 7,5% dell'area della sezione trasversale della galleria in corrispondenza del tratto di prova. Essendo l'area della sezione trasversale in tale tratto

$$A = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25 \text{ m}^2$$

il modello può avere un'area frontale massima pari al 7,5% di tale valore, cioè

$$A_m = 0{,}075 \times 0{,}25 = 0{,}01875 \text{ m}^2$$

Essendo l'area frontale del prototipo

$$A_p = 2{,}5 \times 3{,}6 = 9 \text{ m}^2$$

si ha un rapporto di scala tra le aree

$$\frac{A_m}{A_p} = \frac{0{,}01875}{9} = 0{,}002083$$

e un rapporto di scala tra le lunghezze

$$\frac{L_m}{L_p} = \sqrt{0{,}002083} = 0{,}04564$$

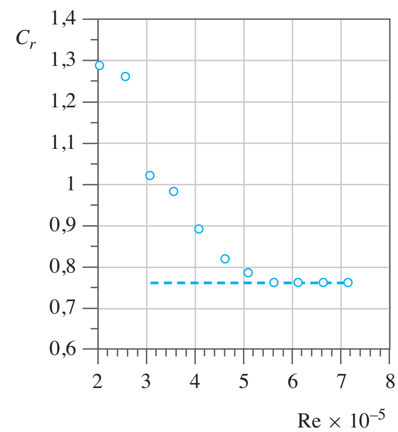
pari a 1:22 circa.

Il massimo valore del numero di Reynolds che può essere raggiunto si ha in corrispondenza del massimo valore di velocità in galleria e della massima larghezza del modello L_{max}

$$L_{max} = 0{,}04564 \times L_p = 0{,}04564 \times 2{,}5 = 0{,}114 \text{ m}$$

per cui, avendo l'aria a 25 °C densità $\rho = 1{,}184$ kg/m^3 e viscosità $\mu = 1{,}849 \times 10^{-5}$ Pa · s, si ha

$$\mathrm{Re}_{max} = \frac{\rho V_{max} L_{max}}{\mu} = \frac{1{,}184 \times 50 \times 0{,}114}{1{,}849 \times 10^{-5}} = 365\,300$$



I risultati dell'Esempio 7.8, sintetizzati nella figura a fianco, mostrano che il coefficiente di resistenza aerodinamica non dipende più dal numero di Reynolds per valori di Re $> 5{,}5 \times 10^5$. Pertanto, con le prove effettuabili nella galleria del vento, essendo $\mathrm{Re}_{max} = 3{,}55 \times 10^5$, non è possibile raggiungere il campo di valori di Re in cui il moto è indipendente dal numero di Reynolds.

7.43 Si deve testare in galleria del vento un modello in scala 1:16 di una nuova vettura sportiva. Il prototipo è lungo 4,37 m, alto 1,30 m e largo 1,69 m. La galleria è dotata di tapis roulant la cui velocità, durante le prove, è sempre uguale a quella dell'aria. Al variare della velocità dell'aria nella galleria, vengono rilevati i valori di resistenza aerodinamica del modello riportati nella tabella. Calcolare i valori del coefficiente di resistenza C_{rm} del modello e riportarne i valori in un grafico in funzione del numero di Reynolds Re_m, usando, nel calcolo del coefficiente di resistenza, l'area frontale del modello (larghezza × altezza) e, nel calcolo del numero di Reynolds, la larghezza del modello come lunghezza caratteristica. Stabilire se c'è similitudine dinamica tra modello e prototipo e se è stato raggiunto il campo di valori in cui il moto risulta indipendente dal numero di Reynolds. Stimare, inoltre, la resistenza aerodinamica del prototipo, quando questo viaggia a una velocità di 29 m/s, ipotizzando che l'aria, sia in galleria del vento che attorno al prototipo, sia a pressione atmosferica e a una temperatura di 25°C.

V (m/s)	F_{rm} (N)
10	0,29
15	0,64
20	0,96
25	1,41
30	1,55
35	2,10
40	2,65
45	3,28
50	4,07
55	4,91

Analisi Il coefficiente di resistenza del modello ed il numero di Reynolds sono, rispettivamente,

$$C_{rm} = \frac{F_{rm}}{\frac{1}{2}\rho_m V_m^2 A_m}$$

e

$$\mathrm{Re}_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m}$$

Essendo

$$\frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

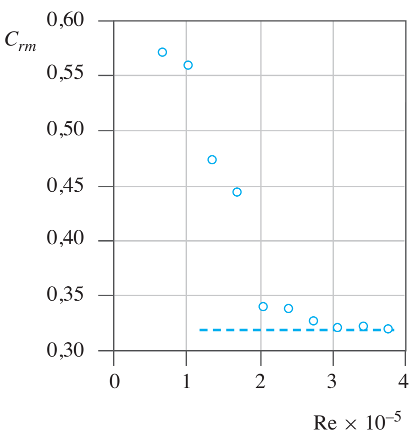
si ha

$$L_m = 0{,}0625\, L_p = 0{,}0625 \times 1{,}69 = 0{,}106 \text{ m}$$

$$A_m = A_p\left(\frac{1}{16}\right)^2 = 1{,}30 \times 1{,}69 \times 0{,}0625^2 = 0{,}00858 \text{ m}^2$$

Avendo l'aria a 25 °C densità $\rho = 1{,}184$ kg/m^3 e viscosità $\mu = 1{,}849 \times 10^{-5}$ Pa · s, con i valori rilevati si ottiene:

V (m/s)	F_{rm} (N)	C_{rm}	Re $\times 10^{-5}$
10	0,29	0,571	0,68
15	0,64	0,560	1,01
20	0,96	0,472	1,35
25	1,41	0,444	1,69
30	1,55	0,339	2,03
35	2,10	0,337	2,37
40	2,65	0,326	2,71
45	3,28	0,319	3,04
50	4,07	0,320	3,38
55	4,91	0,319	3,72



Il numero di Reynolds del prototipo, alla velocità di 29 m/s (104 km/h), è

$$\mathrm{Re}_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p} = \frac{1{,}184 \times 29{,}0 \times 1{,}69}{1{,}849 \times 10^{-5}} = 31{,}4 \times 10^5$$

cioè circa 8 volte quello del modello alla velocità massima di prova. Pertanto, non essendo uguali i due numeri di Reynolds, non esiste similitudine dinamica. Dalla tabella sopra riportata o dal grafico di C_r in funzione di Re emerge che, per Re $> 3 \times 10^5$, C_r **non dipende da Re** e vale circa 0,32. Pertanto, tale risultato si può estrapolare a valori del numero di Reynolds maggiori del valore di soglia (3×10^5). Alla velocità di 29 m/s, essendo

$$A_p = 1{,}30 \times 1{,}69 = 2{,}197 \text{ m}^2$$

la forza di trascinamento sul prototipo risulta

$$F_{rp} = \frac{1}{2} C_r \rho_p V_p^2 A_p = \frac{1}{2} \times 0{,}32 \times 1{,}184 \times 29{,}0^2 \times 2{,}197 = 350 \text{ N}$$

Riepilogo

7.44 Stabilire quale delle seguenti affermazioni è vera, giustificando brevemente la risposta:

(*a*) la similitudine cinematica è condizione necessaria e sufficiente per la similitudine dinamica;
(*b*) la similitudine geometrica è condizione necessaria per la similitudine dinamica;
(*c*) la similitudine geometrica è condizione necessaria per la similitudine cinematica;
(*d*) la similitudine dinamica è condizione necessaria per la similitudine cinematica.

Analisi

(*a*) **Falso**: la similitudine cinematica è condizione necessaria ma non sufficiente per la similitudine dinamica;

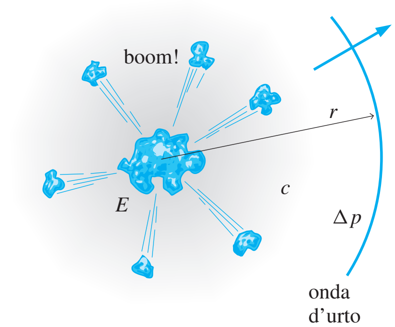
(*b*) **Vero**: non può aversi similitudine dinamica se modello e prototipo non sono geometricamente simili;
(*c*) **Vero**: non può aversi similitudine cinematica se modello e prototipo non sono geometricamente simili;
(*d*) **Falso**: è possibile avere similitudine cinematica (il rapporto tra le velocità nel modello e nel prototipo è uguale in tutti i punti) senza che si abbia similitudine dinamica (il rapporto tra le forze nel modello e nel prototipo non è uguale nei diversi punti).

7.45 Citare qualche esempio di moto nel modello e nel prototipo caratterizzati da similitudine geometrica e stesso numero di Reynolds, ma non da similitudine cinematica.

Analisi Alcuni esempi potrebbero essere:

- prove in galleria del vento su un modello di automobile in cui è soddisfatta la similitudine geometrica e assicurata l'uguaglianza tra i numeri di Reynolds ma è assente il tapis-roulant, per cui non è soddisfatta la similitudine cinematica;
- prove in galleria del vento su un modello di aeroplano in cui è soddisfatta la similitudine geometrica e assicurata l'uguaglianza tra i numeri di Reynolds ma non quella tra i numeri di Mach, per cui non è soddisfatta la similitudine cinematica;
- modello di moto a superficie libera in cui è soddisfatta la similitudine geometrica e assicurata l'uguaglianza tra i numeri di Reynolds ma non quella tra i numeri di Froude, per cui non è soddisfatta la similitudine cinematica.

7.46 Quando un missile colpisce il bersaglio, si ha una esplosione dalla quale parte un'onda d'urto che si propaga in ogni direzione. Il salto di pressione Δp attraverso l'onda e la distanza r dal punto in cui si ha l'esplosione sono funzioni del tempo t, della velocità del suono c e della quantità di energia E prodotta dall'esplosione. (*a*) Stabilire una relazione adimensionale tra Δp e gli altri parametri e tra r e gli altri parametri. (*b*) Misurando il tempo dall'istante in cui si ha l'esplosione, di quanto diminuisce Δp al tempo $2t$ rispetto al valore al tempo t?



Analisi (*a*) I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.
Fase 1 Nel primo problema compaiono 4 parametri. Quindi, $n = 4$ e

$$\Delta p = f\,(t, c, E)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$[\Delta p] = [\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}] \qquad [t] = [\mathrm{T}]$$
$$[c] = [\mathrm{LT^{-1}}] \qquad [E] = [\mathrm{ML^{2}T^{-2}}]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 4 - 3 = 1$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente, la scelta è limitata ai tre parametri indipendenti t, c e E.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$\left[\Pi_1\right] = \left[M^0L^0T^0\right] = \left[\Delta p \cdot t^{a_1} \cdot c^{b_1} \cdot E^{c_1}\right] = \\ = \left[\left(ML^{-1}T^{-2}\right) \cdot (T)^{a_1} \cdot \left(LT^{-1}\right)^{b_1} \cdot \left(ML^2T^{-2}\right)^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\begin{array}{lll} \left[M^0\right] = \left[M \cdot M^{c_1}\right] & 0 = 1 + c_1 & c_1 = -1 \\ \left[L^0\right] = \left[L^{-1} \cdot L^{b_1} \cdot L^{2c_1}\right] & 0 = -1 + b_1 + 2c_1 & b_1 = 3 \\ \left[T^0\right] = \left[T^{-2} \cdot T^{a_1} \cdot T^{-b_1} \cdot T^{-2c_1}\right] & 0 = -2 + a_1 - b_1 - 2c_1 & a_1 = 3 \end{array}$$

Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = \Delta p \, \frac{t^3c^3}{E}$$

Fase 6 Vi è un solo Π, che non è funzione di alcun altro parametro. Per cui deve essere necessariamente costante. La relazione funzionale finale risulta

$$\Delta p = \text{costante} \, \frac{E}{t^3c^3}$$

Passando al secondo problema, si hanno ancora 4 parametri.

Fase 1 Si ha $n = 4$ e

$$r = f\,(t, c, E)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$\begin{array}{ll} [r] = [L] & [t] = [T] \\ [c] = [LT^{-1}] & [E] = [ML^2T^{-2}] \end{array}$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 4 - 3 = 1$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente, la scelta è limitata ai tre parametri indipendenti t, c e E.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$\left[\Pi_1\right] = \left[M^0L^0T^0\right] = \left[r \cdot t^{a_1} \cdot c^{b_1} \cdot E^{c_1}\right] = \\ = \left[(L) \cdot (T)^{a_1} \cdot \left(LT^{-1}\right)^{b_1} \cdot \left(ML^2T^{-2}\right)^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\begin{array}{lll} \left[M^0\right] = \left[M^{c_1}\right] & 0 = c_1 & c_1 = 0 \\ \left[L^0\right] = \left[L \cdot L^{b_1} \cdot L^{2c_1}\right] & 0 = 1 + b_1 + 2c_1 & b_1 = -1 \\ \left[T^0\right] = \left[T^{a_1} \cdot T^{-b_1} \cdot T^{-2c_1}\right] & 0 = a_1 - b_1 - 2c_1 & a_1 = -1 \end{array}$$

Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = \frac{r}{tc}$$

Fase 6 Vi è un solo Π, che non è funzione di alcun altro parametro. Per cui deve essere necessariamente costante. La relazione funzionale finale risulta

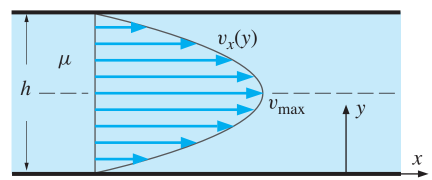
$$r = \text{costante} \cdot tc$$

(b) La prima relazione funzionale mostra che Δp è inversamente proporzionale a t^3. Pertanto, se al tempo t_1 il salto di pressione è Δp_1, al tempo $t_2 = 2t_1$ si ha

$$\Delta p_2 = \frac{\Delta p_1}{2^3} = \frac{\Delta p_1}{8}$$

Discussione Il salto di pressione attraverso l'onda d'urto decresce rapidamente col tempo (e con la distanza dal punto in cui avviene l'esplosione).

7.47 Si consideri il moto permanente, in regime laminare, di un fluido incomprimibile tra due lastre piane parallele indefinite, bidimensionale nel piano xy, forzato da un gradiente di pressione dp/dx costante e negativo (moto alla Poiseuille). Per le caratteristiche del moto, non ci sono effetti di inerzia e la densità non è un parametro significativo. La componente v_x della velocità nella direzione del moto risulta funzione della distanza h tra le due lastre, del gradiente di pressione dp/dx, della viscosità μ e della coordinata verticale y. Utilizzando l'analisi dimensionale, stabilire una relazione tra tali variabili.



Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.

Fase 1 Nel problema compaiono 5 parametri. Quindi, $n = 5$ e

$$v_x = f\left(h, \frac{dp}{dx}, \mu, y\right)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$[v_x] = [\mathrm{LT^{-1}}] \qquad [h] = [\mathrm{L}]$$
$$\left[\frac{dp}{dx}\right] = [\mathrm{ML^{-2}T^{-2}}] \qquad [\mu] = [\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}] \qquad [y] = [\mathrm{L}]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 5 - 3 = 2$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente e la lunghezza y, che ha le stesse dimensioni di h ma è una quantità variabile, si scelgono h, dp/dx e μ.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$[\Pi_1] = [\mathrm{M^0L^0T^0}] = \left[v_x \cdot h^{a_1} \cdot \left(\frac{dp}{dx}\right)^{b_1} \cdot \mu^{c_1}\right] =$$
$$= \left[(\mathrm{LT^{-1}}) \cdot (\mathrm{L})^{a_1} \cdot (\mathrm{ML^{-2}T^{-2}})^{b_1} \cdot (\mathrm{ML^{-1}T^{-1}})^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{M}^0] = [\mathrm{M}^{b_1} \cdot \mathrm{M}^{c_1}] && 0 = b_1 + c_1 && b_1 = -c_1 \\
&[\mathrm{T}^0] = [\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2b_1} \cdot \mathrm{T}^{-c_1}] && 0 = -1 - 2b_1 - c_1 && c_1 = 1 \\
&[\mathrm{L}^0] = [\mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{a_1} \cdot \mathrm{L}^{-2b_1} \cdot \mathrm{L}^{-c_1}] && 0 = 1 + a_1 - 2b_1 - c_1 && a_1 = -2
\end{aligned}$$

Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = \frac{v_x \mu}{\left(\dfrac{dp}{dx}\right) h^2}$$

Il Π indipendente è direttamente

$$\Pi_2 = \frac{y}{h}$$

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta

$$\Pi_1 = \frac{v_x \mu}{\left(\dfrac{dp}{dx}\right) h^2} = f\left(\frac{y}{h}\right)$$

7.48 Nel problema precedente, la velocità è massima in corrispondenza della mezzeria. Stabilire una relazione adimensionale che esprima la velocità massima $v_{\max}$ in funzione della distanza h tra le lastre, del gradiente di pressione dp/dx e della viscosità del fluido μ. Stabilire, inoltre, di quanto varia $v_{\max}$ se, a parità di tutto il resto, raddoppia la distanza h tra i piani o il gradiente dp/dx e qual è il numero minimo di prove sperimentali necessarie per descrivere la relazione completa tra $v_{\max}$ e le variabili da cui essa dipende.

Analisi Utilizzando i risultati del problema precedente, poiché $v_{\max}$ ha le stesse dimensioni di v_x, si può direttamente concludere che il gruppo dipendente risulterà

$$\Pi_1 = \frac{v_{\max} \mu}{\left(\dfrac{dp}{dx}\right) h^2}$$

e che esso sarà l'unico gruppo, poiché tra i parametri non compare più y. Non dovendo Π_1 dipendere da null'altro, esso dovrà essere costante

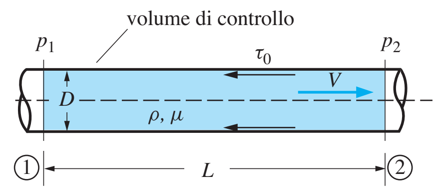
$$\Pi_1 = \frac{v_{\max} \mu}{\left(\dfrac{dp}{dx}\right) h^2} = k$$

per cui

$$v_{\max} = k \frac{h^2}{\mu} \left(\frac{dp}{dx}\right)$$

Pertanto, la velocità massima risulta proporzionale al gradiente di pressione e al quadrato della distanza tra i piani. Per cui, se raddoppia il gradiente di pressione, la velocità massima raddoppia, mentre se raddoppia la distanza tra i piani, la velocità massima aumenta di un fattore $2^2 = 4$. Per determinare il valore della costante, poiché esiste un solo gruppo adimensionale, è sufficiente, in teoria, condurre un'unica prova sperimentale. In realtà, per ridurre l'effetto degli errori sperimentali, è opportuno condurre più prove e calcolare la costante come valore medio di quelli delle singole prove.

7.49 La caduta di pressione $\Delta p = p_1 - p_2$ in un tratto di tubazione cilindrica può essere espressa in funzione dello sforzo tangenziale alla parete τ_0. In termini di gruppi adimensionali, sono due i parametri che figurano nel problema: il rapporto $\Delta p/\rho V^2$ (numero di Eulero Eu) e l'indice di resistenza λ. Usando il volume di controllo indicato in figura, stabilire una relazione che esprima λ in funzione di Eu.



Analisi L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra le sezioni 1 e 2, essendo $\mathbf{\Pi}_0$, $\mathbf{\Pi}_1$ e $\mathbf{\Pi}_2$ le spinte che, rispettivamente, la parete della tubazione e le sezioni di ingresso e di uscita esercitano sul fluido, diviene

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_0 + \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e i flussi di quantità di moto entranti e uscenti uguali e contrari, per cui $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$, la spinta $\mathbf{S}$ che il fluido esercita sulla parete, uguale e contraria a $\mathbf{\Pi}_0$, risulta

$$\mathbf{S} = -\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_2$$

Proiettando nella direzione del moto, che per semplicità si assume orizzontale, la componente S_x della spinta del fluido sulla parete è

$$S_x = \Pi_1 - \Pi_2 = p_1 \frac{\pi D^2}{4} - p_2 \frac{\pi D^2}{4} = \Delta p \frac{\pi D^2}{4}$$

Tale forza risulta da una distribuzione di sforzi tangenziali τ_0 sulla parete della tubazione, distribuzione che, per la simmetria rispetto all'asse e per l'uniformità del moto, è uniforme sull'intera superficie laterale del volume di controllo. Pertanto, essendo L la distanza tra le due sezioni, si ha

$$S_x = \Delta p \frac{\pi D^2}{4} = \tau_0 \pi D L$$

da cui

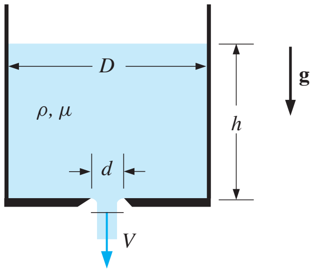
$$\Delta p = \frac{4L}{D} \tau_0$$

Dividendo ambo i membri per ρV^2, al fine di ottenere un numero di Eulero al primo membro, si ha

$$\mathrm{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho V^2} = \frac{1}{\rho V^2} \frac{4L}{D} \tau_0 = \frac{1}{2} \frac{L}{D} \left(\frac{8\tau_0}{\rho V^2} \right)$$

La quantità tra parentesi all'ultimo membro, adimensionale, è l'indice di resistenza λ della formula di Darcy-Weisbach (vedi Cap. 8). Pertanto, in definitiva, si ha

$$\lambda = \frac{8\tau_0}{\rho V^2} = 2 \frac{D}{L} \mathrm{Eu}$$



7.50 Un liquido di densità ρ e viscosità μ fuoriesce da una luce di diametro d praticata sul fondo orizzontale di un recipiente cilindrico di diametro D. Inizialmente, l'altezza del liquido nel recipiente è h. Usando l'analisi dimensionale, stabilire una relazione che leghi la velocità di efflusso V ai parametri da cui dipende.

Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.

Fase 1 Nel problema compaiono 7 parametri. Quindi, $n = 7$ e

$$V = f\left(d, D, \rho, \mu, h, g\right)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$\left[V\right] = \left[\mathrm{LT}^{-1}\right] \qquad \left[d\right] = \left[\mathrm{L}\right] \qquad \left[D\right] = \left[\mathrm{L}\right]$$
$$\left[\rho\right] = \left[\mathrm{ML}^{-3}\right] \qquad \left[\mu\right] = \left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}\right] \qquad \left[h\right] = \left[\mathrm{L}\right] \qquad \left[g\right] = \left[\mathrm{LT}^{-2}\right]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 7 - 3 = 4$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente e i parametri che hanno le stesse dimensioni, si scelgono h, ρ e g.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$\left[\Pi_1\right] = \left[\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\right] = \left[V \cdot h^{a_1} \cdot \rho^{b_1} \cdot g^{c_1}\right] = \\ = \left[\left(\mathrm{LT}^{-1}\right) \cdot \left(\mathrm{L}\right)^{a_1} \cdot \left(\mathrm{ML}^{-3}\right)^{b_1} \cdot \left(\mathrm{LT}^{-2}\right)^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\left[\mathrm{M}^0\right] = \left[\mathrm{M}^{b_1}\right] \qquad 0 = b_1 \qquad b_1 = 0$$
$$\left[\mathrm{T}^0\right] = \left[\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2c_1}\right] \qquad 0 = -1 - 2c_1 \qquad c_1 = -\frac{1}{2}$$
$$\left[\mathrm{L}^0\right] = \left[\mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{a_1} \cdot \mathrm{L}^{-3b_1} \cdot \mathrm{L}^{c_1}\right] \qquad 0 = 1 + a_1 - 3b_1 + c_1 \qquad a_1 = -\frac{1}{2}$$

Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = \frac{V}{\sqrt{gh}}$$

che è un numero di Froude. I gruppi indipendenti Π_2 e Π_3 si ottengono immediatamente come

$$\Pi_2 = \frac{d}{h}$$

e

$$\Pi_3 = \frac{D}{h}$$

L'ultimo gruppo è quello che contiene la viscosità:

$$\left[\Pi_4\right] = \left[\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\right] = \left[\mu \cdot h^{a_4} \cdot \rho^{b_4} \cdot g^{c_4}\right] = \\ = \left[\left(\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}\right) \cdot \left(\mathrm{L}\right)^{a_4} \cdot \left(\mathrm{ML}^{-3}\right)^{b_4} \cdot \left(\mathrm{LT}^{-2}\right)^{c_4}\right]$$

Imponendo che Π_4 sia adimensionale si ottiene

$$\begin{array}{lll} \left[\mathrm{M}^0\right] = \left[\mathrm{M} \cdot \mathrm{M}^{b_4}\right] & 0 = 1 + b_4 & b_4 = -1 \\ \left[\mathrm{T}^0\right] = \left[\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2c_4}\right] & 0 = -1 - 2c_4 & c_4 = -\dfrac{1}{2} \\ \left[\mathrm{L}^0\right] = \left[\mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{L}^{a_4} \cdot \mathrm{L}^{-3b_4} \cdot \mathrm{L}^{c_4}\right] & 0 = -1 + a_4 - 3b_4 + c_4 & a_4 = -\dfrac{3}{2} \end{array}$$

Il gruppo Π_4 risulta quindi

$$\Pi_4 = \frac{\mu}{\rho h^{3/2}\sqrt{g}}$$

Invertendo e scrivendo $h^{3/2}$ come $h\sqrt{h}$, si ottiene

$$\Pi_4' = \frac{\rho h \sqrt{gh}}{\mu}$$

che, essendo $\sqrt{gh}$ una velocità, è un numero di Reynolds.

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta

$$\frac{V}{\sqrt{gh}} = f\left(\frac{d}{h}, \frac{D}{h}, \frac{\rho h\sqrt{gh}}{\mu}\right)$$

Discussione Scegliendo variabili ripetute diverse, si otterrebbero gruppi adimensionali diversi e, conseguentemente, una relazione funzionale diversa ma egualmente valida.

7.51 Con riferimento al problema precedente, stabilire una relazione adimensionale che fornisca il tempo necessario perché il contenitore si svuoti, in funzione dei seguenti parametri indipendenti: diametro d della luce, diametro D del contenitore, densità ρ, viscosità μ, altezza iniziale del liquido h e accelerazione di gravità g.

Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, in particolare seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.
Fase 1 Nel problema compaiono 7 parametri. Quindi, $n = 7$ e il tempo di vuotamento è

$$t_v = f\left(d, D, \rho, \mu, h, g\right)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$\begin{array}{llll} [t_v] = [\mathrm{T}] & [d] = [\mathrm{L}] & [D] = [\mathrm{L}] & \\ [\rho] = [\mathrm{ML}^{-3}] & [\mu] = [\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}] & [h] = [\mathrm{L}] & [g] = [\mathrm{LT}^{-2}] \end{array}$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 7 - 3 = 4$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente e i parametri che hanno le stesse dimensioni, si scelgono (come nel problema precedente) h, ρ e g.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$\left[\Pi_1\right] = \left[\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\right] = \left[t_v \cdot h^{a_1} \cdot \rho^{b_1} \cdot g^{c_1}\right] = $$
$$= \left[(\mathrm{T}) \cdot (\mathrm{L})^{a_1} \cdot \left(\mathrm{ML}^{-3}\right)^{b_1} \cdot \left(\mathrm{LT}^{-2}\right)^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\left[\mathrm{M}^0\right] = \left[\mathrm{M}^{b_1}\right] \qquad 0 = b_1 \qquad b_1 = 0$$
$$\left[\mathrm{T}^0\right] = \left[\mathrm{T} \cdot \mathrm{T}^{-2c_1}\right] \qquad 0 = 1 - 2c_1 \qquad c_1 = \frac{1}{2}$$
$$\left[\mathrm{L}^0\right] = \left[\mathrm{L}^{a_1} \cdot \mathrm{L}^{-3b_1} \cdot \mathrm{L}^{c_1}\right] \qquad 0 = a_1 - 3b_1 + c_1 \qquad a_1 = -\frac{1}{2}$$

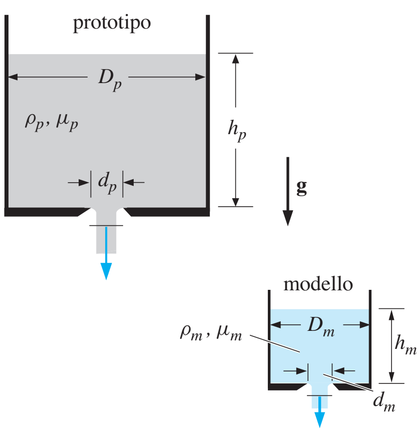
Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = t_v\sqrt{\frac{g}{h}}$$

I gruppi indipendenti sono uguali a quelli derivati nel problema precedente.

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta, pertanto,

$$t_v\sqrt{\frac{g}{h}} = f\left(\frac{d}{h}, \frac{D}{h}, \frac{\rho h\sqrt{gh}}{\mu}\right)$$



7.52 Si vuole stabilire sperimentalmente il tempo necessario perché un contenitore, simile a quello del problema 7.50, si svuoti completamente del suo contenuto di glicole etilenico. Poiché condurre esperimenti alla scala del prototipo usando glicole etilenico sarebbe troppo costoso, si decide di effettuare le prove su un modello, geometricamente simile, in scala 1:4, usando *acqua* come liquido di prova. La temperatura del glicole etilenico nel prototipo è di 60 °C, a cui corrisponde una viscosità cinematica di $4{,}75 \times 10^{-6}$ m²/s. Che temperatura deve avere l'acqua nel modello perché si abbia similitudine completa? Se nel modello viene misurato un tempo di svuotamento di 4,53 min, qual è il tempo necessario perché il prototipo si svuoti completamente?

Analisi Si può utilizzare il risultato ottenuto nel problema precedente, per il quale è

$$t_v\sqrt{\frac{g}{h}} = f\left(\frac{d}{h}, \frac{D}{h}, \frac{\rho h\sqrt{gh}}{\mu}\right)$$

Poiché modello e prototipo sono geometricamente simili, è $(d/h)_m = (d/h)_p$ e $(D/h)_m = (D/h)_p$. Perché si abbia similitudine completa, si deve allora assicurare l'uguaglianza dell'ultimo gruppo. Pertanto, deve essere

$$\left(\frac{\rho h\sqrt{gh}}{\mu}\right)_m = \left(\frac{\rho h\sqrt{gh}}{\mu}\right)_p$$

e cioè

$$\frac{\rho_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p}{\mu_p}\left(\frac{h_p}{h_m}\right)^{3/2}$$

Essendo il rapporto tra viscosità e densità pari alla viscosità cinematica ν ed essendo $h_p/h_m = 4$, dall'ultima relazione si ha

$$\nu_m = \nu_p \left(\frac{h_p}{h_m}\right)^{-3/2} = 4{,}75 \times 10^{-6} \times 4^{-3/2} = 5{,}94 \times 10^{-7}\ \mathrm{m^2/s}$$

L'acqua ha una viscosità cinematica uguale a tale valore quando è alla temperatura di 45,8 °C. Il tempo necessario perché il prototipo si svuoti completamente si calcola uguagliando i gruppi adimensionali corrispondenti

$$\left(t_v\sqrt{\frac{g}{h}}\right)_m = \left(t_v\sqrt{\frac{g}{h}}\right)_p$$

da cui

$$t_{vp} = t_{vm}\sqrt{\frac{h_p}{h_m}} = 4{,}53 \times \sqrt{4} = 9{,}06\ \mathrm{min}$$

7.53 Un getto liquido fuoriesce da una luce sul fondo di un contenitore, avente diametro d molto piccolo rispetto al diametro D del contenitore stesso ($d \ll D$). I dati sperimentali mostrano che la velocità media V di efflusso del getto è praticamente indipendente da d, D, ρ e μ. In particolare, per un ampio intervallo di valori dei parametri, V risulta funzione solo dell'altezza h e dell'accelerazione di gravità g. Se, a parità di tutto il resto, l'altezza h raddoppia, di che fattore aumenta la velocità media del getto?

Analisi Il problema è simile a quello affrontato nel problema 7.50, con la differenza che le variabili d, D, ρ e μ non compaiono più e si ha

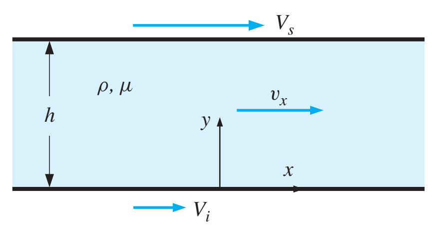
$$V = f(h, g)$$

per cui l'unico gruppo risulta il numero di Froude

$$\Pi_1 = \frac{V}{\sqrt{gh}} = \text{costante}$$

Se l'altezza h raddoppia, dovendosi mantenere costante il numero di Froude, la velocità V aumenta di un fattore $\sqrt{2}$.

7.54 Si consideri il moto permanente, bidimensionale nel piano xy, di un fluido incomprimibile tra due lastre piane parallele indefinite, a distanza h l'una dall'altra, di cui quella inferiore in moto con velocità V_i e la superiore in moto con velocità V_s. Stabilire una relazione adimensionale tra la componente v_x della velocità secondo x e la viscosità μ del fluido, le velocità V_s e V_i delle due lastre, la distanza totale h tra le lastre, la densità ρ del fluido e la distanza y dalla lastra inferiore.

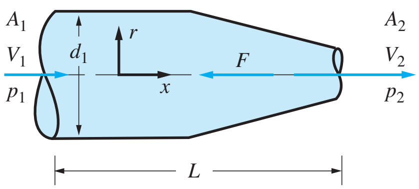


Analisi Se si osserva il moto con riferimento ad un sistema solidale con la lastra inferiore, esso appare analogo a quello studiato nel problema 7.24, in cui la lastra superiore si muove con velocità $V_s - V_i$. La procedura passo-passo per il metodo delle variabili ripetute fornisce dunque risultati analoghi e, in particolare,

$$\frac{v_x}{V_s - V_i} = f\left(\mathrm{Re}, \frac{y}{h}\right)$$

in cui

$$\text{Re} = \frac{\rho\left(V_s - V_i\right)h}{\mu}$$



7.55 La forza di reazione F sull'ugello di un idrante è funzione della velocità V_1 nella sezione di ingresso, della differenza di pressione $\Delta p = p_1 - p_2$ tra la sezione di ingresso e quella di uscita, della densità ρ, della viscosità μ, dell'area della sezione di ingresso A_1, dell'area della sezione di uscita A_2 e della lunghezza dell'ugello L. Stabilire una relazione adimensionale per $F = f(V_1, \Delta p, \rho, \mu, A_1, A_2, L)$ utilizzando V_1, A_1 e ρ come variabili ripetute.

Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.

Fase 1 Nel problema compaiono 8 parametri. Quindi, $n = 8$ e

$$F = f\left(V_1, \Delta p, \rho, \mu, A_1, A_2, L\right)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$\left[F\right] = \left[\text{MLT}^{-2}\right] \qquad \left[V_1\right] = \left[\text{LT}^{-1}\right]$$
$$\left[\Delta p\right] = \left[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}\right] \qquad \left[\rho\right] = \left[\text{ML}^{-3}\right] \qquad \left[\mu\right] = \left[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}\right]$$
$$\left[A_1\right] = \left[\text{L}^2\right] \qquad \left[A_2\right] = \left[\text{L}^2\right] \qquad \left[L\right] = \left[\text{L}\right]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 8 - 3 = 5$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Si scelgono V_1, A_1 e ρ.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$\left[\Pi_1\right] = \left[\text{M}^0\text{L}^0\text{T}^0\right] = \left[F \cdot V_1^{a_1} \cdot A_1^{b_1} \cdot \rho^{c_1}\right] =$$
$$= \left[\left(\text{MLT}^{-2}\right) \cdot \left(\text{LT}^{-1}\right)^{a_1} \cdot \left(\text{L}^2\right)^{b_1} \cdot \left(\text{ML}^{-3}\right)^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\left[\text{M}^0\right] = \left[\text{M} \cdot \text{M}^{c_1}\right] \qquad 0 = 1 + c_1 \qquad c_1 = -1$$
$$\left[\text{T}^0\right] = \left[\text{T}^{-2} \cdot \text{T}^{-a_1}\right] \qquad 0 = -2 - a_1 \qquad a_1 = -2$$
$$\left[\text{L}^0\right] = \left[\text{L} \cdot \text{L}^{a_1} \cdot \text{L}^{2b_1} \cdot \text{L}^{-3c_1}\right] \qquad 0 = 1 + a_1 + 2b_1 - 3c_1 \qquad b_1 = -1$$

Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho V_1^2 A_1}$$

Il primo Π indipendente è

$$\left[\Pi_2\right] = \left[\text{M}^0\text{L}^0\text{T}^0\right] = \left[\Delta p \cdot V_1^{a_2} \cdot A_1^{b_2} \cdot \rho^{c_2}\right] =$$
$$= \left[\left(\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}\right) \cdot \left(\text{LT}^{-1}\right)^{a_2} \cdot \left(\text{L}^2\right)^{b_2} \cdot \left(\text{ML}^{-3}\right)^{c_2}\right]$$

Imponendo che Π_2 sia adimensionale si ottiene

$$\begin{array}{lll} \left[\mathrm{M}^0\right] = \left[\mathrm{M}\cdot\mathrm{M}^{c_2}\right] & 0 = 1 + c_2 & c_2 = -1 \\ \left[\mathrm{T}^0\right] = \left[\mathrm{T}^{-2}\cdot\mathrm{T}^{-a_2}\right] & 0 = -2 - a_2 & a_2 = -2 \\ \left[\mathrm{L}^0\right] = \left[\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{L}^{a_2}\cdot\mathrm{L}^{2b_2}\cdot\mathrm{L}^{-3c_2}\right] & 0 = -1 + a_2 + 2b_2 - 3c_2 & b_2 = 0 \end{array}$$

Il gruppo Π_2 risulta quindi

$$\Pi_2 = \frac{\Delta p}{\rho V_1^2}$$

Il secondo gruppo indipendente è:

$$\begin{aligned} \left[\Pi_3\right] = \left[\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0\right] &= \left[\mu\cdot V_1^{a_3}\cdot A_1^{b_3}\cdot\rho^{c_3}\right] = \\ &= \left[\left(\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}\right)\cdot\left(\mathrm{LT}^{-1}\right)^{a_3}\cdot\left(\mathrm{L}^2\right)^{b_3}\cdot\left(\mathrm{ML}^{-3}\right)^{c_3}\right] \end{aligned}$$

Imponendo che Π_3 sia adimensionale si ottiene

$$\begin{array}{lll} \left[\mathrm{M}^0\right] = \left[\mathrm{M}\cdot\mathrm{M}^{c_3}\right] & 0 = 1 + c_3 & c_3 = -1 \\ \left[\mathrm{T}^0\right] = \left[\mathrm{T}^{-1}\cdot\mathrm{T}^{-a_3}\right] & 0 = -1 - a_3 & a_3 = -1 \\ \left[\mathrm{L}^0\right] = \left[\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{L}^{a_3}\cdot\mathrm{L}^{2b_3}\cdot\mathrm{L}^{-3c_3}\right] & 0 = -1 + a_3 + 2b_3 - 3c_3 & b_3 = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Il gruppo Π_3 risulta quindi

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{\rho V_1\sqrt{A_1}}$$

Il suo inverso

$$\Pi_3' = \frac{\rho V_1\sqrt{A_1}}{\mu} = \mathrm{Re}$$

essendo Re il numero di Reynolds. Gli altri due gruppi indipendenti, costruiti rispettivamente con i parametri A_2 e L, che contengono la sola lunghezza, sono di immediata individuazione, essendo semplicemente

$$\Pi_4 = \frac{A_2}{A_1}$$

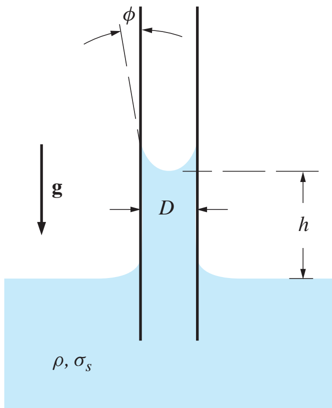
e

$$\Pi_5 = \frac{L}{\sqrt{A_1}}$$

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta

$$\frac{F}{\rho V_1^2 A_1} = f\left(\frac{\Delta p}{\rho V_1^2}, \mathrm{Re}, \frac{A_2}{A_1}, \frac{L}{\sqrt{A_1}}\right)$$

7.56 Quando un tubicino di piccolo diametro D viene inserito in un liquido a superficie libera, il liquido risale nel tubicino fino a una certa altezza h.



La risalita h è funzione della densità del liquido ρ, del diametro del tubo D, dell'accelerazione di gravità g, dell'angolo di contatto ϕ e della tensione superficiale σ_s del liquido. Stabilire una relazione adimensionale tra h e i parametri elencati e confrontarla con l'equazione esatta 2.57.

Analisi I parametri adimensionali vengono derivati col metodo delle variabili ripetute, seguendo la procedura passo-passo in sei fasi.

Fase 1 Nel problema compaiono 6 parametri. Quindi, $n = 6$ e

$$h = f\left(\rho, g, \sigma_s, D, \phi\right)$$

Fase 2 Le dimensioni primarie dei parametri sono

$$[h] = [\mathrm{L}] \qquad [\rho] = [\mathrm{ML^{-3}}] \qquad [g] = [\mathrm{LT^{-2}}]$$
$$[\sigma_s] = [\mathrm{MT^{-2}}] \qquad [D] = [\mathrm{L}] \qquad [\phi] = [1]$$

Fase 3 Le dimensioni fondamentali sono tre (M, L, T) per cui, in prima istanza, si assume $j = 3$. Se questo valore è corretto, i parametri Π sono $k = n - j = 6 - 3 = 3$.

Fase 4 Poiché $j = 3$ bisogna scegliere tre variabili ripetute. Escludendo la variabile dipendente e il parametro adimensionale, si scelgono D, ρ e g.

Fase 5 Si deriva il Π dipendente

$$[\Pi_1] = \left[\mathrm{M^0L^0T^0}\right] = \left[h \cdot D^{a_1} \cdot \rho^{b_1} \cdot g^{c_1}\right] = \\ = \left[(\mathrm{L}) \cdot (\mathrm{L})^{a_1} \cdot (\mathrm{ML^{-3}})^{b_1} \cdot (\mathrm{LT^{-2}})^{c_1}\right]$$

Imponendo che Π_1 sia adimensionale si ottiene

$$\left[\mathrm{M^0}\right] = \left[\mathrm{M}^{b_1}\right] \qquad 0 = b_1 \qquad b_1 = 0$$
$$\left[\mathrm{T^0}\right] = \left[\mathrm{T}^{-2c_1}\right] \qquad 0 = -2c_1 \qquad c_1 = 0$$
$$\left[\mathrm{L^0}\right] = \left[\mathrm{L} \cdot \mathrm{L}^{a_1} \cdot \mathrm{L}^{-3b_1} \cdot \mathrm{L}^{c_1}\right] \qquad 0 = 1 + a_1 - 3b_1 + c_1 \qquad a_1 = -1$$

Il gruppo Π_1 risulta quindi

$$\Pi_1 = \frac{h}{D}$$

Il Π indipendente è

$$[\Pi_2] = \left[\mathrm{M^0L^0T^0}\right] = \left[\sigma_s \cdot D^{a_2} \cdot \rho^{b_2} \cdot g^{c_2}\right] = \\ = \left[(\mathrm{MT^{-2}}) \cdot (\mathrm{L})^{a_2} \cdot (\mathrm{ML^{-3}})^{b_2} \cdot (\mathrm{LT^{-2}})^{c_2}\right]$$

Imponendo che Π_2 sia adimensionale si ottiene

$$\left[\mathrm{M^0}\right] = \left[\mathrm{M} \cdot \mathrm{M}^{b_2}\right] \qquad 0 = 1 + b_2 \qquad b_2 = -1$$
$$\left[\mathrm{T^0}\right] = \left[\mathrm{T^{-2}} \cdot \mathrm{T}^{-2c_2}\right] \qquad 0 = -2 - 2c_2 \qquad c_2 = -1$$
$$\left[\mathrm{L^0}\right] = \left[\mathrm{L}^{a_2} \cdot \mathrm{L}^{-3b_2} \cdot \mathrm{L}^{c_2}\right] \qquad 0 = a_2 - 3b_2 + c_2 \qquad a_2 = -2$$

Il gruppo Π_2 risulta quindi

$$\Pi_2 = \frac{\sigma_s}{\rho g D^2}$$

L'angolo di contatto ϕ costituisce il secondo gruppo indipendente:

$$\Pi_3 = \phi$$

Fase 6 La relazione funzionale finale risulta

$$\frac{h}{D} = f\left(\frac{\sigma_s}{\rho g D^2}, \phi\right)$$

L'equazione esatta 2.57 è

$$h = \frac{4\sigma_s}{\rho g D} \cos\phi$$

che risulta della stessa forma dell'equazione adimensionale trovata, poiché questa può essere scritta anche come

$$\Pi_1 = \text{costante} \times \Pi_2 \times \cos\Pi_3$$

maggio 2011