

Yunus A. Çengel
John M. Cimbala

per l'edizione italiana

Giuseppe Cozzo
Cinzia Santoro

Meccanica dei fluidi



Seconda edizione

Soluzione dei problemi
Capitolo 5

McGraw-Hill

Indice

1	Introduzione e concetti di base	1
	Introduzione, classificazione e sistema	1
	Massa, forza e unità di misura	4
	Modellazione e risoluzione di problemi ingegneristici	7
	Riepilogo	9
2	Proprietà dei fluidi	11
	Densità	12
	Tensione di vapore e cavitazione	15
	Energia specifica	16
	Comprimibilità e velocità del suono	17
	Viscosità	24
	Tensione superficiale e capillarità	30
	Riepilogo	32
3	Statica dei fluidi	37
	Pressione, manometro e barometro	38
	Spinte idrostatiche su superfici piane e curve	59
	Galleggiamento	66
	Moto rigido dei fluidi	72
	Riepilogo	81
4	Cinematica dei fluidi	99
	Problemi introduttivi	99
	Descrizioni lagrangiana ed euleriana	101
	Strutture del moto e visualizzazione del moto	107
	Moto e deformazione di elementi di fluido	115
	Teorema del trasporto di Reynolds	126
	Riepilogo	127
5	Equazioni della massa, di Bernoulli, dell'energia	135
	Conservazione della massa	136
	Energia meccanica e rendimento	140
	Teorema di Bernoulli	145
	Equazione dell'energia	160
	Riepilogo	174

6	Equazione della quantità di moto	183
	Leggi di Newton e conservazione della quantità di moto	184
	Equazione della quantità di moto	184
	Riepilogo	218
7	Analisi dimensionale e modellazione	229
	Dimensioni e unità, dimensioni fondamentali	229
	Omogeneità dimensionale	232
	Adimensionalizzazione delle equazioni	233
	Analisi dimensionale e similitudine	234
	Parametri adimensionali e metodo delle variabili ripetute	238
	Prove sperimentali e similitudine incompleta	255
	Riepilogo	260
8	Correnti in pressione	275
	Moto laminare e moto turbolento	276
	Moto completamente sviluppato	279
	Perdite localizzate	298
	Reti di distribuzione	299
	Lunghe condotte	326
	Misura della velocità e della portata	336
	Riepilogo	343
9	Equazioni indefinite del moto dei fluidi	357
	Problemi di base	357
	Equazione di continuità	359
	Funzione di corrente	361
	Equazione della quantità di moto e condizioni al contorno	371
	Riepilogo	379
10	Soluzioni approssimate dell'equazione di Navier-Stokes	391
	Problemi di base	392
	Moto non viscoso	395
	Moto irrotazionale	396
	Strati limite	400
	Riepilogo	409
11	Moto attorno ai corpi: resistenza e portanza	411
	Resistenza e portanza	412
	Moto su lastra piana	424
	Moto attorno a cilindri e sfere	428
	Portanza	432
	Riepilogo	436
12	Moto dei fluidi comprimibili	441
	Grandezze di ristagno	442
	Moto isoentropico unidimensionale	445
	Moto isoentropico negli ugelli	448
	Onde d'urto e onde di espansione	452

Moto con scambio di calore e resistenze trascurabili (Flusso di Rayleigh)	460
Moto adiabatico con resistenze non trascurabili (Flusso di Fanno)	467
Riepilogo	476
13 Correnti a superficie libera	495
Numero di Froude e celerità	497
Energia specifica ed equazione dell'energia	502
Moto uniforme e sezioni di minimo costo	509
Moto gradualmente e rapidamente variato. Risalto idraulico	520
Regolazione e misura della portata	527
Riepilogo	534

SOMMARIO

Dalle leggi di conservazione della massa e dell'energia derivano due delle equazioni fondamentali della meccanica dei fluidi: l'equazione di continuità e l'equazione di Bernoulli. La massa di fluido che attraversa nell'unità di tempo una superficie ortogonale in ogni punto al vettore velocità in quel punto (*sezione trasversale*) è chiamata *portata di massa* e si esprime come

$$Q_m = \int_A \rho v \, dA \quad (5.5)$$

dove ρ è la densità, v è la velocità locale e A è l'area della sezione. Indicando con ρ_m e con V i valori medi di densità e velocità nella sezione, si ha anche

$$Q_m = \int_A \rho v \, dA = \rho_m V A$$

Si chiama portata volumetrica o, semplicemente, *portata* il volume di fluido che attraversa nell'unità di tempo una sezione. Per una sezione trasversale, la portata si esprime come

$$Q = \int_A v \, dA = V A \quad (5.9)$$

ed è legata alla portata Q_m dalla relazione

$$Q_m = \rho_m \int_A v \, dA = \rho_m V A = \rho_m Q$$

Per la conservazione della massa, la differenza tra la massa entrata e la massa uscita attraverso la superficie di contorno di un volume di controllo (*superficie di controllo*) in un intervallo di tempo Δt deve essere uguale alla variazione della massa m_W del volume. Con riferimento a un intervallo infinitesimo di tempo, indicando con Q_{me} la portata di massa entrante e con Q_{mu} quella uscente, si ha

$$Q_{me} - Q_{mu} = \frac{dm_W}{dt} \quad (5.11)$$

o, più in generale,

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dW + \int_A \rho v_n \, dA = 0 \quad (5.16)$$

secondo la quale *la somma della variazione nell'unità di tempo della massa del volume di controllo W e della portata di massa attraverso la superficie di controllo A è uguale a zero*.

Le relazioni precedenti, che vengono chiamate *equazioni di continuità*, assumono forma diversa nei diversi casi:

– *moto permanente:*

$$Q_{mu} = Q_{me} \quad (5.20)$$

– *moto permanente, fluido incomprimibile:*

$$Q_e = Q_u \quad (5.22)$$

– *corrente in moto permanente:*

$$Q_m = \text{costante} \quad (5.24)$$

– *corrente in moto permanente, fluido incomprimibile:*

$$Q_1 = Q_2 = Q = \text{costante} \quad (5.25)$$

L'*energia meccanica* è quella forma di energia associata con la velocità, la quota e la pressione di un fluido che può essere completamente e direttamente convertita in lavoro meccanico tramite una macchina ideale.

Il *rendimento* η di una macchina può essere definito come il rapporto tra la potenza ceduta (o in uscita) P_u e quella ricevuta (o in entrata) P_e

$$\eta = \frac{P_u}{P_e} \quad (5.29)$$

Il rendimento di una turbina è

$$\eta_T = \frac{P_T}{P_F} \quad (5.30)$$

in cui P_T è la potenza all'albero della macchina e P_F è la potenza ceduta dal fluido. Il rendimento di una pompa è

$$\eta_P = \frac{P_F}{P_P} \quad (5.31)$$

dove P_F è la potenza che la pompa cede al fluido e P_P è la potenza che riceve dal motore.

L'equazione di Bernoulli è una relazione che lega quota, pressione e velocità lungo la traiettoria di una particella di fluido incompressibile in moto permanente, in campo gravitazionale, nelle regioni di moto in cui le forze viscose sono trascurabili (*fluido perfetto*). Essa si scrive, in generale,

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H = \text{costante} \quad (5.44)$$

e, tra due punti qualsiasi 1 e 2 lungo la traiettoria,

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (5.45)$$

Ciascun addendo del trinomio di Bernoulli è un'altezza che esprime l'energia dell'unità di peso di fluido (o *carico*), rispettivamente, di posizione (z), di pressione (p/γ), cinetica ($v^2/2g$). Il teorema di Bernoulli può essere considerato una espressione del principio di conservazione dell'energia

ed essere enunciato come segue: *in campo gravitazionale, nel moto permanente di un fluido perfetto e incompressibile la somma dell'energia di posizione, dell'energia di pressione e dell'energia cinetica dell'unità di peso di fluido si mantiene costante lungo una traiettoria.*

L'energia totale H dell'unità di peso prende il nome di *carico totale*. La linea luogo dei punti che sono a quota $z + p/\gamma$ rispetto al piano di riferimento $z = 0$ prende il nome di *linea piezometrica*, così come la linea luogo dei punti che sono a quota H rispetto al piano di riferimento prende il nome di *linea dei carichi totali*. Nelle condizioni di validità del teorema di Bernoulli, tale linea è orizzontale. La distanza tra linea piezometrica e linea dei carichi totali è pari all'altezza cinetica $v^2/2g$, per cui esse si allontanano o si avvicinano secondo che la velocità aumenti o diminuisca. Nel caso più generale di un volume di controllo in cui il fluido riceva energia da una pompa e ne ceda a una turbina, oltre a subire dissipazioni lungo il percorso, se il moto è permanente e il fluido incompressibile, l'equazione dell'energia si scrive

$$\Delta H_P + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \Delta H_T + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_d \quad (5.108)$$

dove ΔH_P è la prevalenza totale della pompa (differenza tra il carico totale all'uscita dalla pompa e quello all'ingresso), ΔH_T è il salto utile della turbina (differenza tra il carico totale all'ingresso della turbina e quello all'uscita) e ΔH_d è la perdita di carico nelle tubazioni.

PROBLEMI

Conservazione della massa

5.1 Definire la portata in massa e la portata in volume. Come sono legate tra loro?

Analisi Si definisce **portata in massa** la quantità di massa che attraversa una data superficie nell'unità di tempo. Si definisce **portata in volume** (o semplicemente **portata**) il volume di fluido che attraversa una data superficie nell'unità di tempo. La portata in massa è pari al prodotto della portata in volume per la densità media del fluido nella sezione.

5.2 In un processo di moto vario, la massa entrante in un volume di controllo deve essere uguale alla massa uscente?

Analisi No. Per la legge di conservazione della massa, la differenza tra massa entrante e massa uscente in un intervallo di tempo attraverso la superficie di un volume di controllo deve essere uguale alla variazione della massa del volume di controllo.

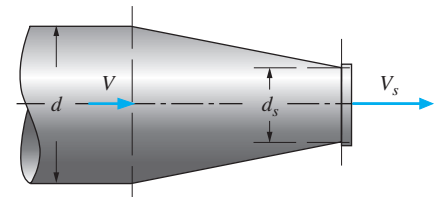
5.3 Quando il moto attraverso un volume di controllo è detto permanente?

Analisi Il moto attraverso un volume di controllo è detto permanente quando in ciascun punto nessuna grandezza varia in funzione del tempo.

5.4 In un sistema con un imbocco e uno sbocco, se le portate in volume all'imbocco e allo sbocco sono uguali, il moto è necessariamente permanente? Perché?

Analisi No, a meno che il fluido sia incompressibile. Perché il moto sia permanente, deve mantenersi costante la portata di massa in qualunque sezione trasversale.

5.5 La parte terminale di un tubo da giardino, del diametro di 25 mm, è costituita da un ugello nella cui sezione terminale il diametro è pari alla metà. Essendo la velocità media dell'acqua nel tubo di 2,5 m/s, calcolare la portata in massa e in volume, il tempo necessario per riempire un contenitore di 90 l e la velocità media allo sbocco.



Analisi In una corrente in moto permanente di un fluido incompressibile, l'equazione di continuità, esprime la legge di conservazione della massa, è la 5.25, secondo la quale la portata volumetrica Q si mantiene costante in tutte le sezioni trasversali della corrente. Per la 5.9, essa è pari al prodotto dell'area A di una sezione per la velocità media V nella sezione, per cui, essendo $d = 0,025$ m il diametro del tubo, si ha

$$Q = VA = V \frac{\pi d^2}{4} = 2,5 \times \frac{\pi \times 0,025^2}{4} = 0,00123 \text{ m}^3/\text{s} = 1,23 \text{ l/s}$$

Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, la portata in massa Q_m vale

$$Q_m = \rho Q = 1000 \times 0,00123 = 1,23 \text{ kg/s}$$

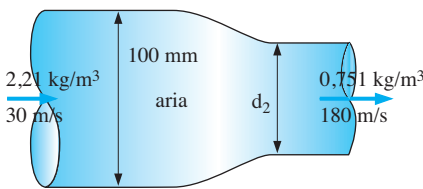
Il tempo Δt necessario per riempire il contenitore è pari al rapporto tra il suo volume W e la portata, per cui

$$\Delta t = \frac{W}{Q} = \frac{90}{1,23} = 73,2 \text{ s}$$

Infine, la velocità media V_s allo sbocco si ottiene dividendo la portata per l'area A_s della sezione trasversale allo sbocco, avente diametro $d_s = 0,0125$ m, per cui

$$V_s = \frac{Q}{A_s} = \frac{Q}{\pi d_s^2/4} = \frac{1,23 \times 10^{-3}}{\pi \times 0,0125^2/4} = 10,0 \text{ m/s}$$

Discussione La velocità media è inversamente proporzionale al quadrato del diametro. Quindi, se il diametro si dimezza, la velocità si quadruplica.



5.6 Una corrente d'aria attraversa in moto permanente un convergente, la cui sezione iniziale ha un diametro di 100 mm. Essendo la densità dell'aria e la velocità, rispettivamente, pari a 2,21 kg/m³ e 30 m/s nella sezione iniziale e a 0,751 kg/m³ e 180 m/s nella sezione terminale, calcolare la portata in massa e il diametro della sezione terminale.

Analisi Essendo, rispettivamente, ρ_1 , d_1 , A_1 e V_1 la densità, il diametro, l'area e la velocità media nella sezione iniziale del convergente, la portata in massa Q_m risulta

$$Q_m = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_1 \frac{\pi d_1^2}{4} V_1 = 2,21 \times \frac{\pi \times 0,10^2}{4} \times 30 = 0,521 \text{ kg/s}$$

Per la 5.24, tale portata è costante per l'intera corrente e, quindi, uguale a quella che esce attraverso la sezione terminale. Pertanto, essendo, rispettivamente, ρ_2 , d_2 , A_2 e V_2 la densità, il diametro, l'area e la velocità media nella sezione terminale, si ha

$$Q_m = \rho_2 A_2 V_2 = \rho_2 \frac{\pi d_2^2}{4} V_2$$

da cui

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 Q_m}{\pi \rho_2 V_2}} = \sqrt{\frac{4 \times 0,520}{\pi \times 0,751 \times 180}} = 0,070 \text{ m} = 70 \text{ mm}$$



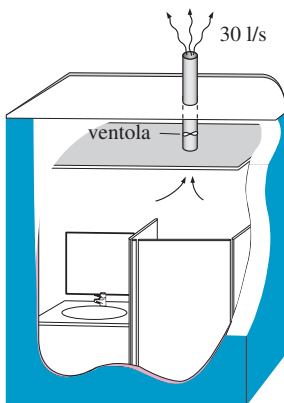
5.7 In una condotta di un impianto di condizionamento, del diametro di 250 mm, entra una portata d'aria di 0,21 m³/s con densità di 1,25 kg/m³. Calcolare la velocità media della corrente all'ingresso e la portata in massa.

Analisi Essendo Q la portata, A l'area della sezione della condotta e D il suo diametro, la velocità media V della corrente è

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi D^2/4} = \frac{0,21}{\pi \times 0,250^2/4} = 4,28 \text{ m/s}$$

Essendo ρ la densità dell'aria, la portata in massa vale

$$Q_m = \rho Q = 1,20 \times 0,21 = 0,252 \text{ kg/s}$$



5.8 In una stanza da bagno il ricambio di aria è assicurato da una ventola che funziona in continuo con una portata di 30 l/s. Calcolare la massa d'aria estratta in un giorno, essendo la densità dell'aria all'interno della stanza di 1,20 kg/m³.

Analisi Essendo ρ la densità dell'aria e Q la portata volumetrica, la portata in massa Q_m è

$$Q_m = \rho Q = 1,20 \times 0,030 = 0,036 \text{ kg/s}$$

che equivale, nelle 24 ore, ad una massa d'aria

$$m = Q_m \times 24 \times 3600 = 0,036 \times 24 \times 3600 = 3110 \text{ kg}$$

In un giorno, vengono, quindi, estratte, più di 3 tonnellate di aria.

5.9 Un asciugacapelli è costituito sostanzialmente da un condotto a diametro costante in cui una piccola ventola crea una corrente d'aria che, attraversando alcune resistenze elettriche, si riscalda. Calcolare l'aumento, in percentuale, della velocità dell'aria nell'asciugacapelli quando la densità dell'aria è di $1,20 \text{ kg/m}^3$ all'ingresso e di $1,05 \text{ kg/m}^3$ all'uscita.

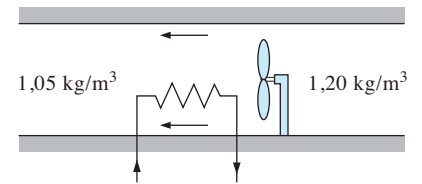
Analisi Nell'ipotesi di moto permanente, per la 5.24, la portata in massa è costante in tutte le sezioni trasversali, in particolare all'ingresso e all'uscita. Per cui, essendo A l'area della sezione trasversale e, rispettivamente, ρ_1 e V_1 la densità e la velocità media nella sezione di ingresso e ρ_2 e V_2 la densità e la velocità media nella sezione di uscita, si ha

$$\rho_1 A V_1 = \rho_2 A V_2$$

da cui

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1,20}{1,05} = 1,14$$

Quindi, all'interno dell'asciugacapelli la velocità dell'aria aumenta del 14%.



5.10 La portata d'aria della ventola di raffreddamento di un computer è di $0,34 \text{ m}^3/\text{min}$. Determinare la portata in massa alla quota di 3400 m, dove la densità dell'aria è di $0,7 \text{ kg/m}^3$, e calcolare il diametro dell'apertura in cui è alloggiata la ventola, in modo che la velocità dell'aria non superi i 2 m/s.

Analisi Essendo ρ la densità dell'aria e Q la portata volumetrica, la portata in massa Q_m è

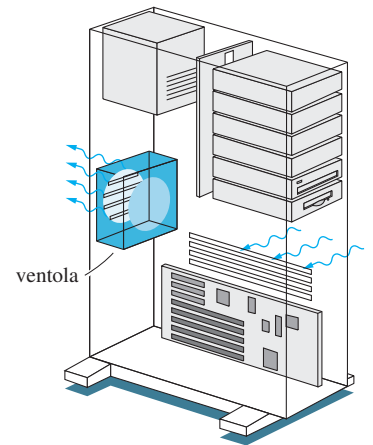
$$Q_m = \rho Q = 0,7 \times 0,34 = 0,238 \text{ kg/min}$$

Essendo, rispettivamente, A l'area dell'apertura dell'alloggiamento della ventola, d il suo diametro e V la velocità dell'aria, si ha

$$Q = AV = \frac{\pi d^2}{4} V$$

da cui, per $V = 2 \text{ m/s}$,

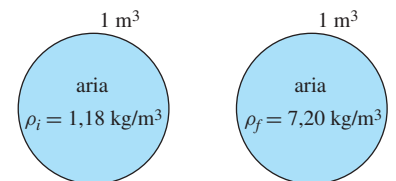
$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V}} = \sqrt{\frac{4 \times 0,34/60}{\pi \times 2}} = 0,060 \text{ m} = 60 \text{ mm}$$



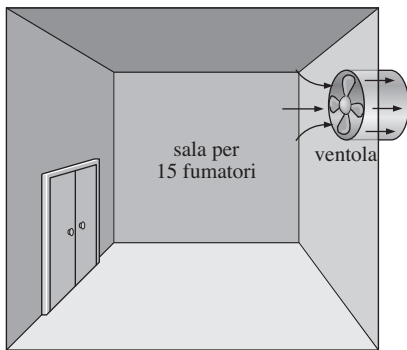
5.11 Un serbatoio metallico, della capacità di 1 m^3 , contiene aria di densità $1,18 \text{ kg/m}^3$. Calcolare la massa d'aria che entra nel serbatoio da un impianto ad alta pressione, al quale è collegato tramite una valvola, quando questa viene aperta e si lascia entrare aria finché la densità diventa pari a $7,20 \text{ kg/m}^3$.

Analisi Essendo, rispettivamente, m_i la massa dell'aria di densità $\rho_i = 1,18 \text{ kg/m}^3$ ed m_f la massa dell'aria di densità $\rho_f = 7,20 \text{ kg/m}^3$, la massa Δm entrata nel serbatoio, di volume $W = 1 \text{ m}^3$, è

$$\Delta m = m_f - m_i = (\rho_f - \rho_i)W = (7,20 - 1,18) \times 1 = 6,02 \text{ kg}$$



5.12 Nella stanza per fumatori di un locale pubblico, che può accogliere non più di 15 persone, deve essere garantito un ricambio d'aria di almeno 30 l/s a



persona. Calcolare la portata d'aria minima e il diametro del condotto, in modo che la velocità dell'aria sia al massimo di 8 m/s.

Analisi La portata d'aria minima Q che deve essere garantita è pari al prodotto della portata d'aria minima a persona q per il numero massimo n di persone che la stanza può accogliere. Per cui

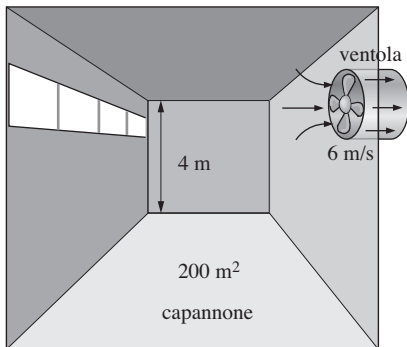
$$Q = nq = 15 \times 30 \times 10^{-3} = 0,450 \text{ m}^3/\text{s}$$

Essendo A l'area del condotto di diametro d e V la velocità media nella sezione, si ha

$$Q = VA = V \times \frac{\pi d^2}{4}$$

da cui, per $V = 8 \text{ m/s}$,

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V}} = \sqrt{\frac{4 \times 0,450}{\pi \times 8}} = 0,268 \text{ m}$$



5.13 In un capannone di 200 m^2 e altezza di 4 m si deve assicurare, con una sola ventola, un ricambio d'aria di almeno il 35% ogni ora. Calcolare la portata della ventola e il diametro del condotto, in modo che la velocità dell'aria sia al massimo di 6 m/s.

Analisi Essendo W il volume del capannone ed $r = 0,35$ la frazione del volume totale di cui assicurare il ricambio d'aria ogni ora, la portata minima Q della ventola deve essere

$$Q = \frac{rW}{3600} = \frac{0,35 \times 200 \times 4}{3600} = 0,0778 \text{ m}^3/\text{s}$$

Essendo A l'area del condotto di diametro d e V la velocità media nella sezione, si ha

$$Q = VA = V \times \frac{\pi d^2}{4}$$

da cui, per $V = 6 \text{ m/s}$,

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V}} = \sqrt{\frac{4 \times 0,0778}{\pi \times 6}} = 0,129 \text{ m}$$

Energia meccanica e rendimento

5.14 Cos'è l'energia meccanica? In cosa differisce dall'energia termica? Quali sono le forme di energia meccanica che una corrente di fluido può possedere?

Analisi L'energia meccanica può essere definita come quella forma di energia che può essere convertita in lavoro meccanico completamente e direttamente usando una macchina ideale. Essa differisce dall'energia termica per il fatto

che quest'ultima non può essere convertita in lavoro completamente e direttamente. Le forme di energia meccanica che una corrente di fluido può possedere sono l'energia cinetica, l'energia potenziale e l'energia di pressione.

5.15 Cos'è il rendimento meccanico? Che significato ha un rendimento del 100% per una turbina idraulica?

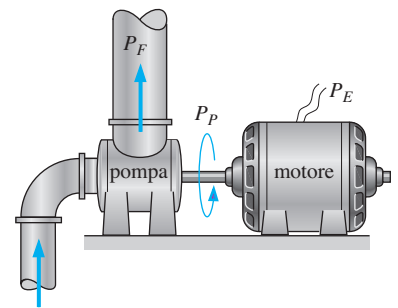
Analisi Il rendimento meccanico è definito come il rapporto tra la potenza (o l'energia) meccanica ceduta (o in uscita) e quella ricevuta (o in entrata). Per una turbina idraulica, un rendimento del 100% significa che tutta l'energia meccanica ricevuta dal fluido viene convertita in energia meccanica all'albero rotante.

5.16 Come viene definito il rendimento di un sistema pompa-motore? Può il rendimento del gruppo essere maggiore del rendimento della sola pompa o di quello del solo motore?

Analisi Il rendimento η_{PM} di un sistema pompa-motore è il rapporto tra la potenza P_F (o l'energia) meccanica ceduta al fluido dalla pompa e quella elettrica P_E che il motore riceve dalla rete di alimentazione. Il rendimento η_P della pompa è il rapporto tra la potenza P_F meccanica ceduta al fluido dalla pompa e quella P_P che la pompa riceve dal motore. Analogamente, il rendimento η_M del motore è il rapporto tra la potenza P_P ceduta alla pompa e la potenza elettrica P_E assorbita. Pertanto, risulta

$$\eta_{PM} = \frac{P_F}{P_E} = \frac{P_F}{P_P} \frac{P_P}{P_E} = \eta_P \eta_M$$

Quindi, il rendimento di un sistema pompa-motore è pari al prodotto del rendimento della pompa e del rendimento del motore. Pertanto, non può essere maggiore di nessuno dei due, perché il prodotto di due numeri minori di uno è minore di ciascuno dei numeri originari.



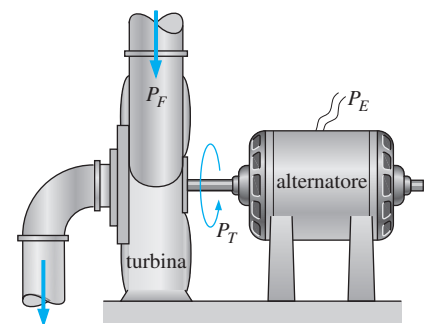
5.17 Definire il rendimento di una turbina, il rendimento di un alternatore e il rendimento del gruppo turbina-alternatore.

Analisi Il rendimento di una turbina, il rendimento di un alternatore e il rendimento del gruppo turbina-alternatore sono definiti come segue

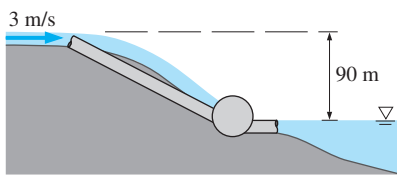
$$\eta_T = \frac{\text{potenza meccanica in uscita dalla turbina}}{\text{potenza meccanica ceduta alla turbina dal fluido}} = \frac{P_T}{P_F}$$

$$\eta_A = \frac{\text{potenza elettrica prodotta dall'alternatore}}{\text{potenza in uscita dalla turbina e in ingresso all'alternatore}} = \frac{P_E}{P_T}$$

$$\eta_{TA} = \frac{P_E}{P_F} = \frac{P_E}{P_T} \frac{P_T}{P_F} = \eta_A \eta_T$$



5.18 La sezione di un fiume, la cui portata è di 500 m³/s, è alla quota di 90 m sopra il livello della superficie libera del lago in cui il fiume si versa. Essendo



la velocità media della corrente nella sezione pari a 3 m/s, calcolare il carico totale della corrente nella sezione rispetto al lago e la potenza che potrebbe essere generata.

Analisi Nella sezione in esame, nell'ipotesi che la corrente possa essere considerata lineare, la quota piezometrica assume un unico valore in tutti i punti della sezione stessa, pari alla quota z della superficie libera (coincidente con il piano dei carichi idrostatici relativi, poiché su di essa vige la pressione atmosferica) rispetto ad un piano di riferimento. Pertanto, essendo V la velocità media nella sezione e ponendo il coefficiente di ragguaglio della potenza cinetica $\alpha = 1$, il carico totale della corrente rispetto alla superficie libera del lago è

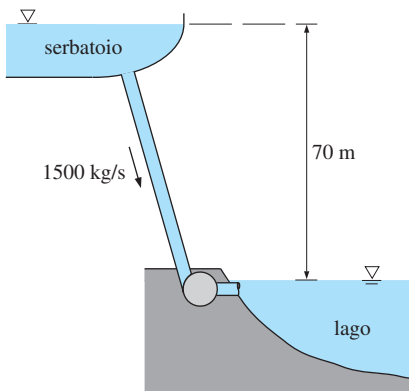
$$H = z + \frac{V^2}{2g} = 90 + \frac{3^2}{2 \times 9,81} = 90,5 \text{ m}$$

Il carico totale è l'energia meccanica dell'unità di peso di fluido. La potenza P della corrente, cioè l'energia meccanica della corrente che transita nell'unità di tempo, si ottiene moltiplicando il carico totale per il peso di fluido che transita nell'unità di tempo, cioè per la portata in peso. Per cui, essendo la densità dell'acqua $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, si ha

$$P = \rho g Q H = 1000 \times 9,81 \times 500 \times 90,5 = 444 \times 10^6 \text{ W} = 444 \text{ MW}$$

Quindi, se fosse possibile utilizzare l'intera energia meccanica posseduta dalla corrente, si potrebbe generare una potenza di 444 MW.

Discussione Una turbina reale genererebbe una potenza inferiore a quella calcolata, a causa di effetti irreversibili come le dissipazioni di energia all'interno della macchina.



5.19 Un impianto idroelettrico è alimentato da un grande serbatoio la cui superficie libera si trova alla quota di 70 m rispetto alla macchina. Trascurando le perdite di carico nelle tubazioni, calcolare il rendimento della turbina e quello del gruppo turbina-alternatore, quando la portata è di 1500 kg/s, la potenza della turbina è 800 kW e quella elettrica 750 kW.

Analisi Trascurando le perdite di carico nelle tubazioni, il carico H_m a monte della turbina è uguale a quello nel serbatoio di alimentazione, dove l'acqua è in quiete. Pertanto, esso è pari alla quota z_s della superficie libera (coincidente con il piano dei carichi idrostatici relativi, poiché su di essa vige la pressione atmosferica) rispetto ad un piano di riferimento. Trascurando anche l'altezza cinetica della corrente allo sbocco nel lago, il carico H_v a valle della turbina è pari alla quota z_v della superficie libera del lago. Pertanto, il salto utile ΔH , cioè la differenza tra i carichi totali H_m subito a monte della turbina e H_v subito a valle di essa, risulta

$$\Delta H = H_m - H_v = z_s - z_v = 70 \text{ m}$$

Essendo $Q_m = 1500 \text{ kg/s}$ la portata in massa, la potenza P_F che il fluido cede alla turbina, pari al prodotto della portata in peso $g Q_m$ per il salto utile, risulta

$$P_F = g Q_m \Delta H = 9,81 \times 1500 \times 70 = 1\,030\,000 \text{ W} = 1\,030 \text{ kW}$$

Per la 5.30, il rendimento della turbina è

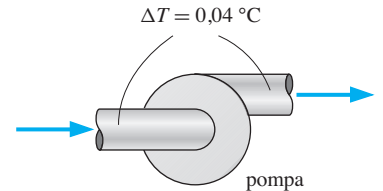
$$\eta_T = \frac{P_T}{P_F} = \frac{800}{1\,030} = 0,777 = 77,7\%$$

e, per la 5.34, quello del rendimento del gruppo turbina-alternatore è

$$\eta_{TA} = \frac{P_E}{P_F} = \frac{750}{1030} = 0,728 = 72,8\%$$

In definitiva, il fluido cede alla turbina 1 030 kW di potenza meccanica. La turbina dissipa al suo interno 230 kW e cede 800 kW di potenza meccanica sotto forma di energia dell'albero rotante. Questi, a sua volta, aziona l'alternatore che dissipa al suo interno 50 kW e produce una potenza elettrica di 750 kW.

5.20 Una termocoppia differenziale collegata tra le sezioni di ingresso e di uscita di una pompa indica che la portata d'acqua di 40 l/s nell'attraversare la pompa aumenta la sua temperatura di 0,04 °C. Essendo il calore specifico a volume costante dell'acqua pari a 4,18 kJ/(kg·°C) e la potenza in ingresso all'albero della pompa pari a 20 kW, calcolare il rendimento della pompa.



Ipotesi Il moto all'interno della pompa è adiabatico, cioè non ci sono scambi di calore con l'esterno.

Analisi L'aumento di temperatura dell'acqua è causato dalla conversione in energia termica dell'energia meccanica dissipata all'interno della pompa. Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, Q la portata, $Q_m = \rho Q$ la portata in massa, c_w il calore specifico dell'acqua e Δt l'aumento di temperatura, all'energia dissipata per unità di massa, data dalla 5.102, corrisponde la potenza

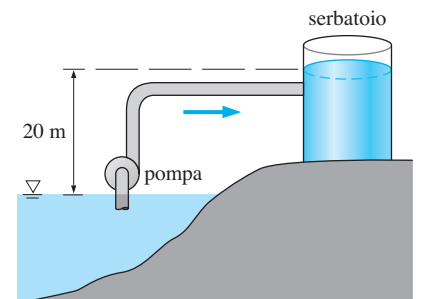
$$\begin{aligned} P_d &= Q_m c_w \Delta t = \rho Q c_w \Delta t = \\ &= 1000 \times 0,040 \times 4,18 \times 1000 \times 0,04 = 6690 \text{ W} = 6,69 \text{ kW} \end{aligned}$$

per cui il rendimento della pompa è

$$\eta_P = 1 - \frac{P_d}{P_F} = 1 - \frac{6,69}{20} = 0,666 = 66,6\%$$

Discussione Nonostante la potenza dissipata e trasformata in energia termica sia un terzo dell'energia in ingresso, la temperatura dell'acqua aumenta solo di una piccola frazione di grado. Ciò spiega perché, generalmente, l'aumento di temperatura del fluido dovuto a questa causa venga trascurato.

5.21 Una portata d'acqua di 70 l/s viene sollevata da un lago a un serbatoio, la cui superficie libera è ad una quota maggiore di 20 m, mediante una pompa che assorbe 20,4 kW di potenza elettrica. Trascurando le perdite di carico nelle tubazioni, calcolare il rendimento del gruppo pompa-motore e la differenza di pressione tra le sezioni di ingresso e di uscita della pompa, aventi per ipotesi lo stesso diametro.



Analisi La prevalenza totale ΔH della pompa è pari alla differenza tra i carichi totali H_v e H_m nelle sezioni subito a valle e subito a monte della pompa. Essa è pari alla somma della prevalenza geodetica Y (differenza tra le quote delle superfici libere dei serbatoi di scarico e di alimentazione) e delle perdite di carico lungo il percorso. Pertanto, se tali perdite sono trascurabili, si ha

$$\Delta H = H_v - H_m = Y = 20 \text{ m}$$

Tale quantità rappresenta l'energia che la pompa deve cedere all'unità di peso di fluido. Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua e Q la portata, la potenza P_F , cioè l'energia che la pompa deve cedere al fluido che transita nell'unità di tempo, si ottiene moltiplicando la prevalenza totale per la portata in peso $\rho g Q$. Per cui

$$P_F = \rho g Q \Delta H = 1000 \times 9,81 \times 0,070 \times 20 = 13\,700 \text{ W} = 13,7 \text{ kW}$$

Per la 5.35, il rendimento del gruppo pompa-motore è

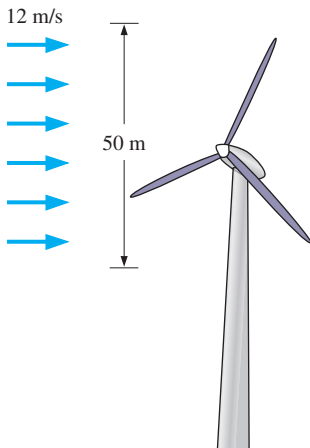
$$\eta_{PM} = \frac{P_F}{P_E} = \frac{13,7}{20,4} = 0,672 = 67,2\%$$

Se la differenza tra la quota z_v della sezione di uscita della pompa e la quota z_m della sezione di ingresso è trascurabile e, come nel caso in esame, le tubazioni di monte e di valle hanno lo stesso diametro per cui le altezze cinetiche sono uguali, essendo $\gamma = \rho g$ il peso specifico del liquido, si ha

$$\Delta H = H_v - H_m = \left(z_v + \frac{p_v}{\gamma} + \frac{\alpha V_v^2}{2g} \right) - \left(z_m + \frac{p_m}{\gamma} + \frac{\alpha V_m^2}{2g} \right) = \frac{p_v - p_m}{\gamma}$$

Pertanto, la differenza di pressione Δp tra le sezioni di ingresso e di uscita della pompa risulta

$$\Delta p = p_v - p_m = \gamma \Delta H = 1000 \times 9,81 \times 20 = 196\,000 \text{ Pa} = 19,6 \text{ kPa}$$



5.22 Calcolare l'energia meccanica per unità di massa dell'aria, di densità $1,25 \text{ kg/m}^3$, e la potenza teorica generata da una turbina eolica del diametro di 50 m, in un luogo in cui la velocità del vento, costante, è di 12 m/s, nonché la potenza elettrica generata, essendo il rendimento complessivo del 30%.

Analisi Essendo V la velocità del vento e A l'area della corrente che investe la turbina (attraverso un cilindro immaginario di diametro uguale a quello della turbina), tale corrente ha una portata $Q = VA$. La pressione dell'aria è ovunque pari alla pressione atmosferica. Pertanto, l'energia dell'aria che può essere convertita in lavoro è la sola energia cinetica, pari a $V^2/2$ per unità di massa. Indicando con ρ la densità dell'aria, la potenza teorica ceduta dalla corrente di aria è, quindi,

$$\begin{aligned} P_F &= \rho Q \frac{V^2}{2} = \rho \frac{V^3}{2} \frac{\pi D^2}{4} = \\ &= 1,25 \times \frac{12^3}{2} \times \frac{\pi \times 50^2}{4} = 2\,120\,000 \text{ W} = 2\,120 \text{ kW} \end{aligned}$$

La potenza elettrica generata P_E è il prodotto di tale valore per il rendimento della turbina. Per cui

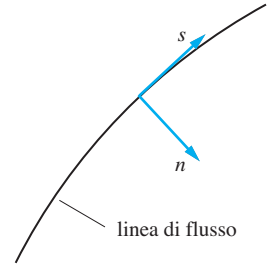
$$P_E = \eta_T P_F = 0,30 \times 2\,120 = 636 \text{ kW}$$

Discussione La potenza prodotta da una turbina eolica è proporzionale al cubo della velocità del vento. Pertanto, varia molto al variare di tale valore.

Teorema di Bernoulli

5.23 Cos'è l'accelerazione tangenziale? Che differenza c'è con quella centripeta? In moto permanente, una particella di fluido può accelerare?

Analisi L'accelerazione tangenziale è la componente dell'accelerazione nella direzione del moto e dipende dalla variazione del modulo della velocità lungo la linea di flusso. L'accelerazione centripeta, invece, è la componente dell'accelerazione nella direzione della normale principale e dipende dal raggio di curvatura. In generale, l'accelerazione è somma della accelerazione locale, dovuta alla variazione di velocità nel tempo in uno stesso punto, e della accelerazione convettiva, dovuta allo spostamento nel tempo della generica particella da una posizione ad un'altra. In moto permanente, essendo costante nel tempo la velocità in un generico punto, l'accelerazione locale è nulla; può invece essere diversa da zero l'accelerazione convettiva. Pertanto, in moto permanente una particella di fluido può accelerare.



5.24 Esprimere il teorema di Bernoulli in termini di (a) energie, (b) pressioni e (c) carichi.

Analisi (a) Energia (per unità di massa):

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{costante}$$

(b) Pressione (energia per unità di volume):

$$\rho gz + p + \rho \frac{v^2}{2} = \text{costante}$$

(c) Carico (energia per unità di peso):

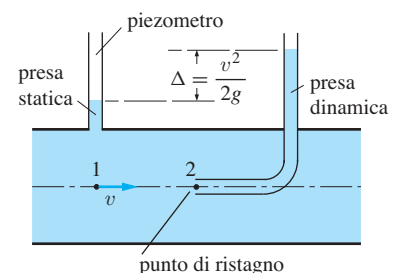
$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{costante}$$

5.25 Quali sono le tre ipotesi principali alla base del teorema di Bernoulli?

Analisi Le tre ipotesi alla base del teorema di Bernoulli sono che il fluido sia perfetto, che il fluido sia incompressibile e che il moto sia permanente in campo gravitazionale.

5.26 Cos'è la pressione di ristagno? Come può essere misurata?

Analisi La *pressione di ristagno*, o *pressione dinamica*, è pari a $\rho v^2/2$ ed è l'aumento di pressione che si ha in un fluido che si muove a velocità v quando, nel punto di impatto con un ostacolo, la velocità si annulla. Essa può essere misurata tramite un tubo di Pitot.



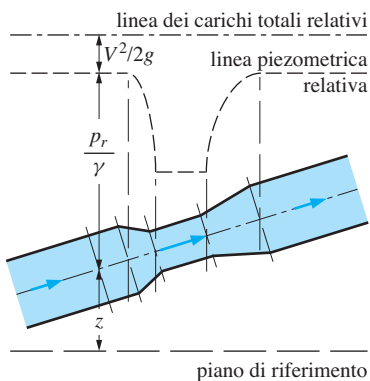
5.27 Definire la quota piezometrica e l'altezza cinetica di una particella di fluido in moto a quota z , con pressione p e velocità v .

Analisi La quota piezometrica h è pari alla somma della quota geodetica z della particella, misurata rispetto ad un piano orizzontale di riferimento, e della sua altezza piezometrica, cioè dell'altezza della colonna di fluido a cui corrisponde la pressione statica p . Per cui, essendo ρ la densità del fluido e γ il suo peso specifico,

$$h = z + \frac{p}{\rho g} = z + \frac{p}{\gamma}$$

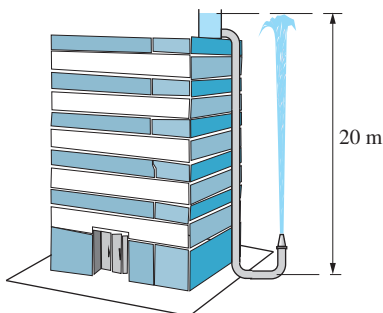
L'altezza cinetica h_c è la quota da cui deve partire un fluido in quiete, in un moto di caduta libera, perché raggiunga la velocità v . Pertanto,

$$h_c = \frac{v^2}{2g}$$



5.28 Cos'è la linea piezometrica? E la linea dei carichi totali? Quando coincidono entrambe con la superficie libera di un liquido?

Analisi Con riferimento alla traiettoria assiale di una generica corrente in pressione, fissato un piano di riferimento arbitrario, la linea che si ottiene riportando sulla verticale di ogni punto dell'asse, la cui quota sia z , un segmento pari all'altezza piezometrica p/γ è chiamata linea piezometrica (o, semplicemente, piezometrica); i suoi punti distano di $z + p/\gamma$ dal piano di riferimento. Riportando ancora, su ciascuna verticale, un segmento pari all'altezza cinetica della velocità media, si ottiene una linea, chiamata linea dei carichi totali, perché ciascun punto di essa dista dal piano di riferimento di una quantità pari al carico totale nella sezione. Entrambe le linee coincidono con la superficie libera di un liquido quando esso è in quiete e a contatto con l'atmosfera.



5.29 Sul tetto di un edificio c'è un serbatoio d'acqua la cui superficie libera è alla quota di 20 m al di sopra del piano stradale. Dal serbatoio è derivato un tubo, che scende fino al livello della strada, alla cui estremità è posto un ugello verticale rivolto verso l'alto. Qual è l'altezza massima raggiungibile teoricamente dal getto? Quali cause riducono tale altezza?

Analisi In assenza di perdite di energia e di effetti di attrito di qualunque tipo, l'altezza massima raggiungibile teoricamente dal getto è pari alla quota della superficie libera, cioè 20 m. In realtà, a causa dell'attrito nel tubo e nell'ugello e della resistenza dell'aria, l'altezza massima raggiunta dal getto sarà inferiore.

5.30 Spiegare il funzionamento di un sifone. È possibile che una corrente idrica attraversi un sifone che supera un ostacolo alto 7 m? Perché?

Analisi Un sifone è un tubo ad U rovescia. In un sifone che collega due serbatoi a superficie libera, se tra tali superfici vi è una differenza di quota, facendo in modo che il tubo si riempia di liquido, si instaura una portata. Nel tratto di tubo a quota superiore a quella della superficie libera di valle, la corrente è soggetta a pressioni inferiori alla pressione atmosferica (depressioni). In generale, poiché i fluidi non sono in grado di resistere a sforzi di trazione, in nessun punto di una massa fluida si può avere pressione assoluta p minore di zero. Ciò equivale a dire che la pressione relativa p_r , quando è negativa, non può essere maggiore,

in valore assoluto, della pressione atmosferica p_{atm} . Infatti, essendo per la 3.2

$$p = p_{\text{atm}} + p_r$$

e, dovendo essere sempre $p \geq 0$, quando il fluido è in depressione, cioè per $p < p_{\text{atm}}$ e $p_r < 0$, deve essere

$$|p_r| \leq p_{\text{atm}}$$

o, in termini di altezza piezometrica, essendo γ il peso specifico del liquido,

$$\left| \frac{p_r}{\gamma} \right| \leq \frac{p_{\text{atm}}}{\gamma}$$

Pertanto, il punto più alto raggiungibile, teoricamente, dal fluido è quello in cui la sua pressione assoluta è zero, cioè la sua pressione relativa è uguale a $-p_{\text{atm}}$ e, quindi, la sua altezza piezometrica relativa è uguale a $-p_{\text{atm}}/\gamma$. Nel caso di acqua, essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la sua densità ed essendo, al livello del mare e a temperatura ambiente, $p_{\text{atm}} = 101330 \text{ Pa}$, si ha

$$\frac{p_{\text{atm}}}{\gamma} = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} = \frac{101330}{1000 \times 9,81} = 10,33 \text{ m}$$

In tali condizioni, dunque, una corrente idrica è in grado di attraversare un sifone che supera un ostacolo alto 7 m.

5.31 In una località ad altitudine di 4390 m, dove la pressione atmosferica è di 58,5 kPa, è possibile che una corrente idrica attraversi un sifone che supera un ostacolo alto 8,5 m? Perché?

Analisi Essendo p_{atm} la pressione atmosferica, il punto più alto raggiungibile, teoricamente, da un fluido è quello in cui la sua pressione assoluta è zero, cioè la sua pressione relativa è uguale a $-p_{\text{atm}}$ e, quindi, la sua altezza piezometrica relativa è uguale a $-p_{\text{atm}}/\gamma$. Nel caso in esame, essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua e $p_{\text{atm}} = 58500 \text{ Pa}$ la pressione atmosferica, si ha

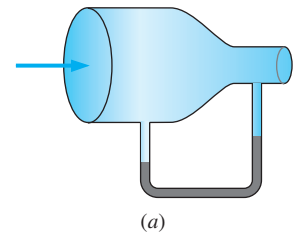
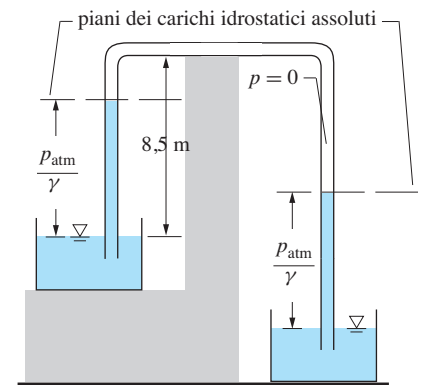
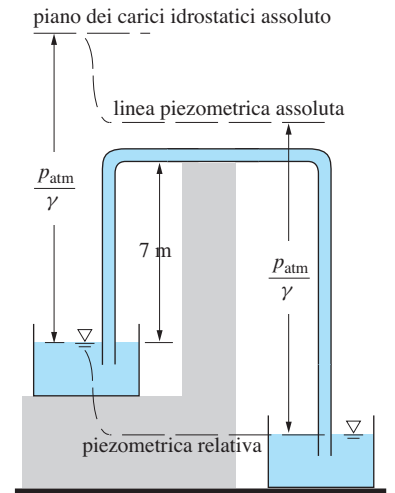
$$\frac{p_{\text{atm}}}{\gamma} = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} = \frac{58500}{1000 \times 9,81} = 5,96 \text{ m}$$

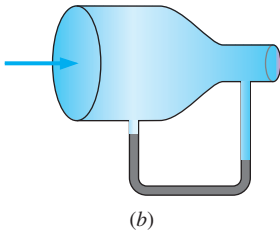
In tali condizioni, dunque, una corrente idrica **non** è in grado di attraversare un sifone che supera un ostacolo alto 8,5 m.

5.32 In un manometro differenziale, collegato alle sezioni di estremità di un convergente, i menischi si dispongono come nella figura a o b? Perché? Come si dispongono i menischi invertendo il verso del moto?

Analisi Come nella figura a. Infatti, applicando il teorema di Bernoulli tra la sezione 1, a diametro maggiore, e la sezione 2, a diametro minore, alle quali sono collegati i due rami del manometro e ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$





per cui la differenza di quota piezometrica Δh tra le due sezioni è

$$\Delta h = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}$$

Essendo per la 5.26

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

e, per ipotesi,

$$A_1 > A_2$$

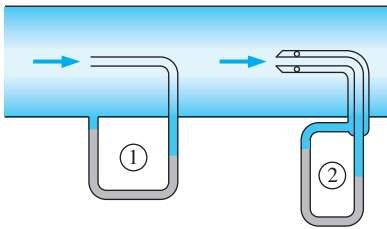
è anche

$$V_1 < V_2$$

Conseguentemente, deve necessariamente essere

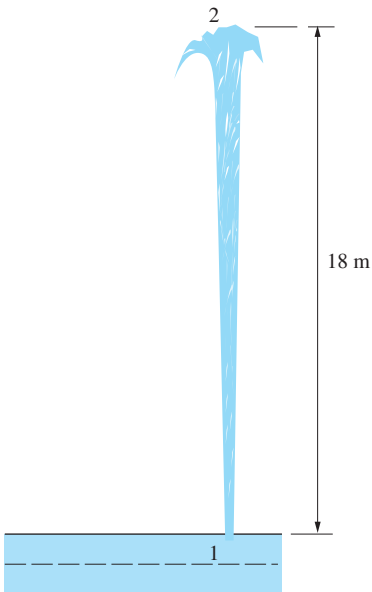
$$\Delta h > 0$$

Pertanto, la quota piezometrica maggiore si ha nella sezione a diametro maggiore. Per quanto sopra, tale configurazione non dipende dal verso del moto.



5.33 Per misurare la velocità in un punto di una corrente fluida all'interno di una tubazione può essere usato un tubo di Pitot, nelle due diverse disposizioni mostrate in figura, differenti per l'ubicazione della presa statica. L'indicazione manometrica è la stessa? Perché?

Analisi È la stessa. Infatti, in una generica sezione trasversale, se la corrente può essere considerata lineare, la quota piezometrica è la stessa in tutti i punti. Pertanto, l'ubicazione della presa statica, la quale misura proprio la quota piezometrica, non ha alcuna importanza, purché sia all'interno della stessa sezione trasversale.



5.34 Nelle regioni fredde, l'acqua nelle tubazioni può gelare e, se non si prendono opportune precauzioni, ciò può essere causa di rotture. A seguito di una rottura, l'acqua che fuoriesce da una tubazione forma un getto alto 18 m. Calcolare la pressione relativa all'interno della tubazione.

Analisi Nelle ipotesi di moto permanente e di fluido incompressibile, tra un punto 1 di una sezione trasversale della corrente nella tubazione, posta poco a monte del punto in cui si è verificata la rottura, e il punto 2 del getto alla quota massima, trascurando le perdite di carico tra i due punti, per il teorema di Bernoulli si ha

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Trascurando l'altezza cinetica all'interno della tubazione rispetto all'altezza piezometrica, essendo nulle nel punto 2 sia la pressione relativa che la velocità, si ha

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \cong z_2$$

da cui, essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, la pressione relativa all'interno della tubazione è

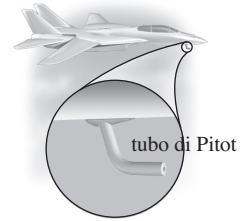
$$p_1 = \rho g(z_2 - z_1) = 1000 \times 9,81 \times 18 = 177 \text{ kPa}$$

Discussione Per effetto delle perdite di carico di cui il calcolo non tiene conto, la pressione effettiva risulterà leggermente maggiore di quella calcolata.

5.35 Un aereo viaggia a 3 000 m di quota, dove la densità dell'aria è di $0,909 \text{ kg/m}^3$. Qual è la velocità dell'aereo quando l'indicazione manometrica del tubo di Pitot usato per tale misura è di 3 kPa?

Analisi Considerando il moto (relativo) dell'aria intorno all'aereo come permanente e il fluido perfetto e incompressibile, per la 5.55, se Δh è la differenza di quota piezometrica e Δp la corrispondente differenza di pressione, la velocità V dell'aereo è

$$V = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \times 3\,000}{0,909}} = 81,2 \text{ m/s} = 292 \text{ km/h}$$



5.36 In un ufficio, l'acqua da bere viene prelevata da grandi bottiglie tramite un tubicino di plastica, del diametro di 6 mm, avente un'estremità all'interno della bottiglia e l'altra, nella quale è inserito un rubinetto, posta 60 cm al di sotto della quota del fondo della bottiglia. Calcolare il tempo minimo necessario per riempire un bicchiere di 200 cm^3 quando la bottiglia è piena per un'altezza di 45 cm e quando è piena per un'altezza di 10 cm.

Analisi Nelle ipotesi di moto permanente e di fluido incompressibile, tra un punto del liquido all'interno della bottiglia, il cui carico è pari alla quota z_s della superficie libera rispetto ad un generico piano di riferimento, e la sezione di sbocco u , dove la pressione relativa è nulla perché l'efflusso è in atmosfera, trascurando le perdite di carico lungo il percorso, per il teorema di Bernoulli, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$z_s = z_u + \frac{V_u^2}{2g}$$

Pertanto, quando la bottiglia è piena, cioè per $z_s - z_u = 45 + 60 = 105 \text{ cm}$, la velocità media allo sbocco è

$$V_1 = \sqrt{2g(z_s - z_u)} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 1,05} = 4,54 \text{ m/s}$$

Essendo d il diametro del tubo, la portata a serbatoio pieno è

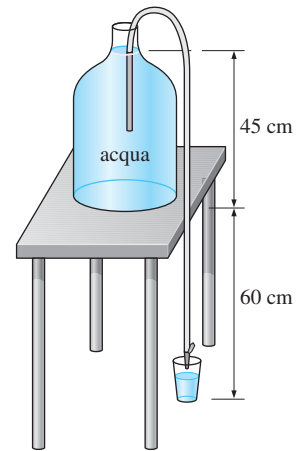
$$Q_1 = \frac{\pi d^2}{4} V_1 = \frac{\pi \times 0,006^2}{4} \times 4,54 = 128 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} = 0,128 \text{ l/s}$$

a cui corrisponde un tempo di riempimento (trascurando la corrispondente diminuzione di quota della superficie libera nella bottiglia, perché il volume di acqua nella bottiglia è molto più grande del volume W travasato nel bicchiere)

$$\Delta t_1 = \frac{W}{Q_1} = \frac{0,200}{0,128} = 1,56 \text{ s}$$

Quando la bottiglia è quasi vuota, cioè per $z_s - z_u = 10 + 60 = 70 \text{ cm}$, la velocità di efflusso risulta

$$V_2 = \sqrt{2g(z_s - z_u)} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,70} = 3,71 \text{ m/s}$$



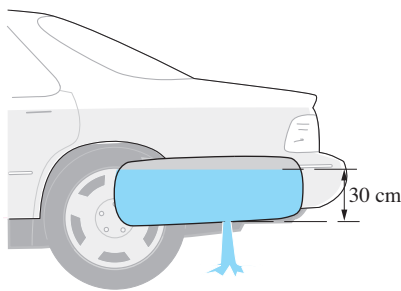
Conseguentemente, la portata diviene

$$Q_2 = \frac{\pi d^2}{4} V_2 = \frac{\pi \times 0,006^2}{4} \times 3,71 = 0,105 \text{ l/s}$$

a cui corrisponde un tempo di riempimento

$$\Delta t_2 = \frac{W}{Q_2} = \frac{0,200}{0,105} = 1,90 \text{ s}$$

Discussione Per effetto delle perdite di carico di cui il calcolo non tiene conto, la velocità di sbocco effettiva sarà leggermente inferiore di quella calcolata. Quindi, il tempo di riempimento effettivo sarà leggermente maggiore di quello indicato.



5.37 Viaggiando su una strada accidentata, il fondo di un'automobile urta contro un sasso appuntito e il serbatoio del carburante si buca. Calcolare la velocità iniziale di fuoriuscita del carburante, se all'interno del serbatoio la quota del pelo libero è di 30 cm.

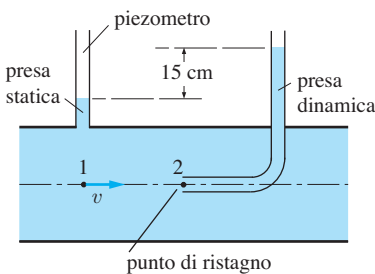
Analisi Nelle ipotesi di moto permanente e di fluido incomprimibile, tra un punto del liquido all'interno del serbatoio, il cui carico, se l'aria al di sopra della superficie libera è a pressione atmosferica, è pari alla quota z_s della superficie libera rispetto ad un generico piano di riferimento, e una sezione u del getto poco a valle del foro, dove la pressione relativa è nulla perché l'efflusso è in atmosfera, trascurando le perdite di carico lungo il percorso, per il teorema di Bernoulli, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$z_s = z_u + \frac{V_u^2}{2g}$$

Per cui, la velocità media iniziale di efflusso del carburante è

$$V_u = \sqrt{2g(z_s - z_u)} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,30} = 2,43 \text{ m/s}$$

Discussione Man mano che il livello della superficie libera si abbassa, la velocità di fuoriuscita si riduce, poiché essa è proporzionale alla radice quadrata del dislivello. Se il serbatoio è a perfetta tenuta, non vi può essere ingresso di aria dall'esterno che sostituisca il volume di carburante che via via fuoriesce. Quindi, l'aria al di sopra della superficie libera occupa un volume via via maggiore e la sua pressione va via via diminuendo. Ciò causa un'ulteriore diminuzione della velocità di efflusso del carburante dal foro.



5.38 In una tubazione orizzontale sono inseriti un piezometro e, sull'asse, la presa dinamica di un tubo di Pitot. Essendo il dislivello tra i due menischi di 15 cm, calcolare la velocità in corrispondenza dell'asse della tubazione.

Analisi Si consideri un punto 1 sulla traiettoria che contiene anche il punto di ristagno 2 sulla presa dinamica del tubo di Pitot, a distanza tale dalla presa dinamica da potere considerare le sue condizioni non influenzate dalla presenza della presa stessa. Applicando il teorema di Bernoulli tra il punto 1 e il punto 2, si ha

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

da cui, essendo $v_2 = 0$ e Δh la differenza tra le quota piezometriche,

$$v_1 = \sqrt{2g \left[\left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) \right]} = \sqrt{2g \Delta h}$$

Poiché la quota piezometrica relativa del punto di ristagno è pari al livello del menisco nella presa dinamica, mentre la quota piezometrica relativa di un punto qualunque della sezione in cui è inserita la presa statica (nella quale la corrente è lineare) è pari al livello nella presa statica stessa, la differenza tra le quote piezometriche è pari proprio al dislivello tra i due menischi. Per cui

$$v_1 = \sqrt{2g \Delta h} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,15} = 1,72 \text{ m/s}$$

Discussione Per misurare la velocità in un punto di una corrente fluida è sufficiente la lettura di un dislivello tra i menischi di due piezometri, di cui uno collegato ad una presa dinamica.

5.39 Dal fondo di un serbatoio cilindrico, di diametro D_0 e pieno d'acqua per un'altezza H , fuoriesce, con imbocco ben raccordato, un tronchetto di tubazione di diametro D . Scrivere la relazione che fornisce il tempo necessario affinché il serbatoio si vuoti per metà e completamente.

Analisi Nelle ipotesi di moto permanente e di fluido incompressibile, tra un punto del liquido all'interno del serbatoio, il cui carico è pari alla quota z_s della superficie libera rispetto ad un generico piano di riferimento, e la sezione u di sbocco, dove la pressione relativa è nulla perché l'efflusso è in atmosfera, trascurando le perdite di carico lungo il percorso, per il teorema di Bernoulli, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$z_s = z_u + \frac{V_u^2}{2g}$$

Trascurando la lunghezza del tronchetto di diametro D rispetto al generico dislivello h tra la superficie libera e il fondo, si ha $h \cong z_s - z_u$, per cui la velocità media allo sbocco risulta

$$V_u = \sqrt{2g(z_s - z_u)} \cong \sqrt{2gh}$$

e la portata vale

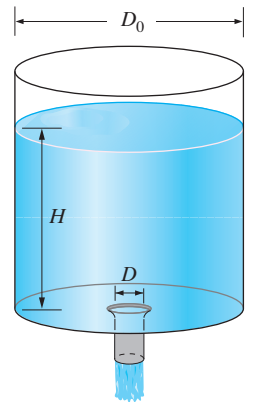
$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V_u \cong \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gh}$$

Il processo di vuotamento del serbatoio è un processo di moto vario in cui il livello dell'acqua nel serbatoio si abbassa man mano che l'acqua fuoriesce. Conseguentemente, il dislivello varia da $h = H$, a serbatoio completamente pieno, al valore $h = 0$, che si ha a serbatoio completamente vuoto. Nel generico intervallo di tempo dt , il volume $dW = Qdt$ che fuoriesce dal serbatoio causa una diminuzione dh del livello del serbatoio, di area trasversale A costante, tale che $A dh = dW$. Pertanto, deve essere

$$dW = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gh} dt = -\frac{\pi D_0^2}{4} dh$$

da cui

$$dt = -\frac{D_0^2}{D^2} \sqrt{\frac{1}{2gh}} dh = -\frac{D_0^2}{D^2 \sqrt{2g}} h^{-1/2} dh$$



Integrando tra l'istante iniziale $t = 0$ in cui $h = H$ e l'istante generico t in cui il dislivello è h , si ha

$$t = -\frac{D_0^2}{D^2 \sqrt{2g}} \left[\frac{h^{1/2}}{1/2} \right]_H^h = \frac{D_0^2}{D^2} \frac{2}{\sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h}) = \frac{D_0^2}{D^2} \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h})$$

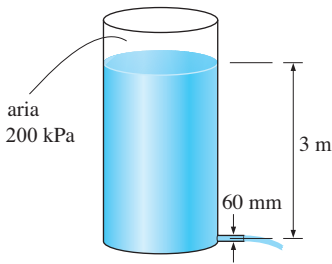
Pertanto, i tempi t_1 e t_2 necessari perché il serbatoio si vuoti, rispettivamente, per metà ($h = H/2$) e per intero ($h = 0$) sono

$$t_1 = \frac{D_0^2}{D^2} \sqrt{\frac{2H}{g}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

e

$$t_2 = \frac{D_0^2}{D^2} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Discussione Il tempo di svuotamento è inversamente proporzionale al quadrato del diametro D della tubazione di sbocco, per cui esso può essere, per esempio, ridotto ad un quarto raddoppiando tale diametro.



5.40 Dalla parete di un serbatoio in pressione fuoriesce, con imbocco ben raccordato, un tronchetto di tubazione del diametro di 60 mm. Il serbatoio è pieno d'acqua per un'altezza di 3 m rispetto all'asse del tubo. Al di sopra della superficie libera c'è aria alla pressione relativa di 200 kPa. Calcolare il valore iniziale della portata che fuoriesce dal serbatoio.

Analisi Nelle ipotesi di moto permanente e di fluido incompressibile, tra un punto del liquido all'interno del serbatoio, il cui carico è pari a quello di un punto della superficie libera, avente quota z_s rispetto ad un generico piano di riferimento e pressione relativa p , e la sezione u di sbocco, dove la pressione relativa è nulla perché l'efflusso è in atmosfera, trascurando le perdite di carico lungo il percorso, per il teorema di Bernoulli, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$z_s + \frac{p}{\rho g} = z_u + \frac{V_u^2}{2g}$$

da cui, essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, la velocità media iniziale allo sbocco risulta

$$V_u = \sqrt{\frac{2p}{\rho} + 2g(z_s - z_u)} = \sqrt{\frac{2 \times 200 \times 10^3}{1000} + 2 \times 9,81 \times 3} = 21,4 \text{ m/s}$$

Essendo $D = 0,060 \text{ m}$ il diametro della tubazione, la portata iniziale è

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V_u = \frac{\pi \times 0,060^2}{4} \times 21,4 = 0,061 \text{ m}^3/\text{s}$$

Discussione Per effetto delle perdite di carico di cui il calcolo non tiene conto, la portata iniziale effettiva sarà leggermente minore di quella calcolata. La portata va poi diminuendo man mano che il serbatoio si svuota perché la quota della superficie libera via via si abbassa.

5.41 Un grande serbatoio alimenta, tramite una tubazione di 50 mm di diametro, un piccolo serbatoio, inizialmente vuoto, dal cui fondo fuoriesce, con imbocco ben raccordato, un tronchetto di tubazione del diametro di 50 mm. Tra la sezione di sbocco sul fondo del serbatoio e la superficie libera del serbatoio di alimentazione il dislivello è di 5 m. Nell'ipotesi di perdite trascurabili, calcolare quale valore dell'altezza d'acqua si stabilisce nel serbatoio piccolo in condizioni stazionarie.

Analisi Nelle ipotesi di moto permanente e di fluido incompressibile, tra un punto del liquido all'interno del serbatoio grande, il cui carico è pari alla quota z_m della superficie libera rispetto ad un generico piano di riferimento, e la sezione u di sbocco della tubazione che alimenta il serbatoio piccolo, la cui quota piezometrica è pari alla quota z_v incognita della superficie libera del serbatoio piccolo, trascurando le perdite di carico lungo il percorso, per il teorema di Bernoulli, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$z_m = z_v + \frac{V_u^2}{2g}$$

Analogamente, tra un generico punto del liquido all'interno del serbatoio piccolo, il cui carico è pari alla quota z_v della superficie libera, e la sezione s di sbocco del tronchetto di tubazione che fuoriesce dal serbatoio piccolo, dove la pressione relativa è nulla perché lo sbocco è in atmosfera, trascurando le perdite di carico lungo il percorso, per il teorema di Bernoulli, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$z_v = z_s + \frac{V_s^2}{2g}$$

In condizioni stazionarie, la portata in ingresso nel serbatoio piccolo deve essere uguale a quella in uscita. Essendo uguali i diametri della tubazione che alimenta il serbatoio e della tubazione da cui il liquido defluisce, affinché siano uguali le portate devono essere uguali le velocità medie. Pertanto, si ha

$$V_u = \sqrt{2g(z_m - z_v)} = V_s = \sqrt{2g(z_v - z_s)}$$

da cui

$$z_m - z_v = z_v - z_s$$

e, in definitiva,

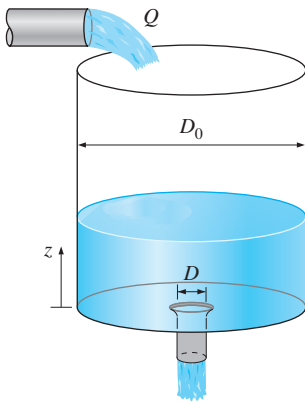
$$z_v = \frac{1}{2}(z_m + z_s)$$

Quindi, in condizioni stazionarie, il livello nel serbatoio piccolo si porta ad una quota che è la media tra quella del serbatoio grande e quella della sezione di sbocco del tubo che fuoriesce dal serbatoio piccolo. Introducendo il dislivello Δh , cioè ponendo $z_s = z_m - \Delta h$, si ha

$$z_v = \frac{1}{2}(z_m + z_s) = \frac{1}{2}(z_m + z_m - \Delta h) = z_m - \frac{\Delta h}{2}$$

Nel caso in esame, trascurando il dislivello tra il fondo del serbatoio piccolo e la sezione di sbocco s , si ha $\Delta h = 5$ m. Pertanto, in condizioni stazionarie, il serbatoio piccolo sarà pieno per un'altezza di 2,5 m.

5.42 Una portata costante Q alimenta un serbatoio cilindrico, di diametro D_0 , inizialmente vuoto, dal cui fondo fuoriesce, con imbocco ben raccordato,



un tronchetto di tubazione di diametro D . Calcolare la massima altezza d'acqua che si stabilisce nel serbatoio e ricavare la relazione che fornisce l'altezza d'acqua nel contenitore in funzione del tempo.

Analisi Nelle ipotesi di moto permanente e di fluido incompressibile, tra un punto del liquido all'interno del serbatoio, il cui carico è pari alla quota z_s della superficie libera rispetto ad un generico piano di riferimento, e la sezione u di sbocco, dove la pressione relativa è nulla perché l'efflusso è in atmosfera, trascurando le perdite di carico lungo il percorso, per il teorema di Bernoulli, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$z_s = z_u + \frac{V_u^2}{2g}$$

Assumendo come piano di riferimento il piano che contiene il fondo del serbatoio e trascurando il dislivello tra questo e la sezione di sbocco, per cui $z_s = z$ e $z_u = 0$, la velocità media allo sbocco risulta

$$V_u = \sqrt{2g(z_s - z_u)} = \sqrt{2gz}$$

per cui la portata effluente dal serbatoio è

$$Q_e = \frac{\pi D^2}{4} V_u = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gz}$$

Pertanto, perché dal serbatoio fuoriesca una portata Q_e uguale alla portata Q che alimenta il serbatoio è necessario che il serbatoio si riempia fino alla quota

$$z_{\max} = \frac{1}{2g} \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \right)^2$$

La relazione che fornisce l'altezza d'acqua nel contenitore in funzione del tempo si ricava osservando che il volume d'acqua Qdt , entrante nel serbatoio nel generico intervallo infinitesimo di tempo dt , in parte defluisce dal fondo mentre il restante volume si invasa nel serbatoio, incrementandone l'altezza di dz . Pertanto, si ha

$$Qdt = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gz} dt + \frac{\pi D_0^2}{4} dz$$

e, separando le variabili e riordinando,

$$dt = \frac{\pi D_0^2}{4Q - \pi D^2 \sqrt{2gz}} dz$$

Integrando tra l'istante iniziale $t = 0$ in cui il serbatoio è vuoto ($z = 0$) e l'istante generico t in cui il livello ha raggiunto la quota z , si ha

$$t = \frac{2\pi D_0^2}{(\pi D^2 \sqrt{2g})^2} \left(\pi D^2 \sqrt{2gz} - 4Q \ln \frac{4Q - \pi D^2 \sqrt{2gz}}{4Q} \right)$$

Discussione La relazione ottenuta è implicita in z , cioè non può essere scritta nella forma $z = f(t)$. Più semplice è il calcolo inverso, cioè quello del tempo t necessario perché all'interno del serbatoio si raggiunga un'altezza d'acqua z assegnata.

5.43 I due rami di un manometro differenziale a mercurio sono collegati alle sezioni di estremità di un convergente, aventi, rispettivamente, diametro di 100 mm e di 50 mm, in cui defluisce una portata idrica di 5 l/s. Calcolare, nell'ipotesi di perdite trascurabili, l'indicazione del manometro.

Analisi Applicando il teorema di Bernoulli tra la sezione 1, di diametro $D_1 = 100$ mm, e la sezione 2, di diametro $D_2 = 50$ mm, alle quali sono collegati i due rami del manometro, trascurando la perdita di carico tra le due sezioni e ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

per cui la differenza di quota piezometrica Δh tra le due sezioni è

$$\Delta h = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}$$

Poiché i rami del manometro differenziale sono collegati alla corrente tramite due prese statiche, lo strumento misura proprio la differenza di quote piezometriche Δh , che è legata alla lettura manometrica Δ dalla relazione

$$\Delta h = \Delta \frac{\rho_m - \rho}{\rho}$$

in cui $\rho_m = 13\,600 \text{ kg/m}^3$ è la densità del mercurio e $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ è la densità dell'acqua. Pertanto, essendo, rispettivamente,

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi \times 0,100^2}{4} = 0,00785 \text{ m}^2$$

e

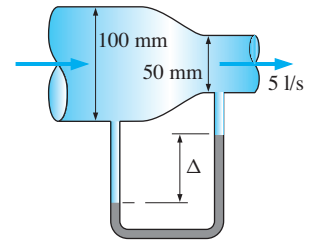
$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi \times 0,050^2}{4} = 0,00196 \text{ m}^2$$

le aree delle due sezioni e Q la portata, si ha

$$\Delta \frac{\rho_m - \rho}{\rho} = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)$$

da cui

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) \frac{\rho}{\rho_m - \rho} = \\ &= \frac{0,005^2}{2 \times 9,81} \left(\frac{1}{0,00196^2} - \frac{1}{0,00785^2} \right) \times \frac{1\,000}{13\,600 - 1\,000} = 0,0246 \text{ m} \end{aligned}$$



5.44 Calcolare la pressione relativa nel punto di prua di un aereo in volo alla velocità di 200 km/h alla quota di 12 000 m, in corrispondenza della quale la densità dell'aria è di $0,312 \text{ kg/m}^3$.

Analisi Nel moto relativo dell'aria attorno all'aereo, si consideri un punto 1 nell'aria, a distanza tale dall'aereo da potere considerare le sue condizioni non

influenzate dalla presenza dell'aereo stesso e appartenente alla traiettoria che contiene anche il punto 2 di ristagno sulla prua. Tra i due punti, nelle ipotesi di moto permanente e di fluido incomprimibile, trascurando le perdite di carico, per il teorema di Bernoulli, essendo $z_1 = z_2$ e $v_2 = 0$, si ha

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho}$$

Per cui, essendo ρ la densità dell'aria, nel punto di prua la pressione relativa (rispetto alla pressione atmosferica nel punto 1) vale

$$p_{r2} = p_2 - p_1 = \rho \frac{v_1^2}{2} = 0,312 \times \frac{(200/3,6)^2}{2} = 481 \text{ Pa}$$

Discussione L'ipotesi di fluido incomprimibile è accettabile solo nei casi in cui il numero di Mach risulti minore di 0,3. Infatti, i risultati che si ottengono tenendo o non tenendo conto della comprimibilità differiscono di non più del 2% per $Ma < 0,3$. Per l'aria a pressione atmosferica, in cui la velocità c del suono è uguale a 340 m/s, questo limite corrisponde all'incirca a una velocità di 100 m/s (360 km/h). Nel caso in esame, è $v = 200/3,6 = 55,6$ m/s e, quindi, per il valore di c valido a livello del mare, risulterebbe $Ma = 55,6/340 = 0,16 < 0,3$. Tuttavia, va tenuto presente che, poiché la velocità c del suono nell'aria diminuisce con la radice quadrata della temperatura assoluta (vedi Esempio 5.8), all'aumentare dell'altitudine, diminuendo la temperatura, la velocità del suono diminuisce e, quindi, il numero di Mach aumenta. Nel caso in esame, poiché alla quota di 12 000 m l'atmosfera ha una temperatura di circa -56°C , la velocità del suono scende a circa 300 m/s. Pertanto, si ha $Ma = 55,6/300 = 0,19 < 0,3$.

5.45 Una vasca circolare, del diametro di 10 m e piena d'acqua per un'altezza di 2 m, viene svuotata tramite un breve tronco di tubazione del diametro di 60 mm che fuoriesce con imbocco ben raccordato dalla base della vasca. Calcolare la portata massima e il tempo necessario perché la vasca si svuoti completamente.

Analisi Nelle ipotesi di moto permanente e di fluido incomprimibile, tra un punto del liquido all'interno della vasca, il cui carico è pari alla quota z_s della superficie libera rispetto ad un generico piano di riferimento, e la sezione u di sbocco, dove la pressione relativa è nulla perché l'efflusso è in atmosfera, trascurando le perdite di carico lungo il percorso, per il teorema di Bernoulli, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$z_s = z_u + \frac{V_u^2}{2g}$$

Essendo $H = z_s - z_u$ il dislivello tra la superficie libera e la sezione di sbocco, si ha

$$V_u = \sqrt{2g(z_s - z_u)} = \sqrt{2gH}$$

per cui, trascurando il dislivello tra il fondo del serbatoio e la sezione di sbocco ed essendo $D = 0,060$ m il diametro della tubazione, la portata vale

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V_u = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gH} = \frac{\pi \times 0,060^2}{4} \sqrt{2 \times 9,81 \times 2} = 0,0177 \text{ m}^3/\text{s}$$

Il tempo necessario perché il serbatoio si svuoti completamente, secondo il risultato del problema 5.39, è

$$t = \frac{D_0^2}{D^2} \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{10^2}{0,060^2} \sqrt{\frac{2 \times 2}{9,81}} = 17\,700 \text{ s} = 4 \text{ h } 55 \text{ min}$$

5.46 I due rami di un manometro differenziale ad acqua sono collegati alle sezioni di estremità di un convergente, aventi, rispettivamente, diametro di 60 mm e di 40 mm, in cui defluisce una portata d'aria di 45 l/s alla pressione di 110 kPa e alla temperatura di 50 °C. Essendo, in tali condizioni, la densità dell'aria pari a 1,19 kg/m³, calcolare il dislivello tra i menischi nei due rami del manometro.

Analisi Applicando il teorema di Bernoulli tra la sezione 1, di diametro $D_1 = 60$ mm, e la sezione 2, di diametro $D_2 = 40$ mm, alle quali sono collegati i due rami del manometro, trascurando la perdita di carico tra le due sezioni e ponendo $\alpha = 1$, essendo trascurabili nei gas le differenze di pressione dovute alle differenze di quota in quanto fluidi di piccolo peso specifico, si ha

$$\frac{p_1}{\rho_g} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_g} + \frac{V_2^2}{2}$$

per cui la differenza di pressione Δp tra le due sezioni è

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho_g}{2} (V_2^2 - V_1^2)$$

Poiché i rami del manometro differenziale sono collegati alla corrente tramite due prese statiche, lo strumento misura proprio la differenza di pressione Δp espressa in colonna d'acqua, per cui

$$\Delta p = \rho g \Delta$$

in cui $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ è la densità dell'acqua. Pertanto, essendo, rispettivamente,

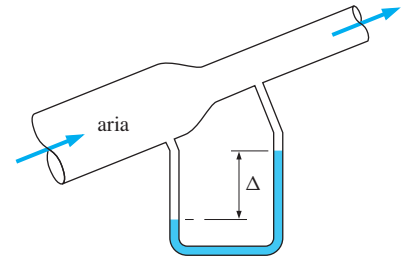
$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi \times 0,060^2}{4} = 0,00283 \text{ m}^2$$

e

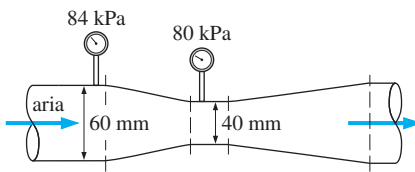
$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi \times 0,040^2}{4} = 0,00126 \text{ m}^2$$

le aree delle due sezioni, $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ la portata e $\rho_g = 1,19 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'aria, si ha

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{\rho_g}{2\rho g} (V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho_g}{2\rho g} Q^2 \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) = \\ &= \frac{1,19}{2 \times 1\,000 \times 9,81} \times 0,045^2 \times \left(\frac{1}{0,00126^2} - \frac{1}{0,00283^2} \right) = 0,0620 \text{ m} \end{aligned}$$



5.47 In una tubazione del diametro di 60 mm, in cui circola aria con densità di 1,20 kg/m³, è inserito un venturimetro avente una sezione ristretta del diametro di 40 mm. Due manometri metallici collegati alla sezioni di estremità



del tratto convergente indicano, rispettivamente, 84 kPa e 80 kPa. Calcolare la portata.

Analisi Applicando il teorema di Bernoulli tra la sezione 1, di diametro $D_1 = 60$ mm, e la sezione 2, di diametro $D_2 = 40$ mm, alle quali sono collegati i due manometri, trascurando la perdita di carico tra le due sezioni e ponendo $\alpha = 1$, essendo trascurabili nei gas le differenze di pressione dovute alle differenze di quota in quanto fluidi di piccolo peso specifico, si ha

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}$$

per cui, essendo, rispettivamente,

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi \times 0,060^2}{4} = 0,00283 \text{ m}^2$$

e

$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi \times 0,040^2}{4} = 0,00126 \text{ m}^2$$

le aree delle due sezioni e $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ la portata, la differenza di pressione tra le due sezioni è

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho Q^2}{2} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)$$

Risolvendo rispetto alla portata, si ha

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 \times (84 - 80) \times 10^3}{1,20}} \frac{0,00283 \times 0,00126}{\sqrt{0,00283^2 - 0,00126^2}} = 0,115 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Discussione I venturimetri permettono di misurare la portata di correnti fluide in pressione semplicemente tramite la lettura di una differenza di pressioni o di quote piezometriche. A causa delle perdite di carico di cui il calcolo non tiene conto, la portata effettiva sarà leggermente inferiore di quella appena calcolata. Usando strumenti normalizzati, costruiti cioè secondo la normativa tecnica stabilita dagli organi a ciò preposti, la differenza è inferiore all'1%. Delle perdite di carico si può, comunque, tener conto introducendo un coefficiente correttivo nell'espressione della portata.

5.48 Nella condotta principale di una rete urbana di distribuzione la pressione relativa dell'acqua è di 400 kPa. È possibile servire un quartiere posto 50 m più in alto?

Analisi Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, la pressione relativa $p = 400 \text{ kPa}$ è equivalente a quella esercitata da una colonna di fluido di altezza

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{400 \times 10^3}{1000 \times 9,81} = 40,8 \text{ m}$$

Il fluido non può raggiungere un'altezza maggiore di h . Pertanto, essendo $h < 50$ m, non è possibile servire un quartiere posto 50 m più in alto.

Discussione In effetti, perché l'acqua raggiunga il quartiere posto 50 m più in alto, h deve essere almeno pari alla somma del dislivello geodetico (50 m) e delle perdite di carico lungo il percorso.

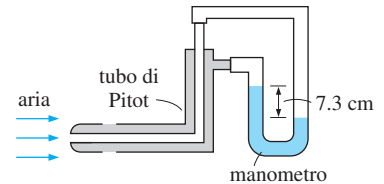
5.49 In un manometro differenziale ad acqua, collegato alle due prese di un tubo di Pitot utilizzato per misurare la velocità di una corrente d'aria di densità pari a $1,25 \text{ kg/m}^3$, il dislivello tra i menischi nei due rami è di 7,3 cm. Calcolare la velocità dell'aria.

Analisi Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua e $\Delta = 7,3 \text{ cm}$ la lettura manometrica, per la 3.21, la differenza di pressione Δp tra il punto di ristagno e la presa statica è

$$\Delta p = \rho g \Delta = 1000 \times 9,81 \times 0,073 = 716 \text{ Pa}$$

Nelle ipotesi di fluido perfetto e incompressibile, per la 5.55, essendo Δh la differenza di quota piezometrica e ρ_g la densità dell'aria, la velocità v dell'aria è

$$v = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho_g}} = \sqrt{\frac{2 \times 716}{1,25}} = 33,8 \text{ m/s}$$



5.50 Un grande serbatoio a tenuta stagna contiene acqua per un'altezza di 20 m e, superiormente, aria alla pressione relativa di 2 bar. Calcolare l'altezza massima, rispetto al fondo del serbatoio, raggiungibile dal getto che fuoriesce da un tubo verticale diretto verso l'alto.

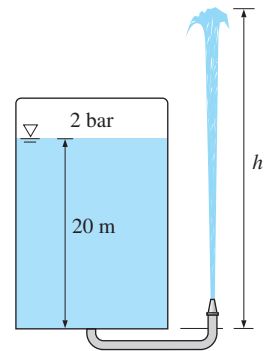
Analisi Nelle ipotesi di moto permanente e di fluido incompressibile, tra un punto 1 del liquido all'interno del serbatoio, il cui carico è pari a quello di un punto della superficie libera, avente quota z_s rispetto ad un generico piano di riferimento e pressione relativa p , e il punto più alto 2 raggiunto dal getto, che ha pressione relativa nulla perché è in atmosfera e velocità nulla, trascurando le perdite di carico lungo il percorso, per il teorema di Bernoulli si ha

$$z_s + \frac{p}{\rho g} = z_2$$

da cui, assumendo come piano di riferimento il fondo del serbatoio ed essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, l'altezza h raggiunta dal getto è

$$h = z_2 = z_s + \frac{p}{\rho g} = 20 + \frac{2 \times 10^5}{1000 \times 9,81} = 40,4 \text{ m}$$

Discussione Per effetto delle perdite di carico di cui il calcolo non tiene conto, l'altezza effettiva raggiunta dal getto risulterà leggermente minore.



Equazione dell'energia

5.51 Nel moto permanente adiabatico di un fluido incompressibile, la temperatura può diminuire? Perché?

Analisi È impossibile che, durante il moto permanente adiabatico di un fluido incompressibile, la temperatura diminuisca, perché questo richiederebbe a sua volta una diminuzione dell'entropia di un sistema adiabatico, cosa che costituirebbe una violazione del secondo principio della termodinamica.

5.52 Nel moto permanente adiabatico di un fluido incompressibile, se la temperatura del fluido si mantiene costante, è corretto affermare che gli effetti dell'attrito sono trascurabili?

Analisi Sì. Se nel moto permanente adiabatico di un fluido incompressibile la temperatura del fluido si mantiene costante, gli effetti dell'attrito sono trascurabili, perché qualunque fenomeno irreversibile (come l'attrito) farebbe aumentare l'entropia, e quindi la temperatura, del fluido.

5.53 Cosa sono le perdite di carico irreversibili? Che rapporto hanno con le perdite di energia meccanica?

Analisi La perdita di carico irreversibile è l'energia meccanica dissipata e trasformata in calore dall'unità di peso di fluido nel suo moto. La perdita di energia meccanica complessiva è, dunque, pari al prodotto della perdita di carico per il peso del fluido.

5.54 Cos'è la prevalenza di una pompa? Che rapporto ha con la potenza fornita alla pompa?

Analisi La prevalenza totale di una pompa è l'energia che la pompa fornisce all'unità di peso di fluido. Essa è pari alla differenza tra i carichi totali nelle sezioni subito a valle della pompa (sezione di uscita) e subito a monte della stessa (sezione di ingresso). La prevalenza è pari alla somma della prevalenza geodetica (differenza tra le quote piezometriche del serbatoio di scarico e di quello di alimentazione) e delle perdite di carico lungo il percorso. La potenza che la pompa fornisce al liquido (cioè l'energia che la pompa cede al fluido nell'unità di tempo) è pari al prodotto della prevalenza (energia fornita all'unità di peso) per la portata in peso (peso di fluido che transita attraverso la pompa nell'unità di tempo). La potenza fornita alla pompa è pari al prodotto della potenza ceduta al fluido divisa per il rendimento della pompa.

5.55 Cos'è il coefficiente di ragguglio della potenza cinetica? Quando è significativo?

Analisi Il coefficiente di ragguglio della potenza cinetica è un coefficiente che consente di esprimere l'altezza cinetica di una corrente in una sezione trasversale mediante il valore della velocità media, anziché attraverso l'effettivo profilo di velocità. Tale coefficiente è sempre maggiore di 1 e, pertanto, l'altezza cinetica calcolata con la velocità media è sempre inferiore al valore effettivo.

Le differenze tra i due valori sono però molto spesso piccole, in quanto, nella maggior parte dei casi pratici (moti turbolenti senza particolari singolarità), il coefficiente di ragguaglio della potenza cinetica è appena maggiore di uno (compreso tra 1,04 e 1,11).

5.56 Una piscina viene alimentata da una falda sotterranea mediante una pompa sommersa della potenza di 3 kW e rendimento del 70%. Le tubazioni di aspirazione e di mandata hanno, rispettivamente, diametro di 60 mm e di 50 mm. Essendo la superficie libera nella piscina a 30 m di quota rispetto al livello della falda, calcolare la portata massima sollevabile e la differenza di quota piezometrica tra le sezioni di uscita e di ingresso della pompa (*prevalenza manometrica*).

Analisi Essendo $\eta_{PM} = 0,70$ il rendimento complessivo del gruppo pompamotore e $P_E = 3$ kW la potenza elettrica assorbita, per la 5.35 la potenza P_F che la pompa cede al fluido è

$$P_F = \eta_{PM} P_E = 0,7 \times 3 = 2,1 \text{ kW}$$

Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua e Q la portata, la potenza P_F è pari al prodotto della prevalenza totale ΔH_P per la portata in peso $\rho g Q$. La prevalenza totale è pari alla somma della prevalenza geodetica Y (differenza tra le quote delle superfici libere del serbatoio di scarico e di quello di alimentazione) e delle perdite di carico lungo il percorso. Pertanto, nell'ipotesi che tali perdite siano trascurabili si ha $\Delta H_P = Y = 30 \text{ m}$. La portata massima sollevabile è

$$Q = \frac{P_F}{\rho g Y} = \frac{2,1 \times 10^3}{1000 \times 9,81 \times 30} = 0,00714 \text{ m}^3/\text{s} = 7,14 \text{ l/s}$$

La differenza di quota piezometrica Δh tra le sezioni di uscita e di ingresso della pompa (prevalenza manometrica) differisce dalla differenza ΔH_P tra i carichi totali (prevalenza totale) solo quando le altezze cinetiche nelle due sezioni sono diverse, come nel caso in esame. Si ha infatti, indicando col pedice v le grandezze relative alla sezione subito a valle della pompa e con il pedice m quelle relative alla sezione subito a monte,

$$\Delta H_P = \left(z_v + \frac{p_v}{\rho g} + \frac{V_v^2}{2g} \right) - \left(z_m + \frac{p_m}{\rho g} + \frac{V_m^2}{2g} \right) = \Delta h + \left(\frac{V_v^2}{2g} - \frac{V_m^2}{2g} \right)$$

da cui, essendo, rispettivamente, A_v e A_m le aree delle due sezioni e

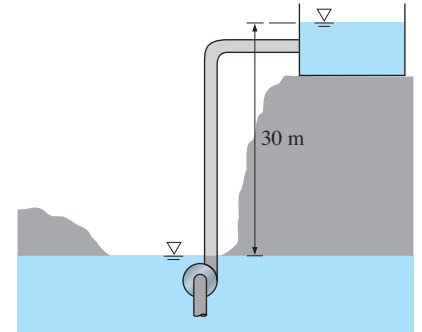
$$V_v = \frac{Q}{A_v} = \frac{Q}{\pi D_v^2/4} = \frac{0,00714}{\pi \times 0,050^2/4} = 3,64 \text{ m/s}$$

e

$$V_m = \frac{Q}{A_m} = \frac{Q}{\pi D_m^2/4} = \frac{0,00714}{\pi \times 0,060^2/4} = 2,52 \text{ m/s}$$

si ha

$$\Delta h = \Delta H_P - \left(\frac{V_v^2}{2g} - \frac{V_m^2}{2g} \right) = 30 - \left(\frac{3,64^2}{2 \times 9,81} - \frac{2,52^2}{2 \times 9,81} \right) = 29,7 \text{ m/s}$$



Discussione Per effetto delle perdite di carico di cui il calcolo non tiene conto, la portata sollevata risulterà minore di quella calcolata.

5.57 Con riferimento al problema precedente, calcolare la portata e la prevalenza manometrica nell'ipotesi che le perdite di carico siano complessivamente pari a 5 m.

Analisi Essendo $\eta_{PM} = 0,70$ il rendimento complessivo del gruppo pompa-motore e $P_E = 3$ kW la potenza elettrica assorbita, per la 5.35 la potenza P_F che la pompa cede al fluido è

$$P_F = \eta_{PM} P_E = 0,7 \times 3 = 2,1 \text{ kW}$$

Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua e Q la portata, la potenza P_F è pari al prodotto della prevalenza totale ΔH_P per la portata in peso $\rho g Q$. La prevalenza totale è pari alla somma della prevalenza geodetica Y (differenza tra le quote delle superfici libere dei serbatoi di scarico e di alimentazione) e delle perdite di carico $\Delta H_d = 5$ m lungo il percorso. Pertanto, essendo $Y = 30$ m, la prevalenza totale è

$$\Delta H_P = Y + \Delta H_d = 30 + 5 = 35 \text{ m}$$

Conseguentemente, la portata massima sollevabile è

$$Q = \frac{P_F}{\rho g Y} = \frac{2,1 \times 10^3}{1000 \times 9,81 \times 35} = 0,00612 \text{ m}^3/\text{s} = 6,12 \text{ l/s}$$

La differenza di quota piezometrica Δh tra le sezioni di uscita e di ingresso della pompa (prevalenza manometrica) differisce dalla differenza ΔH_P tra i carichi totali (prevalenza totale) solo quando le altezze cinetiche nelle due sezioni sono diverse, come nel caso in esame. Si ha infatti, indicando col pedice v le grandezze relative alla sezione subito a valle della pompa e con il pedice m quelle relative alla sezione subito a monte,

$$\Delta H_P = \left(z_v + \frac{p_v}{\rho g} + \frac{V_v^2}{2g} \right) - \left(z_m + \frac{p_m}{\rho g} + \frac{V_m^2}{2g} \right) = \Delta h + \left(\frac{V_v^2}{2g} - \frac{V_m^2}{2g} \right)$$

da cui, essendo, rispettivamente, A_v e A_m le aree delle due sezioni e

$$V_v = \frac{Q}{A_v} = \frac{Q}{\pi D_v^2/4} = \frac{0,00612}{\pi \times 0,050^2/4} = 3,12 \text{ m/s}$$

e

$$V_m = \frac{Q}{A_m} = \frac{Q}{\pi D_m^2/4} = \frac{0,00612}{\pi \times 0,060^2/4} = 2,16 \text{ m/s}$$

si ha

$$\Delta h = \Delta H_P - \left(\frac{V_v^2}{2g} - \frac{V_m^2}{2g} \right) = 35 - \left(\frac{3,12^2}{2 \times 9,81} - \frac{2,16^2}{2 \times 9,81} \right) = 34,7 \text{ m/s}$$

Discussione Considerando le perdite di carico nelle tubazioni, a parità di potenza della pompa, aumenta la prevalenza e diminuisce la portata sollevata.

5.58 In un impianto idroelettrico il salto disponibile tra il serbatoio che alimenta la turbina e il serbatoio di scarico è di 70 m. Calcolare la portata minima necessaria per generare 100 kW di potenza elettrica, nell'ipotesi che il rendimento complessivo del gruppo turbina-alternatore sia dell'83%.

Analisi Essendo $\eta_{TA} = 0,83$ il rendimento complessivo del gruppo turbina-alternatore e $P_E = 100$ kW la potenza elettrica da generare, per la 5.34 la potenza P_F che il fluido deve cedere alla turbina è

$$P_F = \frac{P_E}{\eta_{TA}}$$

Essendo $\rho = 1000$ kg/m³ la densità dell'acqua e Q la portata, la potenza P_F è pari al prodotto del salto utile ΔH_T per la portata in peso $\rho g Q$. Il salto utile è pari alla differenza tra il salto disponibile Y (differenza tra le quote delle superfici libere dei serbatoi di alimentazione e di scarico) e le perdite di carico ΔH_d lungo il percorso. Pertanto, considerando trascurabili tali perdite, si ha $\Delta H_T = Y = 70$ m. La portata minima necessaria per generare la potenza richiesta è, quindi,

$$Q = \frac{P_F}{\rho g \Delta H_T} = \frac{P_E}{\eta_{TA} \rho g \Delta H_T} = \frac{100\,000}{0,83 \times 1000 \times 9,81 \times 70} = 0,175 \text{ m}^3/\text{s}$$

Discussione Per generare la potenza elettrica richiesta, è necessaria una portata di almeno 0,175 m³/s. Per effetto delle perdite di carico di cui il calcolo non tiene conto, il salto utile sarà minore di Y e, pertanto, per generare la stessa potenza sarà necessaria una portata maggiore.

5.59 Con riferimento al problema precedente, calcolare la portata nell'ipotesi che le perdite di carico siano complessivamente pari a 10 m.

Analisi Essendo $\eta_{TA} = 0,83$ il rendimento complessivo del gruppo turbina-alternatore e $P_E = 100$ kW la potenza elettrica da generare, per la 5.34 la potenza P_F che il fluido deve cedere alla turbina è

$$P_F = \frac{P_E}{\eta_{TA}}$$

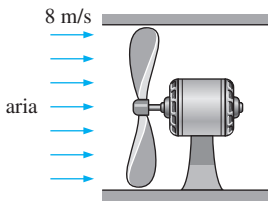
Essendo $\rho = 1000$ kg/m³ la densità dell'acqua e Q la portata, la potenza P_F è pari al prodotto del salto utile ΔH_T per la portata in peso $\rho g Q$. Il salto utile è pari alla differenza tra il salto disponibile Y (differenza tra le quote delle superfici libere dei serbatoi di alimentazione e di scarico) e le perdite di carico $\Delta H_d = 10$ m lungo il percorso. Pertanto, essendo $Y = 70$ m, il salto utile è

$$\Delta H_T = Y - \Delta H_d = 70 - 10 = 60 \text{ m}$$

Conseguentemente, la portata necessaria per generare la potenza richiesta è

$$Q = \frac{P_F}{\rho g \Delta H_T} = \frac{P_E}{\eta_{TA} \rho g \Delta H_T} = \frac{100\,000}{0,83 \times 1000 \times 9,81 \times 60} = 0,205 \text{ m}^3/\text{s}$$

Discussione Considerando le perdite di carico nelle tubazioni, per generare la stessa potenza elettrica, a parità di salto disponibile, è necessaria una portata maggiore.



5.60 Si deve assicurare un ricambio d'aria ogni 10 minuti di una stanza da bagno di $2 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 3 \text{ m}$, facendo in modo che, per minimizzare vibrazioni e rumori, la velocità dell'aria non superi gli 8 m/s . Essendo la densità dell'aria di $1,25 \text{ kg/m}^3$ e il rendimento del gruppo ventola-motore pari al 50% , calcolare la potenza della ventola e il diametro del suo alloggiamento.

Analisi Essendo W il volume della stanza e Δt il tempo in cui deve avvenire il ricambio d'aria, la portata d'aria deve essere

$$Q = \frac{W}{\Delta t} = \frac{2 \times 3 \times 3}{10 \times 60} = 0,030 \text{ m}^3/\text{s}$$

Per la 5.108, essendo ΔH_P la prevalenza della ventola, il bilancio dell'energia tra un punto 1 a monte della ventola e un punto 2 a valle di essa, trascurando le perdite di carico tra i due punti, fornisce

$$\Delta H_P + \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) = \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right)$$

Trattandosi di un fluido di piccolo peso specifico le differenze di pressione dovute alle differenze di quota sono trascurabili. Se, inoltre, il punto 1 è sufficientemente lontano da poter considerare trascurabile la sua velocità e pari alla pressione atmosferica la sua pressione, essendo la pressione pari alla pressione atmosferica anche nel punto 2, la prevalenza è

$$\Delta H_P = \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) = \frac{V_2^2}{2g}$$

Pertanto, essendo ρ la densità dell'aria, la potenza P_F che la ventola deve cedere all'aria è

$$P_F = \rho g Q \Delta H_P = \rho Q \frac{V_2^2}{2}$$

Essendo $\eta_{PM} = 0,50$ il rendimento del gruppo ventola-motore e $V_2 = 8 \text{ m/s}$, la potenza elettrica P_E assorbita dalla ventola, per la 5.35, è

$$P_E = \frac{P_F}{\eta_{PM}} = \frac{\rho Q}{\eta_{PM}} \frac{V_2^2}{2} = \frac{1,25 \times 0,03}{0,50} \times \frac{8^2}{2} = 2,40 \text{ W}$$

Il diametro D dell'alloggiamento della ventola, essendo $V = Q/A = V_2 = 8 \text{ m/s}$, risulta

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V}} = \sqrt{\frac{4 \times 0,03}{\pi \times 8}} = 0,069 \text{ m}$$

5.61 Un impianto di sollevamento convoglia una portata di 25 l/s da un lago a un serbatoio la cui superficie libera è più in alto di 25 m . Essendo la potenza della pompa di 10 kW , calcolare il rendimento meccanico della pompa nell'ipotesi che le perdite di carico siano complessivamente pari a 7 m .

Analisi Essendo P_F la potenza che il fluido riceve dalla pompa e P_P la potenza che la pompa riceve dal motore, il rendimento meccanico η_P della pompa è definito dalla 5.31

$$\eta_P = \frac{P_F}{P_P}$$

Essendo $\rho = 1\,000\text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua e Q la portata, la potenza P_F è pari al prodotto della prevalenza totale ΔH_P per la portata in peso $\rho g Q$. La prevalenza totale è pari alla somma della prevalenza geodetica Y (differenza tra le quote delle superfici libere dei serbatoi di scarico e di alimentazione) e delle perdite di carico $\Delta H_d = 7\text{ m}$ lungo il percorso. Pertanto, il rendimento della pompa è

$$\eta_P = \frac{P_F}{P_P} = \frac{\rho g Q (Y + \Delta H_d)}{P_P} = \frac{1\,000 \times 9,81 \times 0,025 \times (25 + 7)}{10\,000} = 0,785$$

5.62 Un impianto di sollevamento convoglia acqua tra due serbatoi tra le cui superfici libere esiste un dislivello di 15 m. Essendo la potenza della pompa di 5 kW e il rendimento meccanico dell'82%, calcolare la massima portata sollevabile.

Analisi Essendo $\eta_P = 0,82$ il rendimento meccanico della pompa e $P_P = 5\text{ kW}$ la potenza che la pompa riceve dal motore, per la 5.31 la potenza P_F che la pompa cede al fluido è

$$P_F = \eta_P P_P$$

Essendo $\rho = 1\,000\text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua e Q la portata, la potenza P_F è pari al prodotto della prevalenza totale ΔH_P per la portata in peso $\rho g Q$. La prevalenza totale è pari alla somma della prevalenza geodetica Y (differenza tra le quote delle superfici libere dei serbatoi di scarico e di alimentazione) e delle perdite di carico ΔH_d lungo il percorso. La massima portata sollevabile si ha se le perdite di carico sono nulle. In tal caso, $\Delta H_P = Y = 15\text{ m}$, per cui la portata è

$$Q = \frac{P_F}{\rho g \Delta H_P} = \frac{\eta_P P_P}{\rho g Y} = \frac{0,82 \times 5\,000}{1\,000 \times 9,81 \times 15} = 0,0279\text{ m}^3/\text{s}$$

Discussione Per effetto delle perdite di carico di cui il calcolo non tiene conto, la portata effettiva risulterà minore di quella calcolata.

5.63 In una tubazione orizzontale del diametro di 150 mm, che convoglia acqua con una portata di $0,035\text{ m}^3/\text{s}$, è inserito un convergente che riduce il diametro della tubazione a 100 mm. Nelle sezioni di estremità del convergente la pressione in corrispondenza del centro vale, rispettivamente, 470 kPa e 460 kPa. Calcolare la perdita di carico nel convergente.

Analisi Tra la sezione 1, di diametro $D_1 = 150\text{ mm}$, e la sezione 2, di diametro $D_2 = 100\text{ mm}$, poste alle estremità del convergente, per il teorema di Bernoulli, essendo ΔH_d la perdita di carico tra le due sezioni, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_d$$

da cui, essendo $\rho = 1\,000\text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, A_1 e A_2 le aree delle due sezioni, e

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\pi D_1^2/4} = \frac{0,035}{\pi \times 0,150^2/4} = 1,98\text{ m/s}$$

e

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{\pi D_2^2/4} = \frac{0,035}{\pi \times 0,100^2/4} = 4,46 \text{ m/s}$$

le rispettive velocità medie, si ha

$$\begin{aligned} \Delta H_d &= \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = \\ &= \frac{(470 - 460) \times 10^3}{1000 \times 9,81} + \frac{1,98^2 - 4,46^2}{2 \times 9,81} = 0,206 \text{ m} \end{aligned}$$

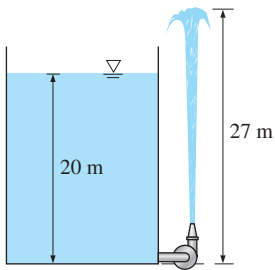
5.64 Il salto utile di una turbina alimentata con una portata di $1,25 \text{ m}^3/\text{s}$ è di 85 m. Essendo il rendimento del gruppo turbina-alternatore pari al 78%, calcolare la potenza ai morsetti dell'alternatore.

Analisi Essendo η_{TA} il rendimento del gruppo turbina-alternatore e P_F la potenza che il fluido cede alla turbina, per la 5.34 la potenza P_E ai morsetti dell'alternatore accoppiato alla turbina è

$$P_E = \eta_{TA} P_F$$

Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, ΔH_T il salto utile e Q la portata, la potenza che il fluido cede alla turbina è data dal prodotto del salto utile per la portata in peso $\rho g Q$. Pertanto, si ha

$$P_E = \eta_{TA} \rho g Q \Delta H_T = 0,78 \times 1000 \times 9,81 \times 1,25 \times 85 = 813 \text{ kW}$$



5.65 Da un serbatoio, pieno d'acqua per un'altezza di 20 m, fuoriesce un tubo con lo sbocco diretto verso l'alto, nel quale è inserita una pompa. Calcolare la minima pressione che deve fornire la pompa perché il getto raggiunga un'altezza di 27 m.

Analisi Per la 5.108, essendo ΔH_P la prevalenza della pompa, il bilancio dell'energia tra un punto all'interno del serbatoio, il cui carico è pari alla quota z_s della superficie libera rispetto ad un generico piano di riferimento e il punto più alto 2 raggiunto dal getto, che ha pressione relativa nulla perché è in atmosfera e velocità nulla, trascurando le perdite di carico tra i due punti, fornisce

$$\Delta H_P + z_s = z_2$$

per cui

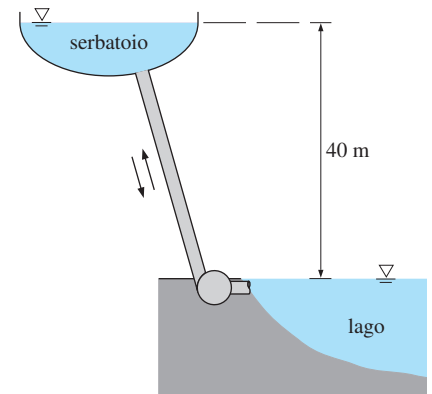
$$\Delta H_P = z_2 - z_s = 27 - 20 = 7 \text{ m}$$

che, essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, corrisponde ad una differenza di pressione

$$\Delta p = \rho g \Delta H_P = 1000 \times 9,81 \times 7 = 68,7 \text{ kPa}$$

Discussione Per effetto delle perdite di carico di cui il calcolo non tiene conto, la pompa dovrà fornire un incremento di pressione maggiore di quello calcolato.

5.66 La domanda di energia elettrica è normalmente molto più alta di giorno che di notte, per cui l'energia prodotta nelle ore notturne dalle centrali termoelettriche, che hanno il massimo rendimento in regime di produzione costante, viene spesso venduta a prezzo ridotto. D'altra parte, per evitare la costruzione di nuovi costosi impianti, le aziende elettriche a volte, nelle ore di picco, acquistano energia da privati. Si ipotizzi, pertanto, che un'azienda elettrica che vende l'energia che produce nelle ore notturne a 0,03 €/kWh sia disposta a comprarla a 0,08 €/kWh nelle ore di picco. Un imprenditore pensa allora di costruire un *impianto di produzione e pompaggio*, consistente schematicamente in un grande serbatoio sovrastante un lago, collegato al lago da una condotta in cui è inserita una pompa-turbina. Durante il giorno l'impianto produce energia perché l'acqua defluisce dal serbatoio verso il lago e, quindi, la macchina funziona da turbina, mentre nelle ore notturne funziona da pompa riportando nel serbatoio alto l'acqua del lago. Essendo il dislivello tra le superfici libere dei due serbatoi di 40 m, da alcune analisi preliminari è emerso che è possibile far defluire una portata di 2 m³/s in entrambe le direzioni con una perdita di carico di 4 m. Ipotizzando un rendimento complessivo del 75% sia per il gruppo pompa-motore che per il gruppo turbina-alternatore e supponendo che ogni giorno l'impianto funzioni per 10 ore come impianto di pompaggio e per altre 10 ore come impianto di produzione, calcolare il reddito potenziale che si può ricavare in un anno.



Analisi Per la 5.108, essendo ΔH_P la prevalenza della pompa, ΔH_T il salto utile della turbina, ΔH_d le perdite di carico nelle tubazioni e Y il dislivello tra le superfici libere dei due serbatoi, si ha, rispettivamente, in fase di produzione e di pompaggio

$$\Delta H_T = Y - \Delta H_d = 40 - 4 = 36 \text{ m}$$

$$\Delta H_P = Y + \Delta H_d = 40 + 4 = 44 \text{ m}$$

per cui le rispettive potenze, essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, η_{TA} e η_{PM} i rendimenti dei gruppi turbina-alternatore e pompa-motore e Q la portata, risultano

$$P_{ET} = \eta_{TA} P_{FT} = \eta_{TA} \rho g Q \Delta H_T = 0,75 \times 1000 \times 9,81 \times 2 \times 36 = 530 \text{ kW}$$

$$P_{EP} = \frac{P_{FP}}{\eta_{TA}} = \frac{\rho g Q \Delta H_P}{\eta_{TA}} = \frac{1000 \times 9,81 \times 2 \times 44}{0,75} = 1151 \text{ kW}$$

Essendo $r_{kW} = 0,08 \text{ €/kWh}$ il ricavo per chilowattora prodotto, il ricavo annuo dell'energia prodotta risulta

$$R_T = P_{ET} r_{kW} \Delta t = 530 \times 0,08 \times 10 \times 365 = 154760 \text{ €}$$

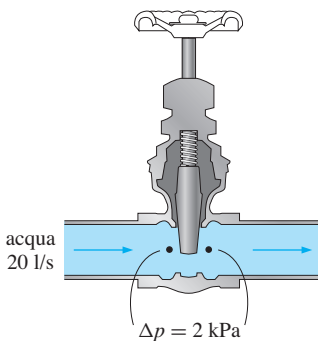
mentre, essendo $c_{kW} = 0,03 \text{ €/kWh}$ il costo unitario del chilowattora consumato per il pompaggio, il costo annuo sostenuto per mantenere l'impianto in modalità di pompaggio risulta

$$C_P = P_{EP} c_{kW} \Delta t = 1151 \times 0,03 \times 10 \times 365 = 126035 \text{ €}$$

con un guadagno per anno, quindi, pari a

$$R_T - C_P = 154760 - 126035 = 28725 \text{ €}$$

Discussione L'analisi effettuata prescinde da altre considerazioni economiche di cui è invece importante tener conto, quali ad esempio il costo iniziale dell'impianto, i costi di gestione e manutenzione, i tassi di interesse e la durata del contratto.



5.67 In una tubazione orizzontale del diametro di 30 mm, che convoglia acqua con una portata di 20 l/s, è inserita una valvola che causa una caduta di pressione di 2 kPa. Calcolare la perdita di carico attraverso la valvola e la potenza che una pompa deve fornire per compensare il salto di pressione.

Analisi Per la 5.108, tra una sezione 1 subito a monte della valvola e una sezione 2 subito a valle, essendo ΔH_d la perdita di carico tra le due sezioni, si ha

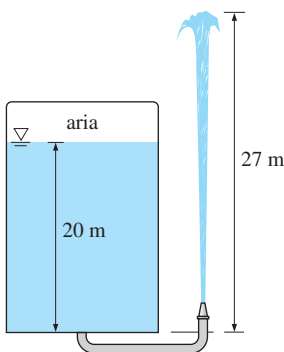
$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + \Delta H_d$$

Essendo i diametri delle due sezioni e, quindi, le loro velocità medie uguali, nulla o trascurabile la differenza di quota e $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, la perdita di carico risulta

$$\Delta H_d = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{2000}{1000 \times 9,81} = 0,204 \text{ m}$$

Moltiplicando la perdita di carico per la portata in peso $\rho g Q$, si ottiene la corrispondente potenza dissipata

$$P_d = \rho g Q \Delta H_d = 1000 \times 9,81 \times 0,020 \times 0,204 = 40,0 \text{ W}$$



5.68 Da un serbatoio in pressione, contenente acqua per un'altezza di 20 m e, superiormente, aria in pressione, fuoriesce un tubo con lo sbocco diretto verso l'alto. Calcolare il valore minimo della pressione dell'aria affinché il getto che fuoriesce dal tubo raggiunga l'altezza di 27 m rispetto al fondo del serbatoio.

Analisi Nelle ipotesi di moto permanente e di fluido incompressibile, tra un punto 1 del liquido all'interno del serbatoio, il cui carico è pari a quello di un punto della superficie libera, avente quota z_s rispetto ad un generico piano di riferimento e pressione relativa p , e il punto più alto 2 raggiunto dal getto, che ha pressione relativa nulla perché è in atmosfera e velocità nulla, trascurando le perdite di carico lungo il percorso, per il teorema di Bernoulli si ha

$$z_s + \frac{p}{\rho g} = z_2$$

da cui, assumendo come piano di riferimento il fondo del serbatoio ed essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, risulta che perché il getto raggiunga l'altezza $h = 27 \text{ m}$ rispetto al fondo del serbatoio, l'aria all'interno del serbatoio deve avere una pressione relativa minima

$$p = \rho g(z_2 - z_s) = 1000 \times 9,81 \times (27 - 20) = 68700 \text{ Pa} = 68,7 \text{ kPa}$$

Discussione Per effetto delle perdite di carico di cui il calcolo non tiene conto, la pressione necessaria affinché il getto raggiunga l'altezza assegnata risulterà maggiore.

5.69 Sul fondo di un serbatoio, contenente acqua per un'altezza di 2 m, è praticata una luce circolare, dalla quale fuoriesce un getto libero in atmosfera. Calcolare la velocità iniziale del getto in corrispondenza di una sezione, del diametro di 80 mm, poco a valle della luce.

Analisi Le varie particelle, partendo dalla quiete, convergono tutte verso la luce, in corrispondenza della quale le traiettorie assumono curvatura crescente dall'asse, dove è nulla per simmetria, verso il contorno, dove è massima. In particolare, la generica particella che lambisce il fondo orizzontale del serbatoio, dovendo assumere la direzione verticale, è costretta a deviare di 90° . Pertanto, nella sezione della luce non è facilmente determinabile la distribuzione della pressione, di cui si può tuttavia dire che è nulla al contorno, dove le particelle sono a contatto con l'atmosfera, e, per simmetria, massima sull'asse. Quindi, nell'applicare il teorema di Bernoulli, è necessario considerare non la sezione della luce, ma la prima sezione a valle di essa dove le traiettorie assumono tutte la stessa direzione. In tale sezione, chiamata *sezione contratta* perché di dimensioni inferiori a quelle della luce, la corrente, essendo i filetti fluidi rettilinei e paralleli, è lineare e, pertanto, la quota piezometrica è la stessa per tutti i punti della sezione. In particolare, nel caso in esame, essendo la sezione orizzontale, tutti i punti hanno la stessa quota e, quindi, anche la stessa pressione. Poiché al contorno la pressione relativa è nulla, in quanto uguale a quella atmosferica, tutti i punti della sezione sono a pressione relativa nulla. Pertanto, applicando il teorema di Bernoulli tra un punto 1 all'interno del serbatoio dove il carico è pari alla quota z_s della superficie libera rispetto ad un generico piano di riferimento e un punto 2 nella sezione contratta a quota z_c , si ha

$$z_s = z_c + \frac{v_c^2}{2g}$$

da cui

$$v_c = \sqrt{2g(z_s - z_c)}$$

Essendo tutti i punti della sezione alla stessa quota, essi hanno tutti la stessa velocità. Indicando con h l'affondamento della luce al di sotto della superficie libera (chiamato *carico* sulla luce), se la distanza δ tra il piano della luce e la sezione contratta (pari a circa la metà del diametro della luce) è trascurabile rispetto ad h , si può porre

$$z_s - z_c \cong h$$

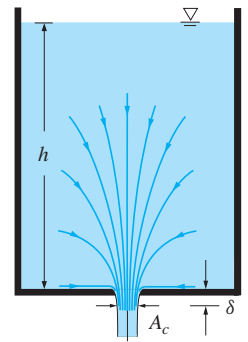
Pertanto, la velocità media iniziale V_c nella sezione contratta risulta

$$V_c = v_c \cong \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 2} = 6,26 \text{ m/s}$$

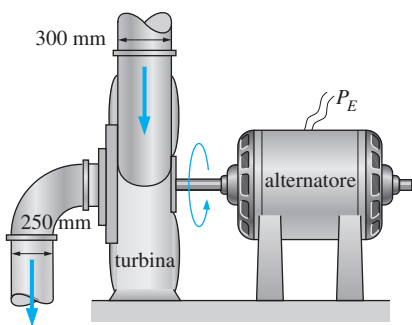
Tale velocità è detta *velocità torricelliana*. Conseguentemente, essendo $D = 80 \text{ mm}$ il diametro della sezione contratta, la portata iniziale effluente dalla luce è

$$Q = V_c A_c = V_c \frac{\pi D^2}{4} = 6,26 \times \frac{\pi \times 0,080^2}{4} = 0,0315 \text{ m}^3/\text{s} = 31,5 \text{ l/s}$$

Discussione La velocità torricelliana, ottenuta trascurando la distanza δ tra il fondo del serbatoio e la sezione contratta, è minore di quella teorica risultante dall'applicazione del teorema di Bernoulli. Poiché, però, il teorema di Bernoulli non tiene conto delle perdite di carico tra serbatoio e sezione contratta, la velocità di efflusso è in effetti minore di quella teorica. Quindi, l'approssimazione commessa nel trascurare δ compensa, in parte, quella dovuta al non tener conto delle perdite di carico. Per cui, la velocità torricelliana differisce da quella effettiva di appena qualche per cento.



5.70 Tra le sezioni di ingresso e di uscita di una turbina, alimentata da una portata di $0,6 \text{ m}^3/\text{s}$, aventi, rispettivamente, diametro di 300 mm e di 250 mm ,



un manometro differenziale a mercurio misura un dislivello tra i menischi di 1,2 m. Essendo il rendimento del gruppo turbina-alternatore dell'83%, calcolare la potenza elettrica prodotta.

Analisi Essendo $\eta_{TA} = 0,83$ il rendimento del gruppo turbina-alternatore e P_F la potenza che il fluido cede alla turbina, per la 5.34, la potenza elettrica prodotta è

$$P_E = \eta_{TA} P_F$$

Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua e Q la portata, la potenza P_F che il fluido cede alla turbina è data dal prodotto del salto utile ΔH_T per la portata in peso $\rho g Q$. Il salto utile è la differenza dei carichi totali della corrente nella sezione m subito a monte della turbina e nella sezione v subito a valle. Per cui, essendo Δh la differenza tra le quote piezometriche e ponendo il coefficiente di ragguglio $\alpha = 1$, si ha

$$\Delta H_T = \left(z_m + \frac{p_m}{\rho g} + \frac{V_m^2}{2g} \right) - \left(z_v + \frac{p_v}{\rho g} + \frac{V_v^2}{2g} \right) = \Delta h + \frac{V_m^2 - V_v^2}{2g}$$

La differenza di quota piezometrica tra le due sezioni è misurata dal manometro differenziale a mercurio. Essendo $\rho_m = 13600 \text{ kg/m}^3$ la densità del mercurio e $\Delta = 1,2 \text{ m}$ la lettura manometrica, si ha

$$\Delta h = \Delta \frac{\rho_m - \rho}{\rho} = 1,2 \times \frac{13600 - 1000}{1000} = 15,1 \text{ m}$$

La differenza fra le altezze cinetiche, essendo $D_m = 0,300 \text{ m}$ e $D_v = 0,250 \text{ m}$ i diametri delle due sezioni e

$$V_m = \frac{Q}{\pi D_m^2/4} = \frac{0,6}{\pi \times 0,300^2/4} = 8,49 \text{ m/s}$$

e

$$V_v = \frac{Q}{\pi D_v^2/4} = \frac{0,6}{\pi \times 0,250^2/4} = 12,2 \text{ m/s}$$

le rispettive velocità, risulta

$$\frac{V_m^2 - V_v^2}{2g} = \frac{8,49^2 - 12,2^2}{2 \times 9,81} = -3,94 \text{ m}$$

Per cui, il salto utile e la potenza elettrica sono, rispettivamente,

$$\Delta H_T = \Delta h + \frac{V_m^2 - V_v^2}{2g} = 15,1 - 3,94 = 11,2 \text{ m}$$

$$P_E = \eta_{TA} \rho g Q \Delta H_T = 0,83 \times 1000 \times 9,81 \times 0,6 \times 11,2 = 54,7 \text{ kW}$$

Discussione Una parte della differenza di quota piezometrica compensa l'aumento di altezza cinetica nella sezione a valle della turbina. A parità di salto piezometrico, l'aumento del diametro di tale sezione, e quindi la diminuzione dell'altezza cinetica di valle, farebbe aumentare il salto utile e, quindi, la potenza. Ad esempio, se i due diametri fossero uguali, essendo $\Delta H_{Tu} = \Delta h = 15,1 \text{ m}$, la potenza sarebbe

$$P_{Eu} = \eta_{TA} \rho g Q \Delta H_{Tu} = 0,83 \times 1000 \times 9,81 \times 0,6 \times 15,1 = 73,8 \text{ kW}$$

con un aumento di quasi 20 kW. Un ulteriore aumento si avrebbe aumentando ancora di più il diametro della sezione a valle della turbina.

5.71 Calcolare il coefficiente di ragguglio della potenza cinetica nella sezione di una tubazione circolare, nella quale il profilo di velocità può essere descritto con la legge di potenza $v(r) = v_{\max}(1 - r/R)^{1/n}$ con esponente $n = 7$.

Analisi Introducendo nella 5.111 la legge assegnata, si ha

$$\alpha = \frac{\int_A v^3 dA}{V^3 A} = \frac{v_{\max}^3}{V^3 A} \int_A \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{3/n} dA$$

ed essendo $A = \pi R^2$ e $dA = 2\pi r dr$

$$\alpha = \frac{v_{\max}^3}{V^3 \pi R^2} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{3/n} 2\pi r dr = \frac{2v_{\max}^3}{V^3 R^2} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{3/n} r dr$$

Esprimendo la velocità media con la 5.6, si ha

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{A} \int_A v dA = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v_{\max} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} 2\pi r dr = \\ &= \frac{2v_{\max}}{R^2} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} r dr \end{aligned}$$

Essendo

$$\int (a + bx)^n x dx = \frac{(a + bx)^{n+2}}{b^2(n+2)} - \frac{a(a + bx)^{n+1}}{b^2(n+1)}$$

risulta

$$\begin{aligned} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} r dr &= \left[\frac{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n+2}}{\frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{n} + 2\right)} - \frac{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n+1}}{\frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{n} + 1\right)} \right]_0^R = \\ &= \frac{n^2 R^2}{(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{3/n} r dr &= \left[\frac{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{3/n+2}}{\frac{1}{R^2} \left(\frac{3}{n} + 2\right)} - \frac{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{3/n+1}}{\frac{1}{R^2} \left(\frac{3}{n} + 1\right)} \right]_0^R = \\ &= \frac{n^2 R^2}{(n+3)(2n+3)} \end{aligned}$$

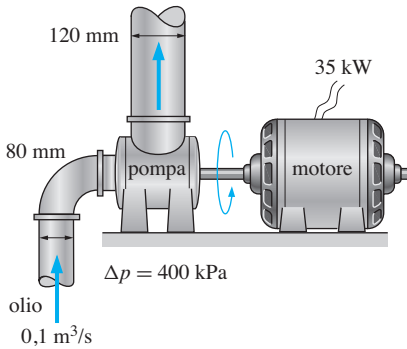
Sostituendo nelle espressioni di V e di α , per $n = 7$ si ottiene

$$\begin{aligned} V &= \frac{2v_{\max}}{R^2} \frac{n^2 R^2}{(n+1)(2n+1)} = \frac{2n^2 v_{\max}}{(n+1)(2n+1)} = \\ &= \frac{2 \times 7^2}{(7+1) \times (2 \times 7 + 1)} v_{\max} = 0,817 v_{\max} \end{aligned}$$

e

$$\alpha = \frac{2v_{\max}^3}{R^2} \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2 v_{\max}} \right]^3 \frac{n^2 R^2}{(n+3)(2n+3)} =$$

$$= \frac{(n+1)^3 (2n+1)^3}{4n^4 (n+3)(2n+3)} = \frac{(7+1)^3 (2 \times 7+1)^3}{4 \times 7^4 \times (7+3) \times (2 \times 7+3)} = 1,06$$



5.72 Una pompa assorbe una potenza di 35 kW quando è attraversata da una portata di 0,1 m³/s di olio di densità 860 kg/m³. Tra le sezioni di uscita e di ingresso della pompa, aventi, rispettivamente, diametro di 120 mm e di 80 mm, si stabilisce una differenza di pressione di 400 kPa. Essendo il rendimento del motore del 90%, calcolare il rendimento meccanico della pompa.

Analisi Essendo $\eta_M = 0,90$ il rendimento del motore e P_E la potenza elettrica assorbita, la potenza P_P che il motore cede alla pompa, per la 5.33 è

$$P_P = \eta_M P_E$$

La potenza P_F che la pompa cede al fluido, essendo η_P il rendimento della pompa, per la 5.31 è

$$P_F = \eta_P P_P$$

Essendo $\rho = 860 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'olio e Q la portata, la potenza P_F che il fluido riceve dalla pompa è data dal prodotto della prevalenza totale ΔH_P per la portata in peso $\rho g Q$. La prevalenza totale è la differenza dei carichi totali della corrente nella sezione v subito a valle della pompa e nella sezione m subito a monte. Per cui, essendo Δh la differenza tra le quote piezometriche, si ha

$$\Delta H_P = \left(z_v + \frac{p_v}{\rho g} + \frac{\alpha_v V_v^2}{2g} \right) - \left(z_m + \frac{p_m}{\rho g} + \frac{\alpha_m V_m^2}{2g} \right) =$$

$$= \Delta h + \frac{\alpha_v V_v^2 - \alpha_m V_m^2}{2g}$$

La differenza di quota piezometrica tra le due sezioni, trascurando la differenza di quota, è

$$\Delta h = \frac{p_v - p_m}{\rho g} = \frac{400\,000}{860 \times 9,81} = 47,4 \text{ m}$$

La differenza fra le altezze cinetiche, essendo $D_v = 0,120 \text{ m}$ e $D_m = 0,080 \text{ m}$ i diametri delle due sezioni è

$$V_v = \frac{Q}{\pi D_v^2/4} = \frac{0,1}{\pi \times 0,120^2/4} = 8,84 \text{ m/s}$$

e

$$V_m = \frac{Q}{\pi D_m^2/4} = \frac{0,1}{\pi \times 0,080^2/4} = 19,9 \text{ m/s}$$

le rispettive velocità, ponendo $\alpha_v = \alpha_m = 1,05$, risulta

$$\frac{\alpha_m V_m^2 - \alpha_v V_v^2}{2g} = 1,05 \times \frac{8,84^2 - 19,9^2}{2 \times 9,81} = -17,0 \text{ m}$$

Pertanto, il salto utile risulta

$$\Delta H_P = \Delta h + \frac{\alpha_v V_v^2 - \alpha_m V_m^2}{2g} = 47,4 - 17,0 = 30,4 \text{ m}$$

e, quindi, il rendimento meccanico della pompa è

$$\eta_P = \frac{P_F}{P_P} = \frac{\rho g Q \Delta H_P}{\eta_M P_E} = \frac{860 \times 9,81 \times 0,1 \times 30,4}{0,9 \times 35\,000} = 0,81$$

5.73 Un impianto di sollevamento, costituito da una tubazione di diametro costante e una pompa della potenza di 9 kW, convoglia una portata di 35 l/s da un lago a una vicina piscina, la cui superficie libera si trova 10 m al di sopra della superficie del lago. Essendo il rendimento della pompa del 70%, calcolare la perdita di carico nell'impianto e la potenza dissipata.

Analisi Essendo $P_P = 9 \text{ kW}$ la potenza della pompa ed $\eta_P = 0,70$ il suo rendimento, la potenza P_F che la pompa cede al fluido, per la 5.31, è

$$P_F = \eta_P P_P = 0,7 \times 9 = 6,3 \text{ kW}$$

Essendo $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua e Q la portata, la potenza P_F è pari al prodotto della prevalenza totale ΔH_P per la portata in peso $\rho g Q$. La prevalenza totale è pari alla somma della prevalenza geodetica Y (differenza tra le quote delle superfici libere dei serbatoi di scarico e di alimentazione) e delle perdite di carico ΔH_d lungo il percorso. Per cui, essendo la prevalenza

$$\Delta H_P = \frac{P_F}{\rho g Q} = Y + \Delta H_d$$

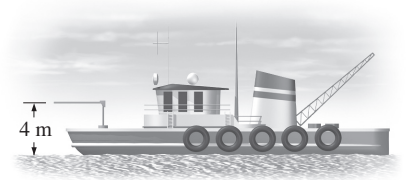
la perdita di carico risulta

$$\Delta H_d = \Delta H_P - Y = \frac{P_F}{\rho g Q} - Y = \frac{6\,300}{1\,000 \times 9,81 \times 0,035} - 10 = 8,35 \text{ m}$$

alla quale corrisponde una potenza dissipata

$$P_d = \rho g Q \Delta H_d = 1\,000 \times 9,81 \times 0,035 \times 8,35 = 2\,870 \text{ W}$$

5.74 Un battello antincendio è dotato di un impianto di sollevamento dell'acqua di mare, di densità $1\,030 \text{ kg/m}^3$, costituito da una tubazione del diametro di 200 mm che termina con un ugello, la cui sezione di sbocco ha un diametro di 50 mm, posto a un'altezza di 4 m al di sopra del livello del mare. Calcolare la velocità allo sbocco e la potenza della pompa per la portata di $0,05 \text{ m}^3/\text{s}$, ipotizzando un rendimento del 70% e una perdita di carico complessiva di 3 m.



Analisi Essendo ρ la densità dell'acqua di mare e Q la portata, la potenza P_F che il liquido riceve dalla pompa è pari al prodotto della prevalenza totale ΔH_P per la portata in peso $\rho g Q$. Per la 5.108, tra il mare, in cui il carico è pari alla quota z_m della superficie libera, e la sezione di sbocco u dell'ugello, in cui la pressione relativa è nulla, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$\Delta H_P + z_m = z_u + \frac{V_u^2}{2g} + \Delta H_d$$

da cui, essendo

$$V_u = \frac{Q_u}{\pi D_u^2/4} = \frac{0,05}{\pi \times 0,050^2/4} = 25,5 \text{ m/s}$$

si ha

$$\Delta H_P = z_u - z_m + \frac{V_u^2}{2g} + \Delta H_d = 4 + \frac{25,5^2}{2 \times 9,81} + 3 = 40,1 \text{ m}$$

e

$$P_P = \frac{\rho g Q \Delta H_P}{\eta_P} = \frac{1030 \times 9,81 \times 0,05 \times 40,1}{0,70} = 28,9$$

Discussione In questo caso, la pompa fornisce al fluido soprattutto energia cinetica.

Riepilogo

5.75 In un ugello, la cui sezione di ingresso ha area doppia di quella della sezione di uscita, defluisce aria di densità $4,18 \text{ kg/m}^3$ con una velocità media di 120 m/s in ingresso e di 380 m/s in uscita. Calcolare la densità dell'aria nella sezione di uscita.

Analisi Per la continuità, la portata di massa nella sezione 1 di ingresso deve essere uguale a quella nella sezione 2 di uscita, per cui

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

da cui

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{A_1}{A_2} \frac{V_1}{V_2} = 4,18 \times 2 \times \frac{120}{380} = 2,64 \text{ kg/m}^3$$

Discussione Nonostante le dimensioni della sezione di uscita diminuiscano, la densità dell'aria diminuisce anch'essa considerevolmente.

5.76 In una stanza d'ospedale di $6 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ l'aria deve essere completamente sostituita con aria fresca condizionata ogni 20 minuti. Calcolare il valore minimo del diametro della tubazione che alimenta la stanza in modo che la velocità dell'aria sia inferiore a 5 m/s .

Analisi Essendo W il volume della stanza e Δt il tempo in cui deve avvenire il ricambio d'aria, la portata d'aria Q deve essere

$$Q = \frac{W}{\Delta t} = \frac{6 \times 5 \times 4}{20 \times 60} = 0,1 \text{ m}^3/\text{s}$$

Essendo A l'area del condotto di diametro d e V la velocità media nella sezione, si ha

$$Q = AV = \frac{\pi d^2}{4} V$$

da cui, per $V = 5 \text{ m/s}$,

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V}} = \sqrt{\frac{4 \times 0,1}{\pi \times 5}} = 0,160 \text{ m}$$

5.77 Un serbatoio di $3 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ viene alimentato da una falda sotterranea. Contemporaneamente, viene svuotato attraverso una tubazione del diametro di 5 cm. Calcolare la portata di alimentazione, sapendo che, quando la velocità media nella tubazione di scarico è di 5 m/s, il livello della superficie libera aumenta di 1,5 cm/min.

Ipotesi L'alimentazione e lo svuotamento avvengono in condizioni di moto permanente.

Analisi Per la continuità, la differenza tra massa entrante Q_{me} e massa uscente Q_{mu} nell'unità di tempo è uguale alla variazione nell'unità di tempo della massa m_W contenuta nel serbatoio. Per cui, secondo la 5.11,

$$Q_{me} - Q_{mu} = \frac{dm_W}{dt}$$

Essendo l'acqua un fluido a densità costante, la relazione precedente vale anche con riferimento ai volumi. Pertanto, la differenza tra volume entrante Q_e e volume uscente Q_u nell'unità di tempo è uguale alla variazione nell'unità di tempo del volume di liquido W contenuto nel serbatoio. Cioè,

$$Q_e - Q_u = \frac{dW}{dt}$$

La portata uscente, essendo $V_u = 5 \text{ m/s}$ la velocità media nel tubo di scarico, di diametro $D_u = 0,05 \text{ m}$, risulta

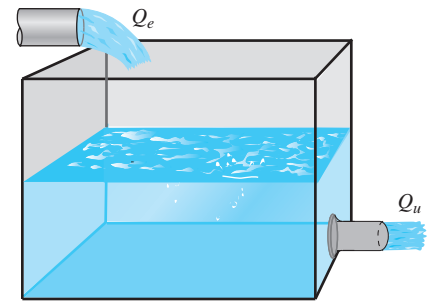
$$Q_u = V_u \frac{\pi D_u^2}{4} = 5 \times \frac{\pi \times 0,05^2}{4} = 0,00982 \text{ m}^3/\text{s}$$

Il livello liquido del serbatoio, di sezione trasversale di area A , aumenta con velocità $V_r = 1,5 \text{ cm/min}$, per cui la variazione del volume W nell'unità di tempo è

$$\frac{dW}{dt} = AV_r = 3 \times 4 \times 0,015 \times \frac{1}{60} = 0,0030 \text{ m}^3/\text{s}$$

Conseguentemente,

$$Q_e = Q_u + \frac{dW}{dt} = 0,00982 + 0,0030 = 0,0128 \text{ m}^3/\text{s}$$

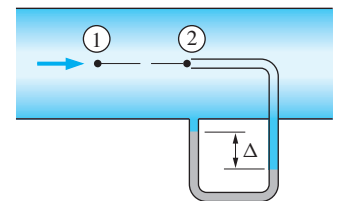


5.78 Un tubo di Pitot è inserito in corrispondenza dell'asse di una tubazione che convoglia aria a 45°C e alla pressione di 98 kPa. Calcolare (a) la velocità dell'aria e (b) l'aumento di pressione in corrispondenza della presa dinamica, quando l'indicazione del manometro differenziale ad acqua collegato alle prese del tubo di Pitot è di 2,4 cm.

Ipotesi L'aria si comporta come un gas perfetto.

Proprietà Per l'aria, la costante dell'equazione di stato dei gas perfetti è $R = 0,287 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Analisi (a) Si consideri un punto 1 sulla traiettoria che contiene anche il punto di ristagno 2 sulla presa dinamica del tubo di Pitot, a distanza tale dalla presa dinamica da potere considerare le sue condizioni non influenzate dalla presenza



della presa stessa. Applicando il teorema di Bernoulli tra il punto 1 e il punto 2, si ha

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho_g g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho_g g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

in cui ρ_g è la densità del fluido, da cui, essendo $v_2 = 0$ e $z_1 = z_2$,

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho_g}}$$

(b) La differenza di pressione tra i due punti è misurata dal manometro differenziale ed è pari al peso della colonna di liquido di altezza Δ (differenza di livello tra i due menischi). Pertanto, essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, si ha

$$p_2 - p_1 = \rho g \Delta = 1000 \times 9,81 \times 0,024 = 235 \text{ Pa}$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti 2.4, essendo il volume specifico w pari all'inverso della densità, si ha

$$\rho_g = \frac{p}{RT} = \frac{98}{0,287 \times (45 + 273)} = 1,074 \text{ kg/m}^3$$

e, sostituendo nell'espressione di v_1 ,

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho_g}} = \sqrt{\frac{2 \times 235}{1,074}} = 20,9 \text{ m/s}$$



5.79 Un uomo riempie un secchio posato a terra con un tubo da giardino il cui sbocco è all'altezza dei suoi fianchi. Se abbassasse lo sbocco del tubo fino all'altezza del ginocchio, il tempo necessario per riempire il secchio diminuirebbe? Perché?

Analisi La portata effluente dal tubo è funzione del carico H nella sezione di sbocco, che, a sua volta, dipende dal carico a monte. Al variare della quota della sezione di sbocco, si può ritenere che, non variando il carico a monte, il carico nella sezione rimanga costante. Essendo, per la 5.28,

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$$

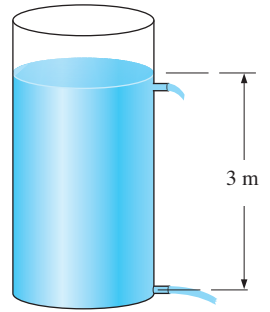
un abbassamento della quota della sezione di sbocco comporta un corrispondente aumento dell'altezza cinetica in quanto $p = p_{\text{atm}}$ è costante. Pertanto, l'abbassamento dello sbocco del tubo dal livello del fianco a quello del ginocchio causa un aumento della portata effluente e, quindi, la diminuzione del tempo necessario per riempire il secchio.

5.80 Un serbatoio pieno di acqua per una altezza di 3 m ha due valvole di scarico, una posta sul fondo e una posta subito al di sotto della superficie libera. C'è differenza tra le velocità di efflusso dalle due valvole? Collegando un tubo

flessibile prima all'una e poi all'altra valvola e mantenendo invariata la quota della sezione di sbocco, la portata rimane uguale o cambia?

Analisi (a) Per la 5.70, la velocità di efflusso è funzione del dislivello tra la superficie libera del serbatoio e la sezione di efflusso. Pertanto, la velocità di efflusso dalla valvola posta sul fondo è maggiore della velocità di efflusso dalla valvola posta subito al di sotto della superficie libera.

(b) Anche la velocità di efflusso dal tubo flessibile dipende dal dislivello tra la superficie libera del serbatoio e la sezione di efflusso, indipendentemente dalla quota di attacco del tubo stesso. Per cui, in ambedue i casi, la portata effluente dal tubo è la stessa.



5.81 Da un contenitore in pressione, del diametro di 2 m, fuoriesce, con imbocco ben raccordato, un breve tronco di tubazione del diametro di 100 mm. Inizialmente, il serbatoio è pieno d'acqua per un'altezza di 3 m sopra la sezione di sbocco e al di sopra della superficie libera c'è aria alla pressione relativa di 350 kPa. Nell'ipotesi che la pressione dell'aria sia mantenuta costante, calcolare il tempo necessario affinché il livello della superficie libera si riduca a 1,5 m e il livello raggiunto dopo 10 secondi.

Analisi Nelle ipotesi di moto permanente e di fluido incompressibile, tra un punto del liquido all'interno del contenitore, il cui carico è pari a quello di un punto della superficie libera, avente quota z_s rispetto ad un generico piano di riferimento e pressione relativa p_r , e la sezione u di sbocco, dove la pressione relativa è nulla perché l'efflusso è in atmosfera, trascurando le perdite di carico lungo il percorso, per il teorema di Bernoulli, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$z_s + \frac{p_r}{\rho g} = z_u + \frac{V_u^2}{2g}$$

Essendo $h = z_s - z_u$ il dislivello tra la superficie libera e la sezione di sbocco, la velocità media allo sbocco risulta

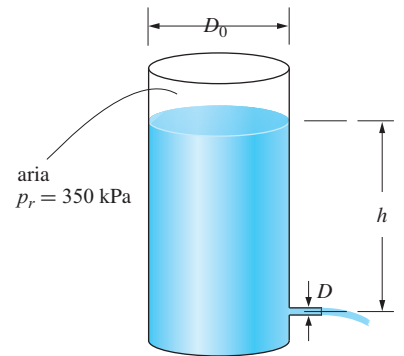
$$V_u = \sqrt{2g \left(z_s + \frac{p_r}{\rho g} - z_u \right)} = \sqrt{2g \left(h + \frac{p_r}{\rho g} \right)}$$

per cui, essendo $D = 100$ mm il diametro del tubo, la portata vale

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V_u = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2g \left(h + \frac{p_r}{\rho g} \right)}$$

Nell'ipotesi che la pressione dell'aria all'interno del contenitore sia mantenuta costante, tale relazione vale, istante per istante, anche durante il processo di svuotamento, in cui il dislivello varia da $h = H$, a contenitore completamente pieno, ad $h = 0$, quando il livello del liquido è alla quota del tubo di scarico. Nel generico intervallo di tempo dt , essendo A l'area trasversale costante del contenitore e D_0 il suo diametro, il volume $dW = Qdt$ che fuoriesce dal contenitore causa una diminuzione dh del livello tale che $Adh = dW$. Pertanto, deve essere

$$dW = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2g \left(h + \frac{p_r}{\rho g} \right)} dt = -\frac{\pi D_0^2}{4} dh$$



da cui

$$dt = -\frac{D_0^2}{D^2} \frac{1}{\sqrt{2g \left(h + \frac{p_r}{\rho g} \right)}} dh = -\frac{D_0^2}{D^2 \sqrt{2g}} \left(h + \frac{p_r}{\rho g} \right)^{-1/2} dh$$

Integrando tra l'istante iniziale $t = 0$ in cui $h = H$ e l'istante generico t in cui il dislivello è h , si ha

$$t = -\frac{D_0^2}{D^2 \sqrt{2g}} \left[\frac{\left(h + \frac{p_r}{\rho g} \right)^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right]_H^h = \frac{D_0^2}{D^2} \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{H + \frac{p_r}{\rho g}} - \sqrt{h + \frac{p_r}{\rho g}} \right)$$

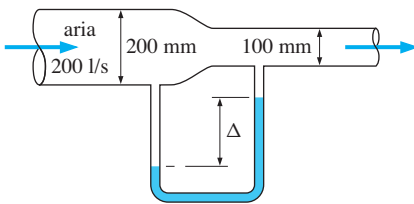
Pertanto, il tempo t_1 necessario perché il dislivello si riduca da $h = H = 3$ m ad $h = 1,5$ m è

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{D_0^2}{D^2} \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{H + \frac{p_r}{\rho g}} - \sqrt{h + \frac{p_r}{\rho g}} \right) = \\ &= \frac{2^2}{0,100^2} \times \sqrt{\frac{2}{9,81}} \times \left(\sqrt{3 + \frac{350\,000}{1\,000 \times 9,81}} - \sqrt{1,5 + \frac{350\,000}{1\,000 \times 9,81}} \right) = \\ &= 22 \text{ s} \end{aligned}$$

Esplicitando rispetto ad h si ottiene il dislivello raggiunto dalla superficie libera all'istante generico. Per $t = 10$ s si ha

$$\begin{aligned} h &= \left(\sqrt{H + \frac{p_r}{\rho g}} - t \frac{D^2}{D_0^2} \sqrt{\frac{g}{2}} \right)^2 - \frac{p_r}{\rho g} = \\ &= \left(\sqrt{3 + \frac{350\,000}{1\,000 \times 9,81}} - 10 \times \frac{0,100^2}{2^2} \times \sqrt{\frac{9,81}{2}} \right)^2 - \frac{350\,000}{1\,000 \times 9,81} = \\ &= 2,31 \text{ m} \end{aligned}$$

Discussione Il tempo di svuotamento è proporzionale al quadrato del diametro della tubazione di sbocco. Pertanto, ad esempio, raddoppiando tale diametro il tempo di svuotamento si riduce ad un quarto.



5.82 I due rami di un manometro differenziale ad acqua sono collegati alle sezioni di estremità di un convergente, aventi, rispettivamente, diametro di 200 mm e di 100 mm, in cui defluisce una portata di 200 l/s di aria, di densità pari a $1,20 \text{ kg/m}^3$. Calcolare il dislivello tra i menischi nei due rami del manometro.

Analisi Applicando il teorema di Bernoulli tra la sezione 1, di diametro $D_1 = 200$ mm, e la sezione 2, di diametro $D_2 = 100$ mm, alle quali sono collegati i due rami del manometro, trascurando la perdita di carico tra le due sezioni e ponendo $\alpha = 1$, essendo trascurabili nei gas le differenze di pressione dovute alle eventuali differenze di quota in quanto fluidi di piccolo peso specifico, si ha

$$\frac{p_1}{\rho_g g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho_g g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

per cui la differenza di pressione Δp tra le due sezioni è

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho_g}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

Poiché i rami del manometro differenziale sono collegati alla corrente tramite due prese statiche, lo strumento misura proprio la differenza di pressione Δp espressa in colonna d'acqua, per cui

$$\Delta p = \rho g \Delta$$

in cui $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ è la densità dell'acqua. Pertanto, essendo

$$V_1 = \frac{Q}{\pi D_1^2/4} = \frac{0,200}{\pi \times 0,200^2/4} = 6,37 \text{ m/s}$$

e

$$V_2 = \frac{Q}{\pi D_2^2/4} = \frac{0,200}{\pi \times 0,100^2/4} = 25,5 \text{ m/s}$$

le velocità medie nelle due sezioni e $\rho_g = 1,20 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'aria, si ha

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{\rho_g}{2\rho g}(V_2^2 - V_1^2) = \\ &= \frac{1,20}{2 \times 1000 \times 9,81} \times (25,5^2 - 6,37^2) = 0,0372 \text{ m} = 3,72 \text{ cm} \end{aligned}$$

5.83 Da un grande serbatoio, contenente aria di densità $1,21 \text{ kg/m}^3$ alla pressione relativa di 2 kPa, fuoriesce, con imbocco ben raccordato, un breve tronco di tubazione del diametro di 20 mm. Calcolare la massima portata defluente dal serbatoio.

Analisi La massima portata defluente dal serbatoio si ha nell'istante iniziale e nell'ipotesi di perdite trascurabili. Trascurando anche le variazioni di pressione dovute alle variazioni di quota, perché l'aria è un fluido di piccolo peso specifico, tra l'aria all'interno del serbatoio, che ha solo il carico corrispondente alla pressione relativa p_r , e la sezione u di sbocco, dove la pressione relativa è nulla perché l'efflusso è in atmosfera, per il teorema di Bernoulli, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$\frac{p_r}{\rho g} = \frac{V_u^2}{2g}$$

da cui

$$V_u = \sqrt{2 \frac{p_r}{\rho}} = \sqrt{2 \times \frac{2000}{1,21}} = 57,5 \text{ m/s}$$

La portata massima, quindi, risulta

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V_u = \frac{\pi \times 0,020^2}{4} \times 57,5 = 0,0181 \text{ m}^3/\text{s}$$

5.84 In una tubazione orizzontale del diametro di 70 mm, nella quale defluisce acqua, è inserito un venturimetro la cui sezione ristretta ha un diametro di

40 mm. Nelle sezioni di estremità del venturimetro vengono misurate, rispettivamente, le pressioni di 430 kPa e di 120 kPa. Calcolare la portata, trascurando le perdite di carico tra le due sezioni.

Analisi Applicando il teorema di Bernoulli tra la sezione 1, di diametro $D_1 = 70$ mm, e la sezione 2, di diametro $D_2 = 40$ mm, nelle quali vengono misurate le pressioni, trascurando la perdita di carico tra le due sezioni e ponendo $\alpha = 1$, essendo $z_1 = z_2$, si ha

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

per cui, essendo, rispettivamente,

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi \times 0,070^2}{4} = 0,00385 \text{ m}^2$$

e

$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi \times 0,040^2}{4} = 0,00126 \text{ m}^2$$

le aree delle due sezioni e $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ la portata, la differenza di pressione tra le due sezioni è

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho Q^2}{2} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)$$

Risolvendo rispetto alla portata, essendo $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, si ha

$$\begin{aligned} Q &= \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} = \\ &= \frac{0,00385 \times 0,00126}{\sqrt{0,00385^2 - 0,00126^2}} \sqrt{\frac{2 \times (430\,000 - 120\,000)}{1\,000}} = 0,0331 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

5.85 Dalla parete di un serbatoio, contenente acqua per un'altezza di 25 m, è derivato un tubo con lo sbocco diretto verso l'alto, nel quale è inserita una pompa, che fornisce un incremento di pressione di 70 kPa. Calcolare la massima altezza raggiungibile dal getto rispetto al fondo.

Analisi Per la 5.108, essendo ΔH_P la prevalenza della pompa, il bilancio dell'energia tra un punto all'interno del serbatoio, il cui carico è pari alla quota z_s della superficie libera rispetto ad un generico piano di riferimento e il punto più alto 2 raggiunto dal getto, che ha pressione relativa nulla perché è in atmosfera e velocità nulla, trascurando le perdite di carico tra i due punti, fornisce

$$\Delta H_P + z_s = z_2$$

Essendo $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, la differenza di pressione $\Delta p = 70 \text{ kPa}$ fornita dalla pompa corrisponde ad una prevalenza totale

$$\Delta H_P = \frac{\Delta p}{\rho g}$$

Pertanto, misurando le quote rispetto al fondo del serbatoio, la massima altezza h raggiungibile dal getto è

$$h = z_2 = \Delta H_P + z_s = \frac{\Delta p}{\rho g} + z_s = \frac{70\,000}{1\,000 \times 9,81} + 25 = 32,1 \text{ m}$$

5.86 Una grande ventola posta in prossimità dello sbocco di una galleria del vento aspira aria di densità $1,21 \text{ kg/m}^3$ alla pressione di $101,3 \text{ kPa}$. Calcolare la pressione nella galleria, quando la velocità dell'aria al suo interno è di 80 m/s .

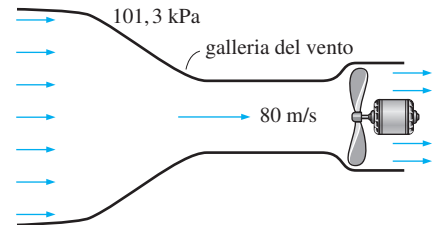
Analisi Applicando il teorema di Bernoulli tra un punto 1 appena fuori dall'ingresso nella galleria, in cui si può ritenere che la velocità sia trascurabile, e un punto 2 all'interno di essa, trascurando le variazioni di pressione dovute alle variazioni di quota perché l'aria è un fluido di piccolo peso specifico, si ha

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

da cui

$$p_2 = p_1 - \rho \frac{v_2^2}{2} = 101\,300 - 1,21 \times \frac{80^2}{2} = 97,4 \text{ kPa}$$

Analisi In una galleria del vento, la velocità aumenta e la pressione diminuisce. Per effetto delle perdite di carico di cui il calcolo non tiene conto, la pressione risulterà ancora minore.



5.87 In una tubazione orizzontale del diametro di 60 mm , nella quale defluisce acqua con una portata di $0,025 \text{ m}^3/\text{s}$, è inserito un divergente la cui sezione terminale ha un diametro di 110 mm . Ipotizzando che la perdita di carico nel divergente sia di $0,45 \text{ m}$, calcolare la variazione di pressione tra le sezioni di estremità del divergente.

Analisi Per la 5.108, tra le sezioni di estremità del divergente, rispettivamente, di diametro $D_1 = 60 \text{ mm}$ e $D_2 = 110 \text{ mm}$, essendo $\Delta H_d = 0,45 \text{ m}$ la perdita di carico tra le due sezioni e $z_1 = z_2$, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_d$$

per cui la differenza di pressione Δp tra le due sezioni è

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) + \rho g \Delta H_d$$

Essendo

$$V_1 = \frac{Q}{\pi D_1^2/4} = \frac{0,025}{\pi \times 0,060^2/4} = 8,84 \text{ m/s}$$

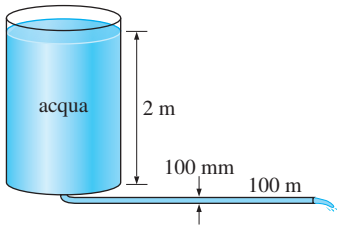
e

$$V_2 = \frac{Q}{\pi D_2^2/4} = \frac{0,025}{\pi \times 0,110^2/4} = 2,63 \text{ m/s}$$

le velocità medie nelle due sezioni e $\rho = 1\,000\text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, risulta

$$\begin{aligned}\Delta p &= \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) + \rho g \Delta H_d = \\ &= \frac{1\,000}{2} \times (2,63^2 - 8,84^2) + 1\,000 \times 9,81 \times 0,45 = -31\,200\text{ Pa}\end{aligned}$$

Discussione Poiché $\Delta p < 0$, lungo il divergente si ha un recupero di pressione ($p_2 > p_1$) conseguente alla diminuzione di energia cinetica.



5.88 Dal fondo di un serbatoio, inizialmente pieno d'acqua per un'altezza di 2 m, fuoriesce, con imbocco a spigolo vivo, una tubazione orizzontale lunga 100 m del diametro di 100 mm. Calcolare la velocità iniziale, nell'ipotesi che la perdita di carico complessiva sia pari a 3 volte l'altezza cinetica.

Analisi Tra un punto all'interno del serbatoio, il cui carico è uguale alla quota z_s della superficie libera rispetto ad un piano di riferimento, e la sezione u di sbocco, dove la pressione relativa è nulla perché l'efflusso è in atmosfera, per la 5.108, ponendo $\alpha = 1$, essendo la perdita di carico $\Delta H_d = 3V_u^2/2g$, si ha

$$z_s = z_u + \frac{V_u^2}{2g} + \Delta H_d = z_u + 4\frac{V_u^2}{2g}$$

per cui, introducendo il dislivello $h = z_s - z_u = 2\text{ m}$, la velocità iniziale risulta

$$V_u = \frac{1}{\sqrt{4}} \sqrt{2gh} = \frac{1}{\sqrt{4}} \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 2} = 3,13\text{ m/s}$$

5.89 Volendo svuotare più rapidamente il serbatoio del problema precedente, si decide di installare una pompa. Calcolare la prevalenza della pompa affinché nella tubazione, a serbatoio pieno, si abbia una velocità iniziale di 6 m/s.

Analisi Tra un punto all'interno del serbatoio, il cui carico è uguale alla quota z_s della superficie libera rispetto ad un piano di riferimento, e la sezione u di sbocco, dove la pressione relativa è nulla perché l'efflusso è in atmosfera, per la 5.108, essendo ΔH_P il salto utile della pompa e $\Delta H_d = 3V_u^2/2g$ la perdita di carico, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$\Delta H_P + z_s = z_u + \frac{V_u^2}{2g} + \Delta H_d = z_u + 4\frac{V_u^2}{2g}$$

da cui, introducendo il dislivello $h = z_s - z_u = 2\text{ m}$ e ponendo la velocità iniziale $V_u = 6\text{ m/s}$, si ha

$$\Delta H_P = 4\frac{V_u^2}{2g} - h = 4 \times \frac{6^2}{2 \times 9,81} - 2 = 5,34\text{ m}$$

maggio 2011