

Yunus A. Çengel
John M. Cimbala

per l'edizione italiana

Giuseppe Cozzo
Cinzia Santoro

Meccanica dei fluidi



Seconda edizione

Soluzione dei problemi
Capitolo 6

McGraw-Hill

Indice

1	Introduzione e concetti di base	1
	Introduzione, classificazione e sistema	1
	Massa, forza e unità di misura	4
	Modellazione e risoluzione di problemi ingegneristici	7
	Riepilogo	9
2	Proprietà dei fluidi	11
	Densità	12
	Tensione di vapore e cavitazione	15
	Energia specifica	16
	Comprimibilità e velocità del suono	17
	Viscosità	24
	Tensione superficiale e capillarità	30
	Riepilogo	32
3	Statica dei fluidi	37
	Pressione, manometro e barometro	38
	Spinte idrostatiche su superfici piane e curve	59
	Galleggiamento	66
	Moto rigido dei fluidi	72
	Riepilogo	81
4	Cinematica dei fluidi	99
	Problemi introduttivi	99
	Descrizioni lagrangiana ed euleriana	101
	Strutture del moto e visualizzazione del moto	107
	Moto e deformazione di elementi di fluido	115
	Teorema del trasporto di Reynolds	126
	Riepilogo	127
5	Equazioni della massa, di Bernoulli, dell'energia	135
	Conservazione della massa	136
	Energia meccanica e rendimento	140
	Teorema di Bernoulli	145
	Equazione dell'energia	160
	Riepilogo	174

6	Equazione della quantità di moto	183
	Leggi di Newton e conservazione della quantità di moto	184
	Equazione della quantità di moto	184
	Riepilogo	218
7	Analisi dimensionale e modellazione	229
	Dimensioni e unità, dimensioni fondamentali	229
	Omogeneità dimensionale	232
	Adimensionalizzazione delle equazioni	233
	Analisi dimensionale e similitudine	234
	Parametri adimensionali e metodo delle variabili ripetute	238
	Prove sperimentali e similitudine incompleta	255
	Riepilogo	260
8	Correnti in pressione	275
	Moto laminare e moto turbolento	276
	Moto completamente sviluppato	279
	Perdite localizzate	298
	Reti di distribuzione	299
	Lunghe condotte	326
	Misura della velocità e della portata	336
	Riepilogo	343
9	Equazioni indefinite del moto dei fluidi	357
	Problemi di base	357
	Equazione di continuità	359
	Funzione di corrente	361
	Equazione della quantità di moto e condizioni al contorno	371
	Riepilogo	379
10	Soluzioni approssimate dell'equazione di Navier-Stokes	391
	Problemi di base	392
	Moto non viscoso	395
	Moto irrotazionale	396
	Strati limite	400
	Riepilogo	409
11	Moto attorno ai corpi: resistenza e portanza	411
	Resistenza e portanza	412
	Moto su lastra piana	424
	Moto attorno a cilindri e sfere	428
	Portanza	432
	Riepilogo	436
12	Moto dei fluidi comprimibili	441
	Grandezze di ristagno	442
	Moto isoentropico unidimensionale	445
	Moto isoentropico negli ugelli	448
	Onde d'urto e onde di espansione	452

Moto con scambio di calore e resistenze trascurabili (Flusso di Rayleigh)	460
Moto adiabatico con resistenze non trascurabili (Flusso di Fanno)	467
Riepilogo	476
13 Correnti a superficie libera	495
Numero di Froude e celerità	497
Energia specifica ed equazione dell'energia	502
Moto uniforme e sezioni di minimo costo	509
Moto gradualmente e rapidamente variato. Risalto idraulico	520
Regolazione e misura della portata	527
Riepilogo	534

EQUAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

6

SOMMARIO

Questo capitolo studia l'equilibrio dinamico di un volume di controllo finito di fluido mediante l'applicazione dell'equazione della quantità di moto.

Le forze che agiscono su un volume di controllo possono essere distinte in forze di massa, in quanto agenti su ogni elementino del volume di controllo (come la forza di gravità), e forze di superficie, che agiscono sulla superficie di contorno del volume di controllo (come le forze dovute alle pressioni e alla resistenza al moto esercitata da una parete solida). Complessivamente, la risultante $\mathbf{F}$ delle forze che agiscono su un volume di controllo W , delimitato dalla superficie A , si può esprimere come

$$\mathbf{F} = \int_W \rho \mathbf{g} dW + \int_A \Phi_n dA \quad (6.7)$$

in cui il primo integrale è la risultante delle forze di massa (il peso) e il secondo la risultante delle forze di superficie, essendo Φ_n lo sforzo sull'elementino di superficie di normale n .

Per un corpo di massa m , la seconda legge di Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (6.1)$$

può essere enunciata nel modo seguente: *la forza risultante che agisce su un corpo è uguale alla variazione nell'unità di tempo della quantità di moto*. Passando da un sistema S a un volume di controllo W , delimitato da una superficie di controllo A , per il teorema del trasporto di Reynolds, ponendo $B = m\mathbf{v}$ e, quindi, $b = \mathbf{v}$, si ha

$$\frac{d(m\mathbf{v})_S}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{v} dW + \int_A \rho \mathbf{v} (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) dA \quad (6.9)$$

e per la seconda legge di Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{v} dW + \int_A \rho \mathbf{v} (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) dA \quad (6.10)$$

Esplicitando la risultante delle forze agenti sul volume di controllo si ottiene *l'equazione della quantità di moto* per un volume di controllo

$$\int_W \rho \mathbf{g} dW + \int_A \Phi_n dA - \frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{v} dW - \int_A \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \quad (6.12)$$

che, in forma più sintetica, si scrive anche

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi} + \mathbf{I} + \mathbf{M} = 0 \quad (6.13)$$

L'equazione della quantità di moto, chiamata anche **equazione globale della dinamica dei fluidi**, è un'equazione vettoriale utile per il calcolo delle azioni dinamiche di un fluido su parti di tubazioni o elementi di macchine.

Il flusso di quantità di moto $\mathbf{M}$ è sempre la differenza fra flusso entrante $\mathbf{M}_e$ e flusso uscente $\mathbf{M}_u$. Pertanto, l'equazione della quantità di moto può essere esplicitata come

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi} + \mathbf{I} + \mathbf{M}_e - \mathbf{M}_u = 0 \quad (6.24)$$

Se, come nella maggior parte dei problemi pratici, nel volume di controllo vi è una sola sezione di ingresso e una di uscita, come nel caso di un tronco di corrente, la portata di massa delle due sezioni è la stessa e il termine $\mathbf{M}$ diviene

$$\mathbf{M} = \rho Q (\beta_1 \mathbf{V}_1 - \beta_2 \mathbf{V}_2) \quad (6.25)$$

dove i pedici 1 e 2 indicano, rispettivamente, la sezione di ingresso e quella di uscita e β è il coefficiente di ragguaglio del flusso di quantità di moto, definito come

$$\beta = \frac{\int_A v^2 dA}{V^2 A} \quad (6.18)$$

PROBLEMI

Leggi di Newton e conservazione della quantità di moto

6.1 Enunciare la prima, la seconda e la terza legge di Newton.

Analisi La prima legge di Newton afferma che *un corpo non soggetto a forze esterne permane nello stato di quiete o di moto rettilineo uniforme*. La seconda afferma che *l'accelerazione di un corpo è proporzionale alla risultante delle forze applicate sul corpo e inversamente proporzionale alla sua massa*. La terza che *quando due corpi interagiscono, la forza che il primo corpo esercita sul secondo è uguale e opposta alla forza che il secondo esercita sul primo*.

6.2 La quantità di moto è un vettore? Se sì, quali sono la sua direzione e il suo verso?

Analisi Essendo la quantità di moto pari al prodotto della massa m per la velocità $\mathbf{v}$, cioè di uno scalare per un vettore, è anch'essa un vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore velocità.

6.3 Enunciare il principio di conservazione della quantità di moto. Cosa si può dire sulla quantità di moto di un corpo sul quale agisce un sistema di forze a risultante nullo?

Analisi Per la seconda legge di Newton, un corpo sul quale agisce un sistema di forze a risultante nullo è privo di accelerazione. In tal caso, essendo nulla la derivata della velocità rispetto al tempo, la velocità del corpo è costante. Poiché la quantità di moto di un corpo è il prodotto della massa del corpo per la sua velocità, ne discende che, in tali condizioni, anche la quantità di moto del corpo si mantiene costante. In ciò consiste il principio di conservazione della quantità di moto per il quale *se la risultante delle forze agenti su un sistema è nulla, la quantità di moto del sistema si mantiene costante*.

Equazione della quantità di moto

6.4 Utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds, scrivere l'equazione della quantità di moto nella forma valida per un volume di controllo.

Analisi Le leggi di conservazione scritte nella forma valida per un sistema possono essere facilmente trasformate nella forma valida per un volume di controllo grazie al teorema del trasporto di Reynolds, cioè alla relazione che lega la variazione nell'unità di tempo di una proprietà estensiva in un sistema con l'analoga quantità in un volume di controllo. Esso, per un volume di controllo fisso, è espresso dalla 4.42

$$\frac{dB_S}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \rho b \, dW + \int_A \rho b (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA$$

nella quale B è una proprietà estensiva di un sistema di massa m e densità ρ , $b = B/m$ la corrispondente proprietà intensiva, W un volume di controllo, A la sua superficie di contorno, $\mathbf{v}$ la velocità in un punto di A ed $\mathbf{n}$ la normale uscente dall'elementino di area dA nell'intorno del punto. Per $B = m\mathbf{v}$, si ha $b = \mathbf{v}$ e

$$\frac{d(m\mathbf{v})_S}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{v} dW + \int_A \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

in cui, per la seconda legge di Newton, il primo membro è la risultante delle forze agenti sul volume di controllo.

6.5 Descrivere le forze di massa e le forze di superficie. Il peso del fluido è una forza di massa o una forza di superficie? E le forze di pressione?

Analisi Le **forze di massa** agiscono sull'intero volume di controllo proporzionalmente alla sua massa. Le **forze di superficie** agiscono sulla superficie di controllo. Il peso del fluido, essendo proporzionale alla massa del fluido, è una forza di massa. Le forze di pressione, invece, sono forze di superficie.

6.6 Per quale regime di moto il coefficiente di ragguglio delle quantità di moto è più significativo e deve essere messo in conto: moto laminare o moto turbolento?

Analisi Il coefficiente di ragguglio delle quantità di moto è il rapporto tra il flusso di quantità di moto effettivo attraverso una sezione e quello che si avrebbe se densità e velocità in ogni punto fossero costanti e pari ai valori medi nella sezione. Se la densità è costante, nella sezione trasversale di una corrente di area A e velocità media V , il coefficiente è espresso dalla 6.18

$$\beta = \frac{\int_A v^2 dA}{V^2 A}$$

Il valore di β risulta, quindi, tanto più prossimo all'unità quanto più la distribuzione di velocità è uniforme. Per effetto degli scambi di quantità di moto fra il fluido più veloce che occupa la zona centrale della tubazione e quello più lento che proviene dalla zona in prossimità della parete, in moto turbolento la distribuzione di velocità è molto più uniforme di quanto non lo sia in moto laminare, dove è parabolica. In moto turbolento risulta $1,01 \leq \beta \leq 1,04$, per cui abitualmente si pone $\beta = 1$. Invece, in moto laminare $\beta = 1,33$ e, pertanto, non è lecito approssimarli all'unità.

6.7 Scrivere l'equazione della quantità di moto per un moto permanente unidimensionale nel caso di assenza di forze esterne, descrivendo il significato fisico di ciascun termine.

Analisi L'equazione della quantità di moto per un moto permanente è espressa dalla 6.23

$$\mathbf{F} = \sum_{n_u} \beta_i Q_{mi} \mathbf{V}_i - \sum_{n_e} \beta_i Q_{mi} \mathbf{V}_i$$

nella quale $\mathbf{F}$ è la risultante delle forze che agiscono sul volume di controllo, Q_m è la portata di massa, $\mathbf{V}$ è la velocità media e β il coefficiente di ragguglio

delle quantità di moto, essendo le sommatorie a secondo membro estese, rispettivamente, alle n_u sezioni attraverso le quali il fluido esce e alle n_e sezioni attraverso le quali il fluido entra. In assenza di forze esterne, si ha $\mathbf{F} = 0$, per cui

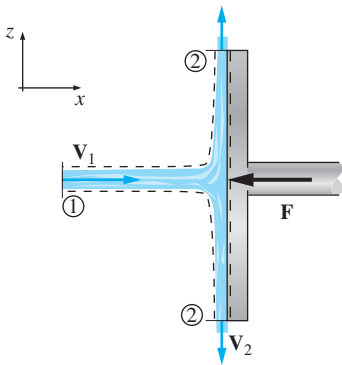
$$\sum_{n_u} \beta_i Q_{mi} \mathbf{V}_i - \sum_{n_e} \beta_i Q_{mi} \mathbf{V}_i = 0$$

secondo la quale, in assenza di forze esterne, la quantità di moto entrante è uguale alla quantità di moto uscente. Se il moto è unidimensionale, il volume di controllo ha una sezione 1 di ingresso e una sezione 2 di uscita aventi la stessa portata di massa, per cui l'equazione della quantità di moto diviene

$$\beta_1 Q_m \mathbf{V}_1 = \beta_2 Q_m \mathbf{V}_2$$

6.8 Perché quando si applica l'equazione della quantità di moto conviene normalmente usare le pressioni relative?

Analisi Perché la pressione atmosferica, agendo su tutte le superfici, dà contributo nullo al bilancio delle forze.



6.9 Per bilanciare la spinta di un getto orizzontale su una lastra piana verticale in quiete, bisogna applicare alla lastra una forza orizzontale F . Raddoppiando la velocità del getto, di quanto aumenta la forza da applicare?

Analisi Per l'equilibrio alla traslazione in direzione orizzontale, bisogna applicare alla lastra una forza $\mathbf{F}$ uguale e contraria alla spinta $\mathbf{S}$ che riceve dal getto. L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra una sezione trasversale del getto 1 e la sezione 2 di uscita dal bordo della piastra, tenendo presente che il termine $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e che le pressioni relative sono ovunque nulle tranne che sulla superficie della piastra, diviene

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_0 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

avendo indicato con $\mathbf{\Pi}_0$ la risultante delle forze di superficie che la piastra esercita sul fluido. La spinta dinamica $\mathbf{S}$ che il liquido esercita sulla piastra è uguale e contraria a quella che la piastra esercita sul liquido. Pertanto, si ha

$$\mathbf{S} = -\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{G} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il vettore $\mathbf{G}$ è verticale. Anche il flusso di quantità di moto uscente $\mathbf{M}_2$ giace su un piano verticale, per cui, proiettando sull'orizzontale, si ha

$$S_x = M_1 = \rho Q V_1 = \rho A_1 V_1^2$$

in cui Q è la portata del getto, ρ la densità del fluido, V_1 la velocità e A_1 l'area della sezione trasversale. Pertanto, essendo la spinta del getto proporzionale al quadrato della velocità, se la velocità del getto raddoppia, la forza da applicare per l'equilibrio si quadruplica.

6.10 Come fa un elicottero a rimanere sospeso in aria? È necessaria una potenza maggiore al livello del mare o in alta montagna? È necessaria una potenza maggiore in estate o in inverno? Perché?

Analisi (a) Un elicottero rimane sospeso in aria grazie al forte flusso di aria convogliata verso il basso dalla rotazione delle pale del rotore. L'aria che viene spinta verso il basso reagisce esercitando sull'elicottero una spinta verso l'alto pari almeno al suo peso.

(b) La densità dell'aria diminuisce con la quota. Poiché il flusso di quantità di moto dipende dalla portata di massa e, quindi, dalla densità, ad alta quota, per dar luogo alla stessa spinta, il rotore deve generare un flusso d'aria di portata maggiore di quella necessaria al livello del mare. Quindi, in alta montagna, è richiesta una potenza maggiore di quella necessaria al livello del mare.

(c) In inverno l'aria è generalmente più fredda che in estate e, quindi, più densa. Pertanto, a parità di potenza, la portata di massa del flusso d'aria generato dal rotore è maggiore e, quindi, è maggiore anche la spinta. Conseguentemente, a parità di spinta, in inverno è richiesta una potenza minore di quella necessaria in estate.



6.11 Per combattere un incendio, due vigili del fuoco usano due idranti identici. Uno dei due sorregge l'idrante in modo che il verso del getto sia uguale a quello del moto della corrente nella tubazione, mentre l'altro lo sorregge facendo fare alla tubazione un percorso a U in modo che il getto fuoriesca con verso opposto a quello della corrente in arrivo. Su quale dei due agisce la spinta maggiore?

Analisi L'equazione della quantità di moto è un'equazione vettoriale. Si consideri un volume di controllo costituito dal tratto terminale di tubazione, tra una sezione sufficientemente a monte dello sbocco e la prima sezione del getto. Nel caso in cui il getto fuoriesca nella stessa direzione e nello stesso verso della corrente che entra nel volume di controllo, il flusso di quantità di moto entrante e quello uscente hanno lo stesso verso, per cui la loro differenza vettoriale ha modulo pari alla differenza dei moduli. Invece, nel caso in cui la tubazione fa un percorso ad U, i flussi di quantità di moto entrante e uscente hanno verso opposto e, quindi, la loro differenza vettoriale ha modulo pari alla somma dei moduli. Pertanto, la spinta maggiore agisce sul vigile del fuoco la cui tubazione fa un percorso ad U.



6.12 Un getto d'acqua orizzontale colpisce la parete piana verticale di un carrello con attrito nullo, che, a causa della spinta esercitata dal getto, inizia a muoversi. L'accelerazione del carrello è costante o varia? Perché?

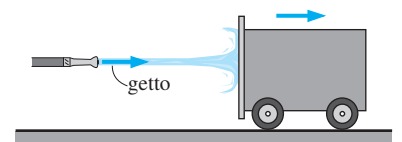
Analisi L'accelerazione del carrello via via diminuisce. Infatti, come nel problema 6.9, la spinta esercitata dal getto sul carrello fermo, è uguale al flusso di quantità di moto entrante nel volume di controllo

$$S = \rho Q V = \rho A V^2$$

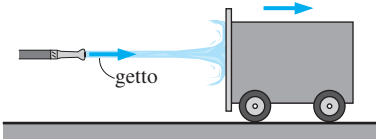
Se invece il carrello si muove con velocità V_c , considerando un volume di controllo che si muove con il carrello, nell'esprimere il flusso di quantità di moto attraverso la superficie di controllo, al posto della velocità V deve figurare la velocità relativa $V_r = V - V_c$ del getto rispetto al carrello stesso, per cui

$$S = \rho A V_r^2 = \rho A (V - V_c)^2$$

Tale spinta è minore di quella che il carrello riceve da fermo sia perché diminuisce la velocità di impatto del getto sul carrello, sia perché diminuisce la

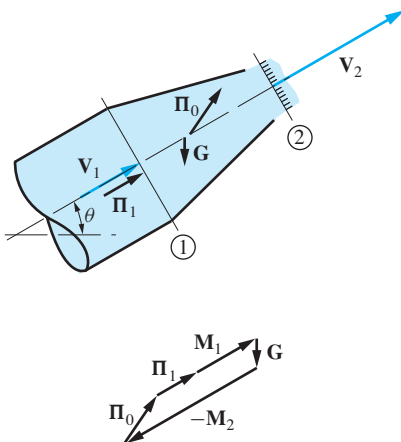


portata. Infatti, la portata entrante nel volume di controllo in movimento è pari al prodotto dell'area A del getto per la velocità relativa $V - V_c$, mentre la portata del getto è AV . La differenza fra le due portate, pari a AV_c , non produce alcuna spinta sul carrello ma serve solo ad allungare il getto. Il carrello di massa m si muove con un'accelerazione $a = S/m$. Via via che il carrello acquista velocità, diminuisce la velocità relativa del getto rispetto al carrello e, con essa, anche la spinta del getto sul carrello. Pertanto, diminuisce anche l'accelerazione a , che, quindi, non è costante.



6.13 Un getto d'acqua orizzontale colpisce la parete piana verticale di un carrello con attrito nullo, che, a causa della spinta esercitata dal getto, inizia a muoversi. Qual è la velocità massima che il carrello può raggiungere? Perché?

Analisi È pari alla velocità del getto. Infatti, fino a che la velocità relativa del getto rispetto al carrello è maggiore di zero, il getto esercita sul carrello una spinta che lo fa accelerare, facendo diminuire la velocità relativa. Quando la velocità del carrello raggiunge quella del getto, si annulla la velocità relativa e, di conseguenza, anche la forza esercitata dal getto sul carrello.



6.14 La spinta esercitata su un ugello da una corrente che ha velocità di sbocco V è proporzionale a V^2 o, in alternativa, a Q^2 . Perché?

Analisi L'equazione della quantità di moto applicata al volume di controllo compreso tra la sezione iniziale 1 dell'ugello e la sezione contratta 2 subito a valle della sezione di sbocco, trattandosi del moto permanente unidimensionale di una corrente con una sezione di ingresso 1 e una di uscita 2, assume la forma 6.25

$$\mathbf{F} = \rho Q(\beta_2 \mathbf{V}_2 - \beta_1 \mathbf{V}_1)$$

in cui Q è la portata, ρ la densità ed $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi}$ è la risultante del peso del volume di liquido $\mathbf{G}$ e della forza $\mathbf{\Pi}$ che la superficie di controllo esercita sul volume. Quest'ultima è la risultante della forza $\mathbf{\Pi}_0$ esercitata dalla parete dell'ugello e della forza $\mathbf{\Pi}_1$ esercitata dalla pressione del liquido sulla sezione 1, essendo $\mathbf{\Pi}_2 = 0$ perché la pressione relativa nella sezione contratta è nulla. Per cui, si ha

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_0 + \mathbf{\Pi}_1 = \rho Q(\beta_2 \mathbf{V}_2 - \beta_1 \mathbf{V}_1)$$

La spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sull'ugello è uguale e contraria a $\mathbf{\Pi}_0$, per cui

$$\mathbf{S} = -\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_1 + \rho Q(\beta_1 \mathbf{V}_1 - \beta_2 \mathbf{V}_2)$$

Il peso $\mathbf{G}$ è verticale, mentre $\mathbf{\Pi}_1$ è diretto come l'asse. Se questo è inclinato di θ sull'orizzontale, proiettando nella direzione del moto, assunta come asse x , si ha

$$S_x = -G \sin \theta + \Pi_1 + \rho Q(\beta_1 V_1 - \beta_2 V_2)$$

Essendo per l'equazione di continuità $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$, esprimendo le due velocità in funzione della portata si ha

$$S_x = -G \sin \theta + \Pi_1 + \rho Q^2 \left(\beta_1 \frac{1}{A_1} - \beta_2 \frac{1}{A_2} \right)$$

Se l'asse dell'ugello è orizzontale e la corrente in ingresso all'ugello proviene dalla direzione verticale, sia $\mathbf{\Pi}_1$ che $\mathbf{M}_1$ sono verticali. Pertanto, nella

direzione orizzontale e nel verso del moto la spinta ha modulo

$$S_x = -\beta_2 \rho Q^2 V_2 = -\beta_2 \rho A_2 V_2^2 = -\beta_2 \rho \frac{Q^2}{A_2}$$

relazione che mostra come, in tali ipotesi, la componente orizzontale della spinta risulti proporzionale al quadrato della velocità di efflusso e, quindi, anche al quadrato della portata.

6.15 Un getto d'acqua orizzontale con velocità media V colpisce la parete piana verticale di un carrello con attrito nullo, che si sta muovendo nella direzione opposta a quella del getto con velocità $V/2$. Quanto vale la forza necessaria per mantenere tale moto, rispetto al valore F necessario per mantenere il carrello fermo?

Analisi Come nel problema 6.12, se A è l'area del getto e V_r la velocità relativa del getto rispetto al carrello, la spinta che il getto esercita sul carrello vale

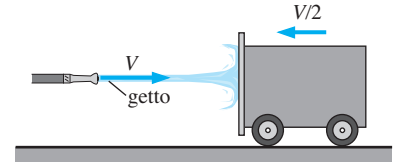
$$S = \rho A V_r^2 = \rho A \left(V + \frac{V}{2} \right)^2 = 1,5^2 \rho A V^2$$

Quando il carrello è fermo, essendo $V_r = V$, la spinta del getto sul carrello è

$$S_0 = \rho A V^2$$

La forza F_0 necessaria per mantenere il carrello fermo è uguale e contraria alla spinta S_0 , così come la forza F necessaria per mantenerlo in moto è uguale e contraria alla spinta S . Per cui

$$F = 1,5^2 \rho A V^2 = 2,25 F_0$$



6.16 Un getto d'acqua orizzontale con velocità media di 9 m/s colpisce una lastra piana verticale, sulla quale, per bilanciare la spinta del getto, bisogna esercitare una forza orizzontale di 150 kgf. Calcolare la portata del getto.

Analisi Come nel problema 6.9, la componente orizzontale della spinta che il getto esercita sulla lastra è

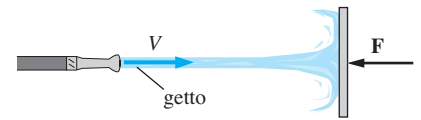
$$S_O = M_1 = \rho Q V$$

in cui $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ è la densità dell'acqua, Q la portata del getto e V la sua velocità. Per impedire la traslazione orizzontale della lastra, tale spinta è bilanciata dalla forza orizzontale F . Pertanto, si ha

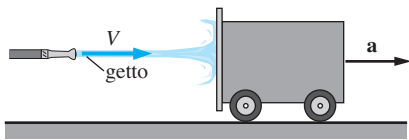
$$F = S_O = \rho Q V$$

da cui

$$Q = \frac{F}{\rho V} = \frac{150 \times 9,81}{1000 \times 9} = 0,163 \text{ m}^3/\text{s}$$



6.17 Un getto d'acqua orizzontale, del diametro di 50 mm e velocità di 18 m/s, colpisce la parete piana verticale di un carrello con attrito nullo della



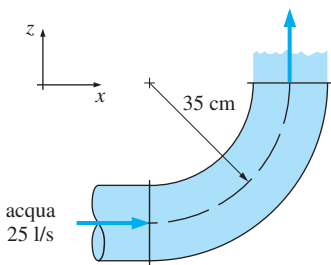
massa di 1 000 kg, che, a causa della spinta del getto, comincia a muoversi. Calcolare l'accelerazione che assume il carrello non appena colpito dal getto.

Analisi Come nel problema 6.9, essendo $\rho = 1\,000\text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, Q la portata del getto, V la sua velocità e A l'area della sezione trasversale, la componente orizzontale della spinta che il getto esercita sulla lastra è

$$S_O = M_1 = \rho Q V = \rho A V^2 = 1\,000 \times \frac{\pi \times 0,050^2}{4} \times 18^2 = 636\text{ N}$$

Per la seconda legge di Newton, l'accelerazione a che il getto imprime al carrello di massa m è

$$a = \frac{S_O}{m} = \frac{636}{1\,000} = 0,636\text{ m/s}^2$$



6.18 Dalla sezione terminale di un gomito, del diametro di 100 mm, che devia verticalmente verso l'alto una corrente orizzontale, defluisce nell'atmosfera una portata di 25 l/s. Calcolare la spinta che la corrente esercita sul gomito.

Analisi L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra la sezione di ingresso 1 del gomito e quella di uscita 2, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, la parete del gomito, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e $\Pi_2 = 0$ perché nella sezione 2 la pressione relativa è nulla in quanto lo sbocco è in atmosfera, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sul gomito, uguale e contraria a Π_0 , è

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_1 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il peso $\mathbf{G}$ è verticale ed, essendo A l'area della sezione trasversale del gomito, $W = AR\pi/2$ il suo volume e $\rho = 1\,000\text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, ha modulo

$$G = \rho g W = \rho g A R \frac{\pi}{2} = 1\,000 \times 9,81 \times \frac{\pi \times 0,100^2}{4} \times 0,35 \times \frac{\pi}{2} = 42,3\text{ N}$$

I flussi di quantità di moto sono vettori diretti come le velocità nelle rispettive sezioni, per cui $\mathbf{M}_1$ è orizzontale e ha il verso della corrente ed $\mathbf{M}_2$ è verticale e diretto verso l'alto. Ambedue hanno lo stesso modulo in quanto nelle sezioni 1 e 2 sono uguali sia l'area A che la portata Q , per cui, ponendo $\beta = 1,03$,

$$M_1 = M_2 = \beta \rho \frac{Q^2}{A} = 1,03 \times 1\,000 \times \frac{4 \times 0,025^2}{\pi \times 0,100^2} = 82,0\text{ N}$$

La spinta Π_1 ha direzione orizzontale in quanto ortogonale alla sezione 1 e modulo pari al prodotto della pressione p_1 nel baricentro della sezione per l'area A della sezione. La pressione p_1 , per il teorema di Bernoulli tra le sezioni 1 e 2, essendo $V_1 = V_2$ e $p_2 = 0$, è

$$p_1 = \rho g (z_2 - z_1) = 1\,000 \times 9,81 \times 0,35 = 3\,430\text{ Pa}$$

per cui

$$\Pi_1 = p_1 A = 3430 \times \frac{\pi \times 0,100^2}{4} = 26,9 \text{ N}$$

Rispetto al sistema di riferimento di figura, le componenti orizzontale e verticale della spinta risultano

$$S_x = \Pi_1 + M_1 = 26,9 + 82,0 = 109 \text{ N}$$

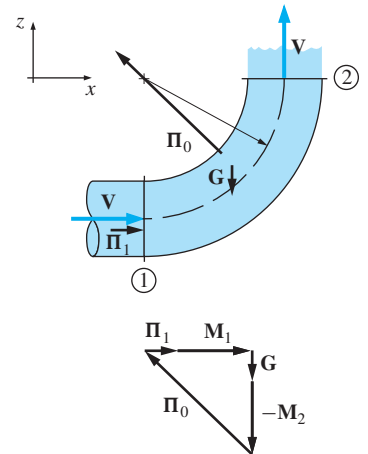
$$S_z = -G - M_2 = -42,3 - 82,0 = -124 \text{ N}$$

La spinta, pertanto, ha modulo

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_z^2} = \sqrt{109^2 + 124^2} = 165 \text{ N}$$

ed è inclinata, rispetto alla direzione x positiva, di un angolo

$$\theta = \arctan \frac{S_z}{S_x} = \arctan \frac{-124}{109} = -48,7^\circ$$



6.19 Con riferimento al problema precedente, quanto vale la spinta se al gomito viene collegato un altro gomito identico, così da far fare alla corrente un percorso ad U in modo che defluisca orizzontalmente?

Analisi L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra la sezione di ingresso 1 del gomito e quella di uscita 2, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, la parete del gomito, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e $\Pi_2 = 0$ perché nella sezione 2 la pressione relativa è nulla in quanto lo sbocco è in atmosfera, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sul gomito, uguale e contraria a Π_0 , è

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_1 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

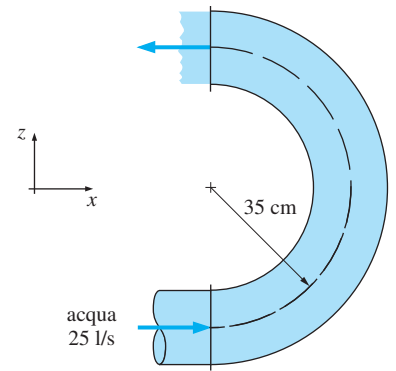
Il peso $\mathbf{G}$ è verticale ed, essendo A l'area della sezione trasversale del gomito, $W = \pi R A$ il suo volume e $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, ha modulo

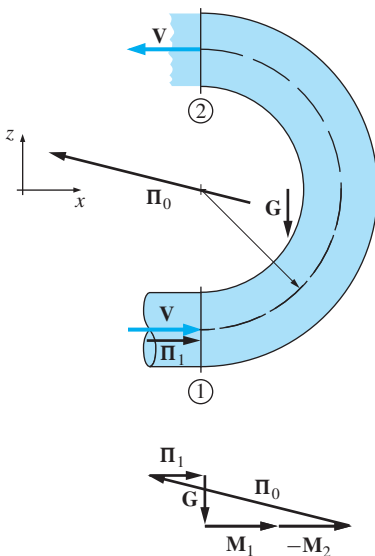
$$G = \rho g W = \rho g \pi R A = 1000 \times 9,81 \times \pi \times 0,35 \times \frac{\pi \times 0,100^2}{4} = 84,6 \text{ N}$$

I flussi di quantità di moto sono vettori diretti come le velocità nelle rispettive sezioni, per cui sono entrambi orizzontali e hanno verso opposto. Ambedue hanno lo stesso modulo in quanto nelle sezioni 1 e 2 sono uguali sia l'area A che la portata Q , per cui, ponendo $\beta = 1,03$,

$$M_1 = M_2 = \beta \rho \frac{Q^2}{A} = 1,03 \times 1000 \times \frac{4 \times 0,025^2}{\pi \times 0,100^2} = 82,0 \text{ N}$$

La spinta Π_1 ha direzione orizzontale in quanto ortogonale alla sezione 1 e modulo pari al prodotto della pressione p_1 nel baricentro della sezione per





l'area A della sezione. La pressione p_1 , per il teorema di Bernoulli tra le sezioni 1 e 2, essendo $V_1 = V_2$ e $p_2 = 0$, è

$$p_1 = \rho g(z_2 - z_1) = 1000 \times 9,81 \times 0,35 \times 2 = 6870 \text{ Pa}$$

per cui

$$\Pi_1 = p_1 A = 6870 \times \frac{\pi \times 0,100^2}{4} = 53,9 \text{ N}$$

Rispetto al sistema di riferimento di figura, le componenti orizzontale e verticale della spinta risultano

$$S_x = \Pi_1 + M_1 + M_2 = 53,9 + 82,0 + 82,0 = 218 \text{ N}$$

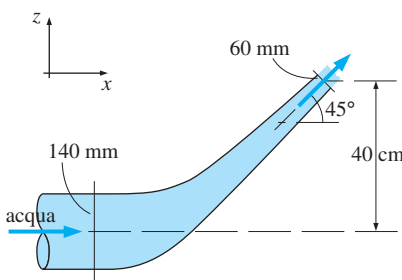
$$S_z = -G = -84,6 \text{ N}$$

La spinta, pertanto, ha modulo

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_z^2} = \sqrt{218^2 + 84,6^2} = 234 \text{ N}$$

ed è inclinata, rispetto alla direzione x positiva, di un angolo

$$\theta = \arctan \frac{S_z}{S_x} = \arctan \frac{-84,6}{218} = -21,2^\circ$$



6.20 Dalla sezione terminale di un gomito a sezione variabile, che devia di 45° verso l'alto una corrente orizzontale, defluisce nell'atmosfera una portata di 30 l/s. La differenza tra le quote dei baricentri delle sezioni di uscita e di ingresso, aventi rispettivamente diametro di 60 mm e di 140 mm, è di 40 cm. La massa complessiva del gomito e dell'acqua in esso contenuta è 50 kg. Calcolare la forza di ancoraggio necessaria per bloccare il gomito.

Analisi La forza di ancoraggio $\mathbf{F}$ necessaria per bloccare il gomito deve essere uguale e opposta alla risultante delle forze che agiscono sul gomito, costituite dal peso proprio $\mathbf{P}$ del gomito e dalla spinta $\mathbf{S}$ che riceve dal fluido. Per cui, si ha

$$\mathbf{F} = -\mathbf{P} - \mathbf{S}$$

L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra la sezione di ingresso 1 del gomito e quella di uscita 2, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, la parete del gomito, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e $\Pi_2 = 0$ perché nella sezione 2 la pressione relativa è nulla in quanto lo sbocco è in atmosfera, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sul gomito, uguale e contraria a Π_0 , è

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_1 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il peso $\mathbf{G}$ è verticale. I flussi di quantità di moto sono vettori diretti come le velocità nelle rispettive sezioni. Essendo D_1 e D_2 i diametri delle due sezioni, Q la portata,

$$V_1 = \frac{Q}{\pi D_1^2/4} = \frac{0,030}{\pi \times 0,140^2/4} = 1,95 \text{ m/s}$$

e

$$V_2 = \frac{Q}{\pi D_2^2/4} = \frac{0,030}{\pi \times 0,060^2/4} = 10,6 \text{ m/s}$$

le velocità medie nelle due sezioni e $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, ponendo il coefficiente di ragguaglio $\beta = 1,03$, si ha

$$M_1 = \beta \rho Q V_1 = 1,03 \times 1000 \times 0,030 \times 1,95 = 60,2 \text{ N}$$

$$M_2 = \beta \rho Q V_2 = 1,03 \times 1000 \times 0,030 \times 10,6 = 328 \text{ N}$$

La spinta Π_1 ha direzione orizzontale in quanto ortogonale alla sezione 1 e modulo pari al prodotto della pressione p_1 nel baricentro della sezione per l'area A_1 della sezione. Tra le sezioni 1 e 2, nell'ipotesi di perdite di carico trascurabili, per il teorema di Bernoulli, si ha

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}$$

Essendo $p_2 = 0$ perché lo sbocco è in atmosfera e, per la 6.22,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 1 + 3(\beta - 1) = 1 + 3 \times (1,03 - 1) = 1,09$$

si ha

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho g(z_2 - z_1) + \frac{\alpha \rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) = \\ &= 1000 \times 9,81 \times 0,40 + \frac{1,09 \times 1000}{2} \times (10,6^2 - 1,95^2) = 63\,200 \text{ Pa} \end{aligned}$$

per cui

$$\Pi_1 = p_1 A_1 = 63\,200 \times \frac{\pi \times 0,140^2}{4} = 973 \text{ N}$$

Assumendo l'asse x orizzontale con lo stesso verso del moto e l'asse z verticale e positivo verso l'alto ed essendo θ l'angolo di deviazione del getto, le componenti orizzontale e verticale della spinta risultano

$$S_x = \Pi_1 + M_1 - M_2 \cos \theta$$

$$S_z = -G - M_2 \sin \theta$$

Pertanto, la forza F ha componenti

$$F_x = -S_x = -973 - 60,2 + 328 \times \cos 45^\circ = -801 \text{ N}$$

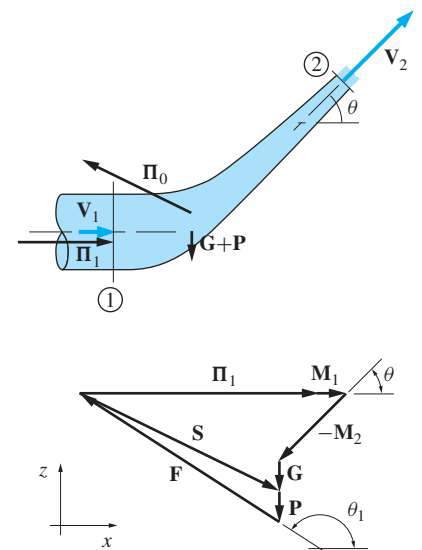
$$F_z = P - S_z = P + G + M_2 \sin \theta = 50 \times 9,81 + 328 \times \sin 45^\circ = 723 \text{ N}$$

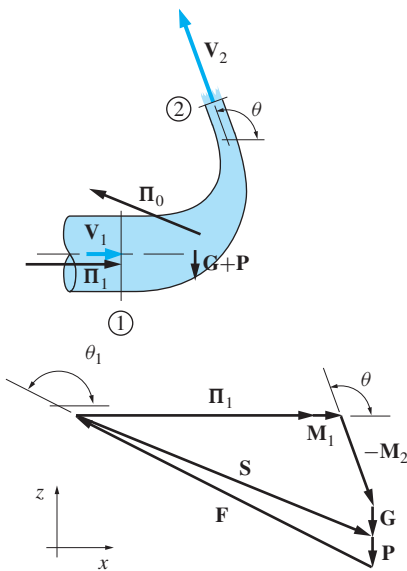
modulo

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{801^2 + 723^2} = 1\,079 \text{ N}$$

ed è inclinata, rispetto alla direzione x positiva, di un angolo

$$\theta_1 = \arctan \frac{F_z}{F_x} = \arctan \frac{723}{-801} = -42^\circ + 180^\circ = 138^\circ$$





6.21 Risolvere il problema precedente nel caso in cui il getto venga deviato di 110° .

Analisi Come nel problema precedente, la forza di ancoraggio $\mathbf{F}$ deve essere uguale e opposta alla somma del peso proprio $\mathbf{P}$ del gomito e della spinta $\mathbf{S}$ che il gomito riceve dal fluido, cioè

$$\mathbf{F} = -\mathbf{P} - \mathbf{S}$$

La spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sul gomito, uguale e contraria alla forza Π_0 esercitata dalla parete del gomito sul liquido, è

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_1 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il peso $\mathbf{G}$ è verticale. I flussi di quantità di moto sono diretti come le velocità nelle rispettive sezioni e, ponendo il coefficiente di ragguaglio $\beta = 1,03$, hanno lo stesso modulo che nel problema precedente, cioè

$$M_1 = \beta \rho Q V_1 = 60,2 \text{ N}$$

$$M_2 = \beta \rho Q V_2 = 328 \text{ N}$$

Anche la pressione p_1 ha lo stesso valore, per cui

$$\Pi_1 = p_1 A_1 = 973 \text{ N}$$

Assumendo l'asse x orizzontale con lo stesso verso del moto e l'asse z verticale e positivo verso l'alto ed essendo θ l'angolo di deviazione del getto, le componenti orizzontale e verticale della spinta sono, come nel caso precedente,

$$S_x = \Pi_1 + M_1 - M_2 \cos \theta$$

$$S_z = -G - M_2 \sin \theta$$

Pertanto, la forza $\mathbf{F}$ ha componenti

$$F_x = -S_x = -973 - 60,2 + 328 \times \cos 110^\circ = -1150 \text{ N}$$

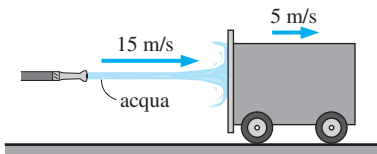
$$F_z = P - S_z = P + G + M_2 \sin \theta = 50 \times 9,81 + 328 \times \sin 110^\circ = 799 \text{ N}$$

modulo

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{1150^2 + 799^2} = 1400 \text{ N}$$

ed è inclinata, rispetto alla direzione x positiva, di un angolo

$$\theta_1 = \arctan \frac{F_z}{F_x} = \arctan \frac{799}{-1150} = -34,8^\circ + 180^\circ = 145^\circ$$



6.22 Un getto d'acqua orizzontale con velocità di 15 m/s colpisce la parete piana verticale di un carrello che si muove nella stessa direzione del getto con una velocità di 5 m/s. La portata del getto è di 25 l/s. Calcolare la forza frenante che deve essere applicata al carrello per impedire che esso acceleri.

Analisi Perché il carrello abbia accelerazione nulla è necessario, per la seconda legge di Newton, che il sistema di forze applicato al carrello abbia risultante nullo. Pertanto, bisogna applicare al carrello una forza $\mathbf{F}$ uguale e contraria alla

spinta $\mathbf{S}$ che esso riceve dal getto. Come nel problema 6.12, se A è la sezione del getto, V la sua velocità, V_c la velocità del carrello e V_r la velocità relativa del getto rispetto al carrello, la spinta che il getto esercita sul carrello vale

$$S = \rho A V_r^2 = \rho A (V - V_c)^2$$

Essendo la densità dell'acqua $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, si ha

$$S = \rho \frac{Q}{V} (V - V_c)^2 = 1000 \times \frac{0,025}{15} \times (15 - 5)^2 = 167 \text{ N}$$

La forza frenante che deve essere applicata al carrello per impedire che esso acceleri deve essere uguale, in modulo, alla spinta e, pertanto,

$$F = S = 167 \text{ N}$$

6.23 Con riferimento al problema precedente, nell'ipotesi che i freni non funzionino e che il carrello abbia una massa di 300 kg, calcolare l'accelerazione che esso assume non appena viene colpito dal getto.

Analisi Sul carrello agisce la spinta del getto che, per la seconda legge di Newton, gli imprime un'accelerazione di modulo

$$a = \frac{S}{m} = \frac{167}{300} = 0,557 \text{ m/s}^2$$

6.24 Un getto d'acqua di $2,5 \text{ m}^3/\text{s}$, che si muove con una velocità orizzontale di 6 m/s , è diviso da un setto in due parti, deviate di 45° da parti opposte rispetto al piano verticale contenente l'asse del getto. Calcolare la spinta sul setto.

Analisi L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra una sezione 1 del getto a monte del setto e le sezioni 2 e 3 ai bordi di uscita dal setto, essendo Π_0 , Π_1 , Π_2 e Π_3 le forze che, rispettivamente, la parete del gomito, la sezione 1, la sezione 2 e la sezione 3 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_3 = 0$$

Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = 0$ perché nelle tre sezioni la pressione relativa è nulla, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sul setto, uguale e contraria a Π_0 , è

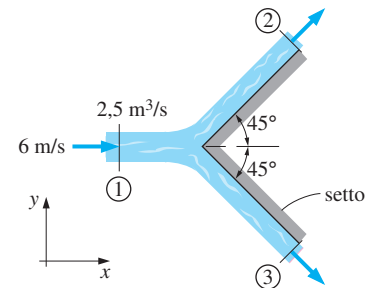
$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_3$$

Il vettore $\mathbf{G}$ è verticale. I flussi di quantità di moto sono vettori diretti come le velocità nelle rispettive sezioni, nelle quali, essendo la velocità distribuita uniformemente, è $\beta = 1$. Il flusso di quantità di moto entrante ha modulo

$$M_1 = \beta \rho Q V = 1000 \times 2,5 \times 6 = 15000 \text{ N}$$

Lungo il getto, non essendovi variazioni di quota né di pressione, la velocità, per il teorema di Bernoulli, si mantiene costante. Pertanto, nelle sezioni di uscita, i flussi di quantità di moto hanno modulo

$$M_2 = M_3 = \beta \rho \frac{Q}{2} V = \frac{M_1}{2} = 7500 \text{ N}$$

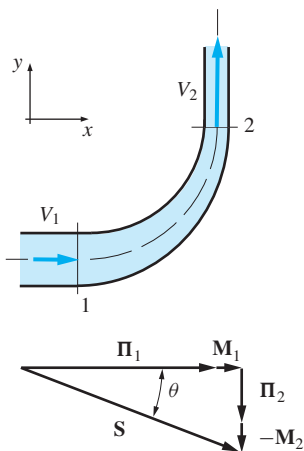


Con riferimento al sistema di assi indicato in figura, si ha

$$S_x = M_1 - M_2 \cos 45^\circ - M_3 \cos 45^\circ = 15 - 2 \times 7,5 \times \cos 45^\circ = 4,39 \text{ kN}$$

$$S_y = -M_2 \sin 45^\circ + M_3 \sin 45^\circ = 0$$

La spinta risulta, quindi, diretta come l'asse x e con verso concorde a quello della corrente.



6.25 Una corrente d'acqua che si muove in una tubazione orizzontale del diametro di 300 mm con una velocità media di 2 m/s, imbocca con una pressione relativa di 300 kPa un gomito riduttore, che devia orizzontalmente la corrente di 90° innestandosi in una tubazione orizzontale del diametro di 150 mm. Calcolare la spinta esercitata dalla corrente sul gomito.

Analisi L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra la sezione di ingresso 1 del gomito e quella di uscita 2, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, la parete del gomito, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sul gomito, uguale e contraria a Π_0 , è

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il peso $\mathbf{G}$ è verticale. I flussi di quantità di moto $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ sono vettori diretti come le velocità nelle rispettive sezioni, per cui sono ambedue orizzontali. Per l'equazione di continuità si ha $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$, da cui

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 V_1 = \left(\frac{0,300}{0,150} \right)^2 \times 2 = 8 \text{ m/s}$$

Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, ponendo $\beta_1 = \beta_2 = 1,03$, i flussi di quantità di moto hanno, rispettivamente, modulo

$$M_1 = \beta_1 \rho A_1 V_1^2 = 1,03 \times 1000 \times \pi \times 0,300^2 / 4 \times 2^2 = 291 \text{ N}$$

$$M_2 = \beta_2 \rho A_2 V_2^2 = 1,03 \times 1000 \times \pi \times 0,150^2 / 4 \times 8^2 = 1160 \text{ N}$$

La spinta Π_1 ha direzione orizzontale in quanto ortogonale alle sezione 1 e modulo pari al prodotto della pressione p_1 nel baricentro della sezione per l'area A_1 della sezione, per cui

$$\Pi_1 = p_1 A_1 = 300\,000 \times \frac{\pi \times 0,300^2}{4} = 21,2 \text{ kN}$$

Per il teorema di Bernoulli tra le sezioni 1 e 2, essendo $z_1 = z_2$, è

$$p_2 = p_1 + \rho \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = 300\,000 + 1000 \times \frac{2^2 - 8^2}{2} = 270\,000 \text{ Pa}$$

per cui la spinta Π_2 , ortogonale alle sezione 2, ha modulo

$$\Pi_2 = p_2 A_2 = 270\,000 \times \frac{\pi \times 0,150^2}{4} = 4,77 \text{ kN}$$

Rispetto al sistema di riferimento di figura ed assumendo l'asse z verticale verso l'alto, la spinta ha componenti

$$S_x = \Pi_1 + M_1 = 21\,200 + 291 = 21,5 \text{ kN}$$

$$S_y = -\Pi_2 - M_2 = -4\,770 - 1\,160 = -5,93 \text{ kN}$$

$$S_z = -G$$

La spinta, pertanto, ha componente orizzontale

$$S_O = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{21,5^2 + 5,93^2} = 22,3 \text{ kN}$$

inclinata, rispetto alla direzione x positiva, di un angolo

$$\theta = \arctan \frac{S_y}{S_x} = \arctan \frac{-5,93}{21,5} = -15,4^\circ$$

6.26 Una turbina eolica del diametro di 90 m è soggetta all'azione di un vento con velocità costante di 25 km/h. Essendo la densità dell'aria di $1,25 \text{ kg/m}^3$ e il rendimento del gruppo turbina-alternatore del 32%, calcolare la potenza prodotta dalla turbina e la spinta che si scarica sul supporto della turbina.

Analisi Tra una sezione 1 a monte della turbina ed una sezione 2 a valle, l'aria non subisce variazioni di quota né di pressione, per cui può cedere alla turbina solo energia cinetica. Pertanto,

$$\Delta H_T = \frac{V^2}{2g}$$

Se l'energia cinetica dell'aria viene tutta convertita in lavoro, la potenza P_F ceduta dal fluido alla turbina è pari al prodotto dell'energia cinetica dell'unità di peso della corrente d'aria che investe la turbina per il peso dell'aria che transita attraverso la turbina nell'unità di tempo, cioè per la portata in peso. Pertanto,

$$P_F = \rho g Q \Delta H_T = \rho g Q \frac{V^2}{2g} = \rho Q \frac{V^2}{2}$$

La portata Q , pari al prodotto della velocità del vento $V = 25/3,6 = 6,94 \text{ m/s}$ per l'area circolare corrispondente al diametro D della turbina, risulta

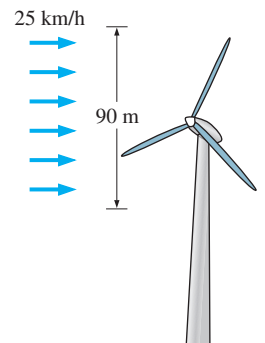
$$Q = V \frac{\pi D^2}{4} = 6,94 \times \frac{\pi \times 90^2}{4} = 44\,200 \text{ m}^3/\text{s}$$

Essendo η_{TA} il rendimento del gruppo turbina-alternatore, per la 5.35, la potenza elettrica prodotta è

$$P_E = \eta_{TA} P_F = \eta_{TA} \rho Q \frac{V^2}{2} = 0,32 \times 1,25 \times 44\,200 \times \frac{6,94^2}{2} = 426 \text{ kW}$$

L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra le sezioni 1 e 2 subito a monte e subito a valle della turbina, essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente, $\Pi_1 = \Pi_2 = 0$ perché la pressione relativa è nulla e $\mathbf{G}$ trascurabile, diviene

$$\Pi_0 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$



per cui la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sulla turbina, uguale e contraria a $\mathbf{\Pi}_0$, è

$$\mathbf{S} = -\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

A valle della turbina la corrente ha solo quella parte di energia cinetica che non viene ceduta alla turbina. Per la 5.30, se η_T è il rendimento della turbina, la potenza che la turbina cede all'alternatore è $P_T = \eta_T P_F$. Ipotizzando che siano trascurabili sia le perdite di carico tra le due sezioni che le perdite meccaniche della turbina, la potenza residua della corrente a valle della turbina è pari alla differenza $P_F - P_T = P_F(1 - \eta_T)$. Se il rendimento dell'alternatore $\eta_A \cong 1$, essendo per la 5.35 $\eta_T = \eta_{TA}/\eta_A$, è $\eta_T \cong \eta_{TA}$. Per cui, in definitiva,

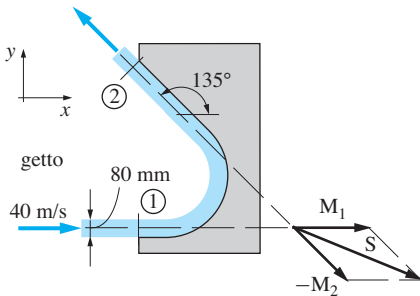
$$\frac{V_2^2}{2g} = P_F - P_T = (1 - \eta_{TA}) \frac{V^2}{2g}$$

da cui

$$V_2 = V \sqrt{1 - \eta_{TA}} = 6,94 \times \sqrt{1 - 0,32} = 5,73 \text{ m/s}$$

e

$$S = M_1 - M_2 = \rho Q(V - V_2) = 1,25 \times 44\,200 \times (6,94 - 5,73) = 67,1 \text{ kN}$$



6.27 Un getto d'acqua orizzontale, del diametro di 80 mm e velocità media di 40 m/s, colpisce una lastra curva che devia orizzontalmente il getto di 135° rispetto alla direzione originaria. Calcolare la spinta sulla lastra.

Analisi L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra le sezioni 1 e 2 del getto, rispettivamente, ai bordi di ingresso e di uscita della parete curva, essendo $\mathbf{\Pi}_0$, $\mathbf{\Pi}_1$ e $\mathbf{\Pi}_2$ le forze che, rispettivamente, la parete, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_0 + \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = \mathbf{0}$$

Essendo $\mathbf{I} = \mathbf{0}$ perché il moto è permanente e $\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{\Pi}_2 = \mathbf{0}$ perché la pressione relativa è nulla in quanto il getto è in atmosfera, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sulla parete curva, uguale e contraria a $\mathbf{\Pi}_0$, è

$$\mathbf{S} = -\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{G} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il vettore $\mathbf{G}$ è verticale. I flussi di quantità di moto sono vettori diretti come le velocità nelle rispettive sezioni. Ambedue hanno lo stesso modulo in quanto lungo il getto, non essendovi variazioni di quota né di pressione, la velocità V , per il teorema di Bernoulli, si mantiene costante. Essendo la densità dell'acqua $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ e $\beta = 1$ per l'uniformità della distribuzione di velocità, si ha

$$M_1 = M_2 = \beta \rho V^2 A = 1\,000 \times 40^2 \times \pi \times 0,080^2 / 4 = 8,04 \text{ kN}$$

La spinta ha, rispettivamente, componenti, modulo e inclinazione rispetto alla direzione x positiva

$$S_x = M_1 - M_2 \cos 135^\circ = 8,04 - 8,04 \cos 135^\circ = 13,7 \text{ kN}$$

$$S_y = -M_2 \sin 135^\circ = -8,04 \sin 135^\circ = -5,68 \text{ kN}$$

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{13,7^2 + 5,68^2} = 14,8 \text{ kN}$$

$$\theta = \arctan \frac{S_y}{S_x} = \arctan \frac{-5,68}{13,7} = -22,5^\circ$$

6.28 Un getto d'acqua orizzontale, del diametro di 50 mm e velocità media di 30 m/s, colpisce una lastra piana che si muove nella stessa direzione del getto con una velocità di 10 m/s. Calcolare la spinta del getto sulla lastra.

Analisi Come nel problema 6.12, se A è l'area del getto, V la sua velocità, V_c la velocità della lastra, V_r la velocità relativa del getto rispetto alla lastra e $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, la spinta che il getto esercita sulla lastra vale

$$S = \rho A V_r^2 = \rho A (V - V_c)^2 = 1000 \times \frac{\pi \times 0,050^2}{4} \times (30 - 10)^2 = 785 \text{ N}$$

6.29 Un getto d'acqua orizzontale, del diametro di 80 mm e velocità media di 40 m/s, colpisce una parete curva che devia orizzontalmente il getto di 180° . Calcolare la spinta sulla parete.

Analisi Come nel problema 6.27, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sulla lastra è

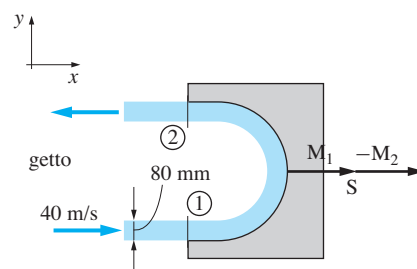
$$\mathbf{S} = \mathbf{G} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Anche in questo caso, il vettore $\mathbf{G}$ è verticale e i flussi di quantità di moto, oltre ad avere lo stesso modulo, sono entrambi orizzontali e hanno verso opposto. Essendo la densità dell'acqua $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $\beta = 1$ per l'uniformità della distribuzione di velocità, si ha

$$M_1 = M_2 = \beta \rho V^2 A = 1000 \times 40^2 \times \pi \times 0,080^2 / 4 = 8,04 \text{ kN}$$

La spinta, pertanto, ha modulo

$$S = M_1 + M_2 = 2 \times 8,04 = 16,1 \text{ kN}$$

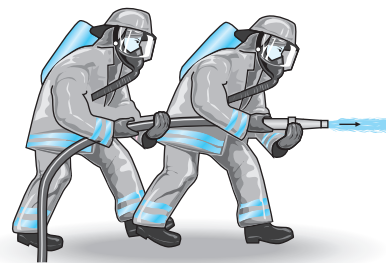


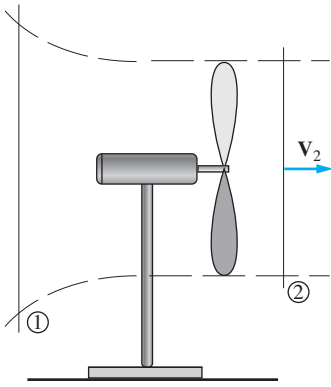
6.30 Due vigili del fuoco stanno combattendo un incendio tenendo un idrante il cui ugello terminale ha un diametro della sezione di sbocco di 20 mm. La portata è di 750 l/min. Calcolare la forza orizzontale che si scarica sulle due persone.

Analisi Ipotizzando che la corrente in ingresso nel volume di controllo abbia direzione verticale, l'unica forza orizzontale che agisce sul volume è il flusso di quantità di moto uscente, in quanto allo sbocco la pressione relativa è nulla. Pertanto, la forza orizzontale S_x che si scarica sui due vigili del fuoco è uguale e contraria al flusso di quantità di moto nella sezione di sbocco. Essendo la densità dell'acqua $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $\beta = 1$ per l'uniformità della distribuzione di velocità, risulta

$$S_x = -\beta \rho \frac{Q^2}{A} = -1000 \times \frac{(0,750/60)^2}{\pi \times 0,020^2 / 4} = -497 \text{ N}$$

ed ha verso opposto alla velocità di sbocco.





6.31 Un ventilatore di 60 cm di diametro sposta $50 \text{ m}^3/\text{min}$ di aria, di densità $1,20 \text{ kg/m}^3$. Calcolare la forza necessaria per tenere fermo il ventilatore e la potenza minima che è necessario fornire al ventilatore. (Ipotizzare che l'aria si avvicini al ventilatore attraverso una sezione molto grande con velocità trascurabile e che fuoriesca con velocità uniformemente distribuita e a pressione atmosferica, attraverso un cilindro immaginario il cui diametro sia uguale al diametro delle pale del ventilatore.)

Analisi La forza $\mathbf{F}$ necessaria per tenere fermo il ventilatore è uguale e opposta alla spinta $\mathbf{S}$ che l'aria esercita su di esso. La spinta può essere calcolata applicando l'equazione globale dell'equilibrio dinamico al volume d'aria compreso tra la sezione 1 subito a monte e la sezione 2 subito a valle del ventilatore. Essendo $\Pi_1 = \Pi_2 = 0$ perché la pressione relativa è nulla, $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente, $\mathbf{G}$ trascurabile e $\mathbf{M}_1 \cong 0$ per l'ipotesi di velocità di arrivo trascurabile, si ha

$$\Pi_0 - \mathbf{M}_2 = 0$$

da cui la spinta $\mathbf{S}$, uguale e opposta alla forza Π_0 che il ventilatore esercita sull'aria, risulta

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = -\mathbf{M}_2$$

Ha, quindi, verso opposto alla direzione del moto e modulo

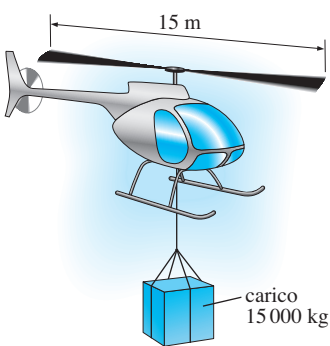
$$S = M_2 = \rho \frac{Q^2}{A} = \rho \frac{Q^2}{\pi D_2^2/4} = 1,20 \times \frac{(50/60)^2}{\pi \times 0,60^2/4} = 2,95 \text{ N}$$

Tra la sezione 1 e la sezione 2 l'aria non subisce variazioni di quota né di pressione. Quindi, l'unica forma di energia che riceve dal ventilatore è quella cinetica, per cui

$$\Delta H_P = \frac{V_2^2}{2g} = \frac{Q^2}{2gA_2^2}$$

Conseguentemente, la potenza minima da fornire al ventilatore è

$$P_F = \rho g Q \frac{Q^2}{2gA_2^2} = \rho \frac{Q^3}{2(\pi D_2^2/4)^2} = 1,20 \times \frac{(50/60)^3}{2 \times (\pi \times 0,60^2/4)^2} = 4,35 \text{ W}$$



6.32 Le pale di un elicottero della massa di 10 000 kg, fermo in aria al livello del mare, ruotano alla velocità di 400 gpm, muovendo una massa d'aria del diametro di 15 m verso il basso con una velocità media proporzionale alla velocità di rotazione delle pale. All'elicottero viene agganciato un carico della massa di 15 000 kg e lentamente si solleva. Calcolare, a elicottero vuoto, la portata della corrente d'aria generata e la potenza richiesta, e, a elicottero carico, la velocità di rotazione delle pale e la potenza richiesta. Si ipotizzi che l'aria, di densità $1,18 \text{ kg/m}^3$, si avvicini alle pale dall'alto con velocità trascurabile e che le pale forzino l'aria attraverso un cilindro immaginario dello stesso diametro delle pale.

Ipotesi 1 Il moto è permanente e l'aria è incompressibile. **2** L'aria si allontana dalle pale a velocità uniforme e a pressione atmosferica.

Analisi A elicottero vuoto e fermo in aria, il suo peso $\mathbf{P}$ è equilibrato dalla spinta $\mathbf{S}$ esercitata su di esso dall'aria. Applicando l'equazione globale dell'equilibrio dinamico al cilindro d'aria compreso tra una sezione 1 molto grande

al di sopra dell'elicottero e una sezione 2 subito sotto l'elica, con diametro uguale a quello dell'elica stessa, essendo $\Pi_1 = \Pi_2 = 0$ perché la pressione relativa è nulla, $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente, $\mathbf{G}$ trascurabile e $\mathbf{M}_1 \cong 0$ per l'ipotesi di velocità di arrivo trascurabile, si ha

$$\Pi_0 - \mathbf{M}_2 = 0$$

La spinta $\mathbf{S}$, uguale e opposta alla forza Π_0 che il ventilatore esercita sull'aria, è

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = -\mathbf{M}_2$$

ed ha, pertanto, modulo

$$S = M_2 = \rho \frac{Q^2}{A_2}$$

Eguagliando il peso P alla spinta, si ha la portata della corrente d'aria a elicottero fermo

$$Q = \sqrt{\frac{PA_2}{\rho}} = \sqrt{\frac{10\,000 \times 9,81 \times \pi \times 15^2/4}{1,18}} = 3\,830 \text{ m}^3/\text{s}$$

Tra la sezione 1 e la sezione 2 l'aria non subisce variazioni di pressione e le variazioni di quota sono trascurabili. Quindi, l'unica forma di energia che riceve dall'elica è quella cinetica, per cui

$$\Delta H_P = \frac{V_2^2}{2g} = \frac{Q^2}{2gA_2^2}$$

La potenza richiesta risulta

$$P_F = \rho g Q \frac{Q^2}{2gA_2^2} = \rho \frac{Q^3}{2(\pi D_2^2/4)^2} = 1,18 \times \frac{3\,830^3}{2 \times (\pi \times 15^2/4)^2} = 1\,063 \text{ kW}$$

A elicottero carico, procedendo come nella condizione di elicottero vuoto, essendo P_c il peso totale, la portata della corrente d'aria è

$$Q = \sqrt{\frac{P_c A_2}{\rho}} = \sqrt{\frac{(10\,000 + 15\,000) \times 9,81 \times \pi \times 15^2/4}{1,18}} = 6\,060 \text{ m}^3/\text{s}$$

La velocità di rotazione delle pale è proporzionale alla velocità V_2 della corrente d'aria nella sezione 2 e, conseguentemente, alla portata. Pertanto, essendo $n = 400$ gpm il numero di giri a elicottero vuoto, il numero di giri a elicottero carico è

$$n_c = n \frac{Q_c}{Q} = 400 \times \frac{6\,060}{3\,830} = 633 \text{ gpm}$$

La potenza è funzione del cubo della portata, per cui

$$P_{Fc} = P_F \left(\frac{Q_c}{Q} \right)^3 = 1\,063 \times \left(\frac{6\,060}{3\,830} \right)^3 = 4\,210 \text{ kW}$$

6.33 Con riferimento al problema precedente, calcolare, nell'ipotesi che l'elicottero si trovi in alta montagna, a 3000 m di quota, dove la densità dell'aria è

di $0,79 \text{ kg/m}^3$, la velocità delle pale perché l'elicottero scarico rimanga fermo, sapendo che al livello del mare essa vale 400 gpm . Calcolare, inoltre, l'aumento percentuale della potenza richiesta a 3000 m , rispetto al corrispondente valore al livello del mare.

Analisi La spinta della corrente d'aria sull'elicottero (vedi problema precedente) ha modulo

$$S = \rho \frac{Q^2}{A_2} = \rho A_2 V_2^2$$

per cui, rimanendo immutati sia il peso dell'elicottero (e, quindi, la spinta S) sia il diametro delle pale (e, quindi, l'area A_2), indicando col pedice m i valori che le grandezze assumono in alta montagna, deve essere

$$\rho V_2^2 = \rho_m V_{2m}^2$$

da cui

$$V_{2m} = V_2 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_m}} = 400 \times \sqrt{\frac{1,18}{0,79}} = 400 \times 1,22 = 489 \text{ gpm}$$

La potenza è data dalla relazione (vedi problema precedente)

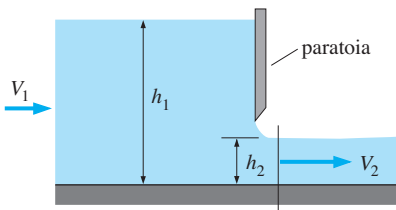
$$P_F = \rho g Q \frac{V_2^2}{2g} = \frac{1}{2} \rho A_2 V_2^3$$

per cui il rapporto tra la potenza P_{Fm} ad alta quota e la potenza P_F richiesta al livello del mare vale

$$\frac{P_{Fm}}{P_F} = \frac{\rho_m}{\rho} \left(\frac{\rho}{\rho_m} \right)^{3/2} = \left(\frac{\rho}{\rho_m} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1,18}{0,79}} = 1,22$$

Alla quota di 3000 m è necessario, pertanto, un aumento di potenza del 22% .

Discussione Sia l'aumento della velocità di rotazione delle pale che l'aumento di potenza richiesta risultano inversamente proporzionali alla radice quadrata della densità dell'aria. Ad alta quota, dove la densità dell'aria è minore, è necessaria una portata maggiore di aria per sostenere l'elicottero e, di conseguenza, una maggiore potenza.



6.34 Una paratoia piana, costituita da una parete piana verticale in grado di scorrere verticalmente, è un dispositivo, usato nelle reti irrigue, che serve a regolare la portata in un canale. Calcolare la spinta che, in condizioni di moto permanente, la corrente esercita sulla paratoia di un canale rettangolare di larghezza B , trascurando gli sforzi tangenziali sulle pareti del canale.

Analisi L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra una sezione 1 a monte della paratoia e una sezione 2 a valle di essa, scelte in modo che in ambedue la corrente si possa ritenere lineare, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, la paratoia, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

$$\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Infatti, il peso $\mathbf{G}$ del liquido è bilanciato dalla forza $\mathbf{\Pi}_f$ che il fondo del canale esercita sul liquido, il termine $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente, le forze $\mathbf{\Pi}_s$ e $\mathbf{\Pi}_d$ esercitate sul liquido, rispettivamente, dalla parete sinistra e dalla parete destra del canale sono, per simmetria, uguali e opposte e, infine, è nulla la spinta della superficie libera sul liquido perché l'aria è a pressione relativa nulla. Pertanto, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sulla paratoia, uguale e contraria a $\mathbf{\Pi}_0$, è

$$\mathbf{S} = -\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_2 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

I flussi di quantità di moto sono vettori diretti come le velocità nelle rispettive sezioni, per cui sono entrambi orizzontali e hanno verso opposto. Le spinte che le due sezioni esercitano sul liquido sono ortogonali alle rispettive sezioni e, quindi, orizzontali e di verso opposto. Conseguentemente, essendo ρ la densità del liquido, Q la portata, h_1 e h_2 le altezze d'acqua nelle due sezioni, V_1 e V_2 le velocità e $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ i coefficienti di ragguglio dei flussi di quantità di moto, la spinta sulla paratoia, nel verso della corrente, ha modulo

$$S = (\Pi_1 + M_1) - (\Pi_2 + M_2) = \frac{1}{2}\rho g B(h_1^2 - h_2^2) + \beta\rho Q(V_1 - V_2)$$

Note le altezze h_1 e h_2 , nell'ipotesi che la perdita di carico tra le due sezioni sia trascurabile, è possibile calcolare la portata. Per il teorema di Bernoulli, essendo la quota piezometrica nelle due sezioni pari alla quota del pelo libero per la linearità della corrente, si ha

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

e, introducendo la portata $Q = V_1 A_1 = V_1 B h_1 = V_2 B h_2$,

$$h_1 - h_2 = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) = \frac{Q^2}{2g B^2} \left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2} \right)$$

da cui

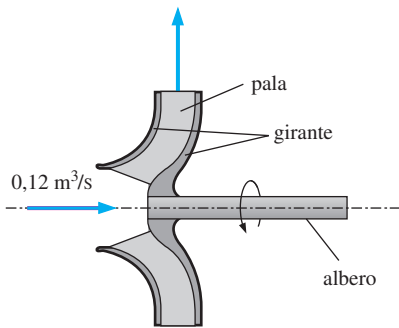
$$Q = B \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{1/h_2^2 - 1/h_1^2}} = B h_2 \sqrt{h_1^2 \frac{2g(h_1 - h_2)}{h_1^2 - h_2^2}} = B h_2 \sqrt{\frac{2g h_1}{1 + h_2/h_1}}$$

Discussione Nella pratica, la portata effluente da una paratoia che lascia aperta sul fondo una luce di altezza a viene calcolata con la formula 13.71

$$Q = \mu B a \sqrt{2gh}$$

nella quale h è l'altezza d'acqua a monte della paratoia e μ è un coefficiente di efflusso che per paratoia verticale e $h/a > 8$ è praticamente uguale a 0,6 e per valori di h/a compresi tra 2 e 8 varia da 0,54 a 0,6 (vedi 13.74). In effetti, introducendo il coefficiente di contrazione C_c , l'altezza della sezione contratta (prima sezione a valle della paratoia in cui la corrente è lineare) è $h_2 = a C_c$ per cui, eguagliando le due espressioni della portata, si ha

$$\mu = \frac{C_c}{\sqrt{1 + \frac{a C_c}{h}}}$$



6.35 In una pompa centrifuga, una portata d'acqua di $0,12 \text{ m}^3/\text{s}$ entra in direzione assiale, con velocità media di 7 m/s , ed esce in direzione radiale, come mostrato in figura. Calcolare la spinta sull'albero.

Analisi L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24 applicata al volume di fluido compreso tra la sezione 1 di ingresso e la sezione 2 di uscita dalla girante, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, la girante, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

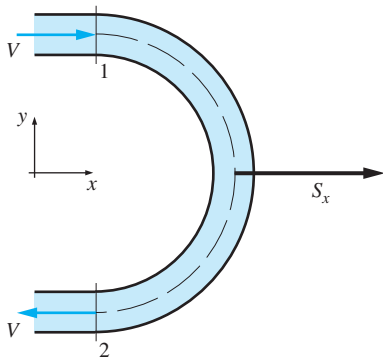
$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\Pi_1 = 0$ perché l'ingresso avviene a pressione atmosferica e $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente, la spinta $\mathbf{S}$ sull'albero, uguale e contraria a Π_0 , risulta

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_2 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il peso $\mathbf{G}$ è verticale e i vettori Π_2 ed $\mathbf{M}_2$ giacciono su un piano verticale. Per cui, proiettando sull'orizzontale nel verso della corrente si ha

$$S_x = M_1 = \rho Q V = 1000 \times 0,12 \times 7 = 840 \text{ N}$$



6.36 Una corrente d'acqua, che percorre una tubazione ad asse orizzontale, del diametro di 200 mm , con una velocità media di 4 m/s , imbecca una curva che devia orizzontalmente la corrente di 180° . Calcolare la componente orizzontale della spinta sulla curva, essendo la pressione e il coefficiente di ragguglio dei flussi di quantità di moto nella sezione di ingresso 1 e in quella di uscita 2 dalla curva, rispettivamente, $p_1 = 78,5 \text{ kPa}$, $\beta_1 = 1,01$ e $p_2 = 72,3 \text{ kPa}$, $\beta_2 = 1,03$.

Analisi L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra la sezione di ingresso 1 della curva e quella di uscita 2, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, la parete della curva, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sulla curva, uguale e contraria a Π_0 , è

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il peso $\mathbf{G}$ è verticale. I flussi di quantità di moto $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ sono vettori diretti come le velocità nelle rispettive sezioni, per cui sono ambedue orizzontali. Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, i flussi di quantità di moto hanno, rispettivamente, modulo

$$M_1 = \beta_1 \rho A V^2 = 1,01 \times 1000 \times \pi \times 0,200^2 / 4 \times 4^2 = 508 \text{ N}$$

$$M_2 = \beta_2 \rho A V^2 = 1,03 \times 1000 \times \pi \times 0,200^2 / 4 \times 4^2 = 518 \text{ N}$$

La spinta Π_1 ha direzione orizzontale in quanto ortogonale alle sezione 1 e modulo pari al prodotto della pressione p_1 nel baricentro della sezione per l'area A_1 della sezione, per cui

$$\Pi_1 = p_1 A = 78\,500 \times \frac{\pi \times 0,200^2}{4} = 2,47 \text{ kN}$$

Per il teorema di Bernoulli applicato tra le sezioni 1 e 2, essendo $z_2 = z_1$ e $V_2 = V_1 = V$, dovrebbe essere $p_2 = p_1$. In realtà, per le perdite di carico lungo il percorso tra le due sezioni (vedi cap. 8), la pressione deve diminuire nel senso del moto e, pertanto, si ha $p_2 < p_1$. La spinta Π_2 è ortogonale alla sezione 2 e ha modulo

$$\Pi_2 = p_2 A_2 = 72\,300 \times \frac{\pi \times 0,200^2}{4} = 2,27 \text{ kN}$$

Rispetto al sistema di riferimento di figura ed assumendo l'asse z verticale verso l'alto, la spinta ha componenti

$$S_x = \Pi_1 + M_1 + \Pi_2 + M_2 = 2\,470 + 508 + 2\,270 + 518 = 5,77 \text{ kN}$$

$$S_y = 0 \text{ kN}$$

$$S_z = -G$$

La spinta, pertanto, ha componente orizzontale

$$S_O = S_x = 5,77 \text{ kN}$$

diretta come l'asse x .

6.37 Una corrente d'acqua, che percorre una tubazione ad asse orizzontale, del diametro di 200 mm, con una velocità media di 5 m/s, imbocca una curva a sezione decrescente che devia orizzontalmente la corrente di 180° prima di immettersi in una tubazione del diametro di 150 mm. Calcolare la componente orizzontale della spinta sulla curva, essendo la pressione e il coefficiente di raggiuglio dei flussi di quantità di moto nella sezione di ingresso 1 e in quella di uscita 2 dalla curva, rispettivamente, $p_1 = 88,7 \text{ kPa}$, $\beta_1 = 1,02$ e $p_2 = 51,4 \text{ kPa}$, $\beta_2 = 1,04$.

Analisi Come nel problema precedente, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sulla curva è

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il peso $\mathbf{G}$ è verticale. I flussi di quantità di moto $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ sono vettori diretti come le velocità nelle rispettive sezioni, per cui sono ambedue orizzontali. Per l'equazione di continuità si ha $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$, da cui

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 V_1 = \left(\frac{0,200}{0,150}\right)^2 \times 5 = 8,89 \text{ m/s}$$

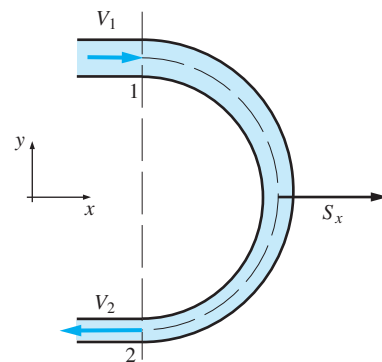
Essendo $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, i flussi di quantità di moto hanno, rispettivamente, modulo

$$M_1 = \beta_1 \rho A_1 V_1^2 = 1,02 \times 1\,000 \times \pi \times 0,200^2 / 4 \times 5^2 = 801 \text{ N}$$

$$M_2 = \beta_2 \rho A_2 V_2^2 = 1,04 \times 1\,000 \times \pi \times 0,150^2 / 4 \times 8,89^2 = 1\,450 \text{ N}$$

La spinta Π_1 ha direzione orizzontale in quanto ortogonale alla sezione 1 e modulo pari al prodotto della pressione p_1 nel baricentro della sezione per l'area A_1 della sezione, per cui

$$\Pi_1 = p_1 A_1 = 88\,700 \times \frac{\pi \times 0,200^2}{4} = 2,79 \text{ kN}$$



Per il teorema di Bernoulli tra le sezioni 1 e 2, essendo $z_1 = z_2$, è

$$p_2 = p_1 + \rho \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = 88\,700 + 1\,000 \times \frac{5^2 - 8,89^2}{2} = 61\,700 \text{ Pa}$$

In realtà, per effetto delle perdite di carico (vedi cap. 8), si ha un'ulteriore diminuzione di pressione e, pertanto, $p_2 = 51,4 \text{ kPa}$. La spinta Π_2 è ortogonale alla sezione 2 e ha modulo

$$\Pi_2 = p_2 A_2 = 51\,400 \times \frac{\pi \times 0,150^2}{4} = 908 \text{ N}$$

Rispetto al sistema di riferimento di figura ed assumendo l'asse z verticale verso l'alto, la spinta ha componenti

$$S_x = \Pi_1 + M_1 + \Pi_2 + M_2 = 2\,790 + 801 + 908 + 1\,450 = 5,95 \text{ kN}$$

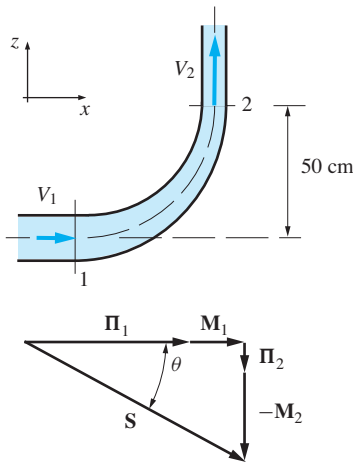
$$S_y = 0 \text{ kN}$$

$$S_z = -G$$

La spinta, pertanto, ha componente orizzontale

$$S_O = S_x = 5,95 \text{ kN}$$

diretta come l'asse x .



6.38 Una corrente d'acqua, che percorre una tubazione ad asse orizzontale del diametro di 250 mm, alla pressione di 300 kPa, con una velocità di 8 m/s, imbocca una curva a 90° che si collega ad una tubazione ad asse verticale con diametro di 150 mm. Il baricentro della sezione di ingresso nella curva è ad una quota di 50 cm rispetto alla sezione di uscita. Calcolare la spinta sulla curva, trascurando il peso dell'acqua ed essendo il coefficiente di ragguaglio dei flussi di quantità di moto pari a 1,04.

Analisi L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra la sezione di ingresso 1 della curva e quella di uscita 2, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, la parete della curva, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sul gomito, uguale e contraria a Π_0 , è

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il peso $\mathbf{G}$ è trascurabile. I flussi di quantità di moto $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ sono vettori diretti come le velocità nelle rispettive sezioni. Per l'equazione di continuità si ha $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$, da cui

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 V_1 = \left(\frac{0,250}{0,150} \right)^2 \times 8 = 22,2 \text{ m/s}$$

Essendo $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, i flussi di quantità di moto hanno, rispettivamente, modulo

$$M_1 = \beta_1 \rho A_1 V_1^2 = 1,04 \times 1\,000 \times \pi \times 0,250^2 / 4 \times 8^2 = 3,27 \text{ kN}$$

$$M_2 = \beta_2 \rho A_2 V_2^2 = 1,04 \times 1000 \times \pi \times 0,150^2 / 4 \times 22,2^2 = 9,06 \text{ kN}$$

La spinta Π_1 ha direzione orizzontale in quanto ortogonale alle sezione 1 e modulo pari al prodotto della pressione p_1 nel baricentro della sezione per l'area A_1 della sezione, per cui

$$\Pi_1 = p_1 A_1 = 300\,000 \times \frac{\pi \times 0,250^2}{4} = 14,7 \text{ kN}$$

Per il teorema di Bernoulli tra le sezioni 1 e 2, essendo $z_2 - z_1 = 0,5 \text{ m}$, è

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \rho g (z_1 - z_2) + \rho \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = \\ &= 300\,000 + 1000 \times 9,81 \times (-0,5) + 1000 \times \frac{8^2 - 22,2^2}{2} = 80,7 \text{ kPa} \end{aligned}$$

per cui la spinta Π_2 , che è ortogonale alle sezione 2, ha modulo

$$\Pi_2 = p_2 A_2 = 80\,700 \times \frac{\pi \times 0,150^2}{4} = 1,43 \text{ kN}$$

Rispetto al sistema di riferimento di figura, la spinta ha componenti

$$S_x = \Pi_1 + M_1 = 14,7 + 3,27 = 18,0 \text{ kN}$$

$$S_z = -\Pi_2 - M_2 = -1,43 - 9,06 = -10,5 \text{ kN}$$

modulo

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_z^2} = \sqrt{18,0^2 + 10,5^2} = 20,8 \text{ kN}$$

ed è inclinata, rispetto alla direzione x positiva, di un angolo

$$\theta = \arctan \frac{S_z}{S_x} = \arctan \frac{-10,5}{18,0} = -30,3^\circ$$

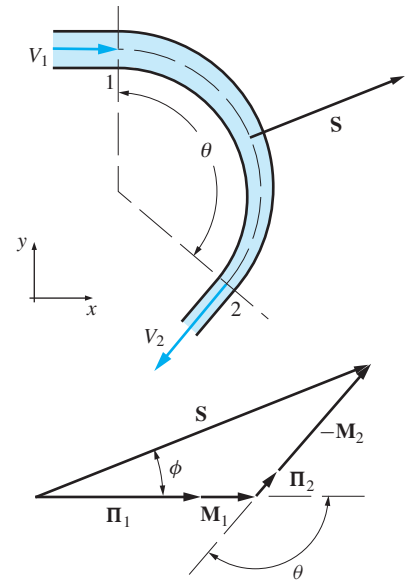
6.39 Una corrente d'acqua, che percorre una tubazione ad asse orizzontale, del diametro di 300 mm, con una velocità media di 6 m/s, imbecca una curva a sezione decrescente che devia orizzontalmente la corrente di un angolo $\theta = 135^\circ$ prima di immettersi in una tubazione del diametro di 200 mm. Calcolare la componente orizzontale della spinta sulla curva, essendo la pressione e il coefficiente di ragguglio dei flussi di quantità di moto nella sezione di ingresso 1 e in quella di uscita 2 dalla curva, rispettivamente, $p_1 = 96,4 \text{ kPa}$, $\beta_1 = 1,01$ e $p_2 = 18,3 \text{ kPa}$, $\beta_2 = 1,03$. Per quale valore di θ si ha la massima spinta?

Analisi L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra la sezione di ingresso 1 della curva e quella di uscita 2, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, la parete della curva, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sulla curva, uguale e contraria a Π_0 , è

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$



Il peso $\mathbf{G}$ è verticale. I flussi di quantità di moto $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ sono vettori diretti come le velocità nelle rispettive sezioni, per cui sono ambedue orizzontali. Per l'equazione di continuità si ha $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$, da cui

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 V_1 = \left(\frac{0,300}{0,200} \right)^2 \times 6 = 13,5 \text{ m/s}$$

Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, i flussi di quantità di moto hanno, rispettivamente, modulo

$$M_1 = \beta_1 \rho A_1 V_1^2 = 1,01 \times 1000 \times \pi \times 0,300^2 / 4 \times 6^2 = 1,78 \text{ kN}$$

$$M_2 = \beta_2 \rho A_2 V_2^2 = 1,03 \times 1000 \times \pi \times 0,200^2 / 4 \times 13,5^2 = 5,90 \text{ kN}$$

La spinta Π_1 ha direzione orizzontale in quanto ortogonale alla sezione 1 e modulo pari al prodotto della pressione p_1 nel baricentro della sezione per l'area A_1 della sezione, per cui

$$\Pi_1 = p_1 A_1 = 96400 \times \frac{\pi \times 0,300^2}{4} = 6,81 \text{ kN}$$

Per il teorema di Bernoulli tra le sezioni 1 e 2, essendo $z_1 = z_2$, è

$$p_2 = p_1 + \rho \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = 96400 + 1000 \times \frac{6^2 - 13,5^2}{2} = 23300 \text{ Pa}$$

In realtà, per effetto delle perdite di carico (vedi cap. 8), si ha un'ulteriore diminuzione di pressione e, pertanto, $p_2 = 18,3 \text{ kPa}$. La spinta Π_2 è ortogonale alla sezione 2 e ha modulo

$$\Pi_2 = p_2 A_2 = 18300 \times \frac{\pi \times 0,200^2}{4} = 575 \text{ N}$$

Rispetto al sistema di riferimento di figura ed assumendo l'asse z verticale verso l'alto, la spinta ha componenti

$$\begin{aligned} S_x &= \Pi_1 + M_1 - (\Pi_2 + M_2) \cos \theta = \\ &= 6810 + 1780 - (575 + 5900) \times \cos 135^\circ = 13,2 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$S_y = (\Pi_2 + M_2) \sin \theta = (575 + 5900) \times \sin 135^\circ = 4,58 \text{ kN}$$

$$S_z = -G$$

La spinta, pertanto, ha componente orizzontale

$$S_O = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{13,2^2 + 4,58^2} = 13,9 \text{ kN}$$

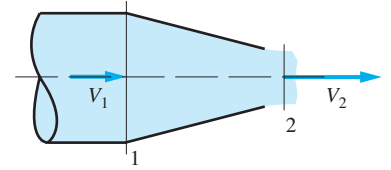
inclinata, rispetto alla direzione x positiva, di un angolo

$$\phi = \arctan \frac{S_y}{S_x} = \arctan \frac{4,58}{13,2} = 19,2^\circ$$

Per $\theta > 90^\circ$ si ha $\cos \theta < 0$ per cui nell'espressione di S_x i valori di $\Pi + M$ relativi alla sezione 2 si sommano a quelli relativi alla sezione 1. Come si può facilmente desumere anche dal poligono delle forze riportato in figura, al

crescere di θ aumenta S_x e diminuisce S_y . Il valore massimo della spinta si ha quando il valore assoluto di $\cos \theta$ è massimo, cioè per $\theta = 180^\circ$,

6.40 Una corrente d'acqua percorre, con una velocità media di 4 m/s, una tubazione ad asse orizzontale, del diametro di 100 mm, che termina con un ugello la cui sezione terminale ha un diametro di 50 mm. La corrente sbocca nell'atmosfera. Calcolare la componente orizzontale della spinta sull'ugello, assumendo per il coefficiente di ragguglio del flusso di quantità di moto il valore $\beta = 1,02$.



Analisi L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra la sezione di ingresso 1 dell'ugello e la sezione contratta 2, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, la parete dell'ugello, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e $\Pi_2 = 0$ perché nella sezione contratta la pressione è ovunque pari a quella al contorno e, pertanto, nulla, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sull'ugello, uguale e contraria a Π_0 , è

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_1 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il peso $\mathbf{G}$ è verticale. I flussi di quantità di moto $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ sono vettori diretti come le velocità nelle rispettive sezioni, per cui sono ambedue orizzontali. Per l'equazione di continuità si ha $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ e introducendo un coefficiente di contrazione $C_c = A_2/A_u$ come rapporto tra l'area A_2 della sezione contratta e l'area A_u della sezione terminale dell'ugello, si ha

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \frac{A_1}{C_c A_u} V_1 = \frac{D_1^2}{C_c D_u^2} V_1$$

Ponendo $C_c = 0,85$ risulta

$$V_2 = \frac{0,100^2}{0,85 \times 0,050^2} \times 4 = 18,8 \text{ m/s}$$

Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, i flussi di quantità di moto hanno, rispettivamente, modulo

$$M_1 = \beta_1 \rho A_1 V_1^2 = 1,02 \times 1000 \times \pi \times 0,100^2/4 \times 4^2 = 128 \text{ N}$$

$$M_2 = \beta_2 \rho A_2 V_2^2 = 1,02 \times 1000 \times 0,85 \times \pi \times 0,050^2/4 \times 18,8^2 = 603 \text{ N}$$

La spinta Π_1 ha direzione orizzontale in quanto ortogonale alla sezione 1 e modulo pari al prodotto della pressione p_1 nel baricentro della sezione per l'area A_1 della sezione. Per il teorema di Bernoulli tra le sezioni 1 e 2, essendo $z_1 = z_2$, è

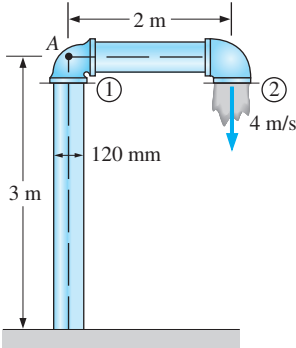
$$p_1 = p_2 + \rho \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = 0 + 1000 \times \frac{18,8^2 - 4^2}{2} = 169 \text{ kPa}$$

per cui

$$\Pi_1 = p_1 A_1 = 169000 \times \frac{\pi \times 0,100^2}{4} = 1,33 \text{ kN}$$

Pertanto, la componente orizzontale della spinta sull'ugello è diretta come il getto e vale

$$S_O = \Pi_1 + M_1 - M_2 = 1330 + 128 - 603 = 855 \text{ N}$$



6.41 Una tubazione del diametro di 120 mm è costituita da un tratto verticale lungo 3 m, seguito da un tratto orizzontale lungo 2 m e da un gomito a 90° da cui defluisce verticalmente verso il basso, come mostrato in figura, una portata d'acqua alla velocità di 4 m/s. Essendo la massa della tubazione, piena d'acqua, di 15 kg per metro di lunghezza, calcolare il momento che agisce sul collegamento tra il tratto verticale e quello orizzontale (punto A). Cosa cambierebbe se lo sbocco fosse rivolto verso l'alto anziché verso il basso?

Analisi Sul tratto di tubazione a valle del punto A agisce una forza $\mathbf{F}$, risultante del peso proprio $\mathbf{P}$ della tubazione e della spinta dinamica $\mathbf{S}$ della corrente che vi defluisce. L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24 applicata al volume di fluido compreso tra la sezione orizzontale 1 all'estremità iniziale del primo gomito e la sezione 2 di sbocco, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, la tubazione, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e $\Pi_2 = 0$ perché lo sbocco è in atmosfera, la spinta $\mathbf{S}$, uguale e contraria a Π_0 , risulta

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_1 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

La forza che agisce sulla tubazione a valle della sezione 1 è, pertanto,

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{S} = \mathbf{P} + \mathbf{G} + \Pi_1 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il peso $\mathbf{P}$ della tubazione e il peso $\mathbf{G}$ del liquido sono applicati nel baricentro del tratto di tubazione e diretti verso il basso. La spinta $\Pi_1 \cong 0$ perché, a meno delle piccole perdite di carico tra le due sezioni, essendo esse alla stessa quota e avendo la stessa velocità, per il teorema di Bernoulli è $p_1 = p_2 = 0$. Essa, comunque, non darebbe in ogni caso alcun contributo al momento rispetto ad A perché essendo applicata nel baricentro della sezione avrebbe braccio nullo. Essendo i flussi di quantità di moto diretti come i vettori velocità, quest'ultima considerazione vale anche per M_1 . Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua e $D = 0,120 \text{ m}$ il diametro della tubazione, il flusso di quantità di moto uscente ha modulo

$$M_2 = \rho Q V_2 = \rho \frac{\pi D^2}{4} V_2^2 = 1000 \times \frac{\pi \times 0,120^2}{4} \times 4^2 = 181 \text{ N}$$

Il peso complessivo, essendo $L = 2 \text{ m}$ la lunghezza del tratto di tubazione ed $m = 15 \text{ kg}$ la massa complessiva per metro di lunghezza, vale

$$P + G = mgL = 15 \times 9,81 \times 2 = 294 \text{ N}$$

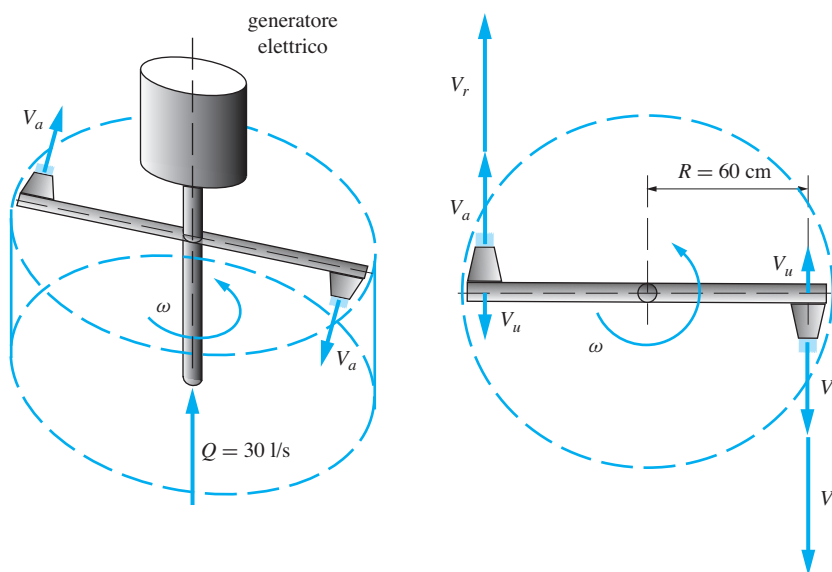
Pertanto, essendo $b_1 = 1 \text{ m}$ il braccio del peso e $b_2 = 2 \text{ m}$ il braccio di $-\mathbf{M}_2$, il momento di $\mathbf{F}$ rispetto al punto A, assumendo come positivo il verso orario, vale

$$\mathcal{M} = (P + G)b_1 - M_2b_2 = 294 \times 1 - 181 \times 2 = -68 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Se lo sbocco fosse rivolto verso l'alto anziché verso il basso, cambierebbe soltanto il verso di $-\mathbf{M}_2$ per cui il valore del momento rispetto al punto A sarebbe

$$\mathcal{M}_a = (P + G)b_1 + M_2b_2 = 294 \times 1 + 181 \times 2 = 656 \text{ N} \cdot \text{m}$$

6.42 In un irrigatore da giardino una portata di 30 l/s entra dal basso attraverso l'asse di rotazione e fuoriesce da due ugelli, identici, in direzione tangenziale, facendo ruotare l'irrigatore nel piano orizzontale alla velocità di 250 gpm. Ciascun ugello, del diametro di 25 mm, dista di 60 cm dall'asse di rotazione. Calcolare la potenza elettrica che si potrebbe produrre collegando un generatore alla testata rotante.



Analisi Rispetto ad un sistema di riferimento assoluto il moto è periodico in quanto le sue caratteristiche si ripetono identicamente ad ogni giro in ogni punto. Assumendo come volume di controllo, fisso nello spazio, un cilindro coassiale con l'irrigatore, di raggio tale da intersecare i getti e base attraversata dalla corrente di alimentazione, per l'equazione della quantità di moto 6.23, la risultante $\mathbf{F}$ delle forze agenti su tale volume è uguale alla differenza tra il flusso di quantità di moto uscente $\mathbf{M}_2$ e quello entrante $\mathbf{M}_1$

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1$$

Poiché il fluido entra verticalmente dal basso attraverso l'asse di rotazione, la quantità di moto entrante non dà luogo ad alcun momento rispetto all'asse. Invece, i getti uscenti orizzontalmente dagli ugelli, attraversando tangenzialmente la superficie di controllo, danno luogo ad una coppia di braccio $2R$ e modulo M_2 . Pertanto, il volume di controllo è sottoposto ad un momento con verso orario

$$\mathcal{M} = 2RM_2$$

Il calcolo di M_2 va effettuato nel sistema di riferimento fisso del volume di controllo, come prodotto della portata in massa $\rho Q/2$ uscente dal volume di controllo attraverso ciascuno dei due ugelli per la velocità di efflusso V_a assoluta. Infatti, per la conservazione della massa, essendo i due ugelli identici, la portata effluente da ciascuno di essi è pari alla metà della portata Q che alimenta l'irrigatore. Essendo A_s l'area della sezione di sbocco dell'ugello, la velocità di efflusso in un sistema di riferimento rotante in senso antiorario solidalmente con l'irrigatore è

$$V_r = \frac{Q}{2A_s} = \frac{0,030}{2 \times \pi \times 0,025^2/4} = 30,6 \text{ m/s}$$

La velocità tangenziale dell'ugello, essendo $n = 250$ il numero di giri al minuto dell'irrigatore e $\omega = 2\pi n/60$ la sua velocità angolare, è

$$V_u = \omega R = \frac{2\pi n}{60} R = \frac{2 \times \pi \times 250}{60} \times 0,60 = 15,7 \text{ m/s}$$

La velocità di efflusso V_a nel sistema di riferimento fisso è diretta in senso opposto alla velocità tangenziale dell'ugello, per cui la velocità relativa è

$$V_r = V_a + V_u$$

Conseguentemente, la velocità assoluta vale

$$V_a = V_r - V_u = 30,6 - 15,7 = 14,9 \text{ m/s}$$

Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua e $\beta = 1$ il coefficiente di ragguglio del flusso di quantità di moto, il momento, avente verso orario, sul volume di controllo è

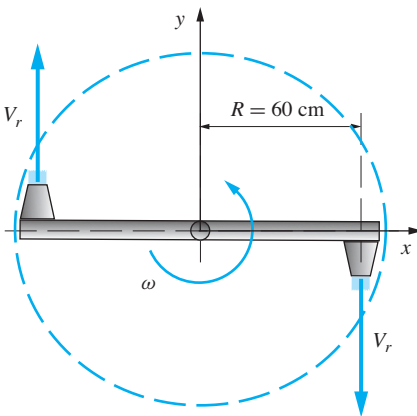
$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= 2RM_2 = 2R\beta\rho \frac{Q}{2} V_a = R\rho Q V_a = \\ &= 0,60 \times 1000 \times 0,030 \times 14,9 = 268 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Il momento così calcolato è esercitato dall'albero sul volume di controllo e quindi sull'irrigatore. Conseguentemente, l'irrigatore esercita sull'albero un momento antiorario che, collegando un generatore alla testata rotante, potrebbe produrre, per la 5.85, una potenza elettrica

$$P_F = \omega \mathcal{M} = \frac{2\pi n}{60} \mathcal{M} = \frac{2 \times \pi \times 250}{60} \times 268 = 7,01 \text{ kW}$$

In alternativa all'approccio precedente, si scelga un sistema di riferimento solidale con l'irrigatore, in rotazione con velocità angolare ω , avente origine sull'asse di rotazione dell'irrigatore, asse x orizzontale diretto radialmente con verso positivo verso l'esterno, asse y tangenziale e asse z verticale, positivo verso l'alto. Assumendo come volume di controllo il volume di fluido all'interno dell'irrigatore, esso risulta delimitato da una sezione orizzontale di alimentazione, dalle due sezioni di sbocco e dalla parete dell'irrigatore. Applicando l'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24 a tale volume di fluido, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, la parete, la sezione di alimentazione e le sezioni di sbocco esercitano sul liquido ed $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ i flussi di quantità di moto entranti e uscenti, si ha

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$



Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e $\Pi_2 = 0$ perché lo sbocco è in atmosfera, la spinta $\mathbf{S}$ sull'irrigatore, uguale e contraria a Π_0 , risulta

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_1 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il vettore $\mathbf{G}$, risultante delle forze di massa, essendo $\mathbf{a}_R$ l'accelerazione nel sistema di riferimento rotante solidalmente con l'irrigatore, è

$$\mathbf{G} = \int_W \rho \mathbf{a}_R dW$$

Essendo il sistema prescelto un sistema non inerziale, sul fluido agisce un sistema di forze apparenti costituito dalla forza di trascinamento e dalla forza di Coriolis. Infatti, l'accelerazione $\mathbf{a}_I$ nel sistema inerziale è la somma dell'accelerazione $\mathbf{a}_R$ nel sistema non inerziale, dell'accelerazione di trascinamento $\mathbf{a}_T$ e dell'accelerazione di Coriolis $\mathbf{a}_C$

$$\mathbf{a}_I = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_C$$

L'accelerazione di trascinamento, cioè l'accelerazione di un punto fermo rispetto al sistema mobile, è la somma dell'accelerazione di traslazione del sistema mobile, dell'accelerazione tangenziale e dell'accelerazione centripeta

$$\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_0 + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

per cui, essendo $\mathbf{v}$ la velocità in un punto a distanza $\mathbf{r}$ dal centro di rotazione, si ha

$$\mathbf{a}_I = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_0 + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

In un sistema rotante a velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$, se l'origine e l'asse z del riferimento mobile coincidono con quelli del riferimento fisso, si annullano i termini dell'accelerazione di traslazione del sistema mobile e dell'accelerazione tangenziale, per cui l'accelerazione $\mathbf{a}_I$ nel sistema inerziale è

$$\mathbf{a}_I = \mathbf{a}_R + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

Pertanto, nel sistema rotante con l'irrigatore, il risultante delle forze di massa, essendo $\mathbf{a}_I = \mathbf{g}$, è

$$\mathbf{G} = \int_W \rho [\mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] dW$$

I vettori Π_1 e $\mathbf{M}_1$ sono verticali e hanno retta d'azione coincidente con l'asse di rotazione. Anche il vettore accelerazione di gravità $\mathbf{g}$ è verticale, mentre l'accelerazione centrifuga è diretta radialmente ed ha, quindi, momento nullo rispetto all'asse di rotazione. Pertanto, le uniche forze che generano un momento sull'irrigatore sono la componente di $\mathbf{G}$ dovuta all'accelerazione di Coriolis e il vettore $-\mathbf{M}_2$, che è somma di due vettori uguali e contrari ai flussi di quantità di moto uscenti attraverso le due sezioni di sbocco. La componente del vettore $\mathbf{G}$ dovuta all'accelerazione di Coriolis

$$\mathbf{G}_C = - \int_W \rho (2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) dW$$

dà luogo ad un momento

$$\mathbf{M}_C = - \int_W [\mathbf{r} \times \rho (2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})] dW = -2\rho \int_W [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})] dW$$

Essendo $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i}$, si ha $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \omega v_x \mathbf{j}$ e

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times (\omega v_x \mathbf{j}) = r \mathbf{i} \times (\omega v_x \mathbf{j}) = \omega v_x r \mathbf{k}$$

per cui

$$\mathbf{M}_C = -2\rho \int_W \omega v_x r \mathbf{k} dW$$

Essendo A l'area della sezione trasversale del braccio, la portata Q_b che attraversa ciascun braccio, assumendo per semplicità che la velocità sia distribuita uniformemente lungo la sezione, è

$$Q_b = \frac{Q}{2} = \int_A v_x dA = v_x A$$

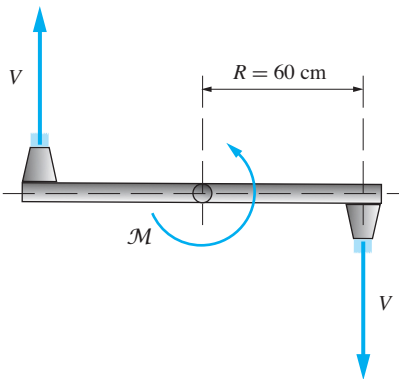
Esprimendo l'elementino di volume infinitesimo come $dW = A dr$, ciascun braccio dà luogo ad un momento orario (in quanto la sua direzione è quella di $-\mathbf{k}$) di modulo

$$\mathcal{M}_C = 2\rho \int_0^R \omega v_x A r dr = 2\rho \omega v_x A \int_0^R r dr = 2\rho \omega \frac{Q}{2} \frac{R^2}{2} = \rho \omega \frac{Q}{2} R^2$$

Il vettore $-\mathbf{M}_2$ è una coppia di braccio $2R$ e modulo M_2 che dà luogo ad un momento antiorario. Il calcolo di M_2 va effettuato nel sistema di riferimento solidale con l'irrigatore, come prodotto della portata in massa $\rho Q/2$ uscente attraverso ciascuno dei due ugelli per la velocità di efflusso V_r . Essendo V_u la velocità tangenziale dell'ugello e V_a la velocità di efflusso rispetto ad un sistema di riferimento assoluto, il momento complessivo $\mathcal{M}$ sull'irrigatore ha, quindi, verso antiorario e vale

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= 2R\rho \frac{Q}{2} V_r - 2\rho \omega \frac{Q}{2} R^2 = \\ &= R\rho Q(V_r - \omega R) = R\rho Q(V_r - V_u) = R\rho Q V_a \end{aligned}$$

espressione coincidente con quella ottenuta sopra.



6.43 Con riferimento al problema precedente, calcolare il momento che agisce sul sostegno nel caso in cui l'irrigatore, per qualche motivo, si blocchi.

Analisi Assumendo come volume di controllo il volume di fluido all'interno dell'irrigatore, delimitato da una sezione orizzontale di alimentazione, dalle due sezioni di sbocco e dalla parete dell'irrigatore, l'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, la parete, la sezione di alimentazione e le sezioni di sbocco esercitano sul liquido ed $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ i flussi di quantità di moto entranti e uscenti, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e $\Pi_2 = 0$ perché lo sbocco è in atmosfera, la spinta $\mathbf{S}$ sull'irrigatore, uguale e contraria a Π_0 , risulta

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_1 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

I vettori $\mathbf{G}$, Π_1 e $\mathbf{M}_1$ sono verticali e hanno retta d'azione coincidente con l'asse di rotazione. Pertanto, le uniche forze che generano un momento sull'irrigatore sono i vettori $-\mathbf{M}_2$ che sono uguali e contrari ai flussi di quantità

di moto uscenti attraverso le due sezioni di sbocco. Questi due vettori hanno verso opposto a quello delle rispettive velocità di efflusso e modulo uguale. Sull'irrigatore agisce, quindi, una coppia di braccio $2R$ e modulo M_2 , che tende a farlo ruotare in direzione contraria a quella della velocità di efflusso, cioè un momento antiorario

$$\mathcal{M} = 2RM_2$$

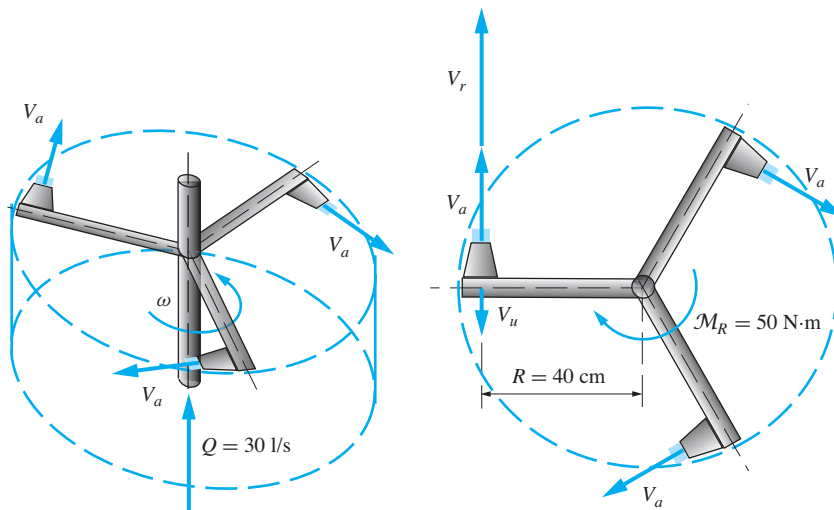
essendo M_2 il modulo del flusso di quantità di moto uscente dal volume di controllo attraverso ciascuno dei due ugelli. Per la conservazione della massa, essendo i due ugelli identici, la portata effluente da ciascuno di essi è pari alla metà della portata Q che alimenta l'irrigatore. Pertanto, essendo A l'area della sezione di sbocco dell'ugello, la velocità di efflusso è

$$V = \frac{Q}{2A} = \frac{0,030}{2 \times \pi \times 0,025^2/4} = 30,6 \text{ m/s}$$

Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua e $\beta = 1$ il coefficiente di ragguglio del flusso di quantità di moto, il momento che agisce sull'irrigatore con verso antiorario è

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= 2RM_2 = 2R\beta\rho \frac{Q}{2} V = R\rho QV = \\ &= 0,60 \times 1000 \times 0,030 \times 30,6 = 551 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

6.44 In un irrigatore da giardino una portata di 30 l/s entra dal basso attraverso l'asse di rotazione e fuoriesce da tre ugelli, identici, in direzione tangenziale, facendo ruotare l'irrigatore nel piano orizzontale. Ciascun ugello, del diametro di 25 mm, dista di 40 cm dall'asse di rotazione. In tali condizioni, sull'irrigatore agisce un momento di 50 N·m, dovuto all'attrito. Calcolare la velocità di rotazione dell'irrigatore.



Analisi Rispetto ad un sistema di riferimento assoluto il moto è periodico in quanto le sue caratteristiche si ripetono identicamente ad ogni giro in ogni

punto. Assumendo come volume di controllo, fisso nello spazio, un cilindro coassiale con l'irrigatore, di raggio tale da intersecare i getti e base attraversata dalla corrente di alimentazione, per l'equazione della quantità di moto 6.23, la risultante $\mathbf{F}$ delle forze agenti su tale volume è uguale alla differenza tra il flusso di quantità di moto uscente $\mathbf{M}_2$ e quello entrante $\mathbf{M}_1$

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1$$

Poiché il fluido entra verticalmente dal basso attraverso l'asse di rotazione, la quantità di moto entrante non dà luogo ad alcun momento rispetto all'asse. Invece, i getti uscenti orizzontalmente dagli ugelli, attraversando tangenzialmente la superficie di controllo, danno luogo ad un momento di verso orario

$$\mathcal{M} = 3RM_2$$

essendo M_2 il modulo del flusso di quantità di moto uscente dal volume di controllo attraverso ciascuno dei tre ugelli. Il calcolo di M_2 va effettuato nel sistema di riferimento fisso del volume di controllo, come prodotto della portata in massa $\rho Q/3$ uscente dal volume di controllo attraverso ciascuno dei tre ugelli per la velocità di efflusso V_a assoluta. Infatti, per la conservazione della massa, essendo i tre ugelli identici, la portata effluente da ciascuno di essi è pari a un terzo della portata Q che alimenta l'irrigatore. Il momento così calcolato è esercitato dall'albero sul volume di controllo e quindi sull'irrigatore. Esso coincide con il momento resistente $\mathcal{M}_R$. Pertanto, essendo il coefficiente di ragguaglio del flusso di quantità di moto $\beta = 1$, si ha

$$\mathcal{M} = 3RM_2 = 3R\beta\rho \frac{Q}{3} V_a = R\rho Q V_a = \mathcal{M}_R$$

da cui

$$V_a = \frac{\mathcal{M}_R}{R\rho Q}$$

Essendo A l'area della sezione di sbocco dell'ugello, la velocità di efflusso in un sistema di riferimento rotante in senso antiorario solidalmente con l'irrigatore è

$$V_r = \frac{Q}{3A}$$

mentre, se ω è la velocità angolare assunta dall'irrigatore, la velocità tangenziale dell'ugello è

$$V_u = \omega R$$

La velocità di efflusso V_a nel sistema di riferimento fisso è diretta in senso opposto alla velocità tangenziale dell'ugello, per cui la velocità relativa è

$$V_r = V_a + V_u$$

e, dunque,

$$V_a = V_r - V_u$$

Introducendo le espressioni precedenti, si ha

$$\frac{\mathcal{M}_R}{R\rho Q} = \frac{Q}{3A} - \omega R$$

da cui, essendo la densità dell'acqua $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$,

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{R} \left(\frac{Q}{3A} - \frac{\mathcal{M}_R}{R\rho Q} \right) = \\ &= \frac{1}{0,40} \times \left(\frac{0,030}{3 \times \pi \times 0,025^2/4} - \frac{50}{0,40 \times 1000 \times 0,030} \right) = 40,5 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

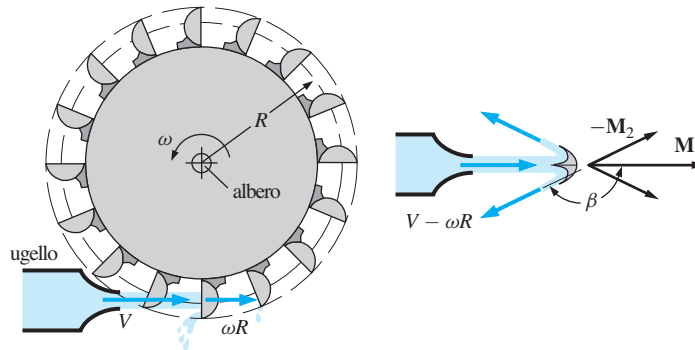
corrispondente, in giri al minuto, a

$$n = \omega \frac{60}{2\pi} = 40,5 \times \frac{60}{2 \times \pi} = 387 \text{ gpm}$$

6.45 In una turbina Pelton, un getto ad alta velocità, colpendo le pale della turbina, la mette in rotazione. Come indicato in figura, il getto è deviato dalla pala di un angolo β . Dimostrare che la potenza P di una ruota Pelton di raggio R che ruota con velocità angolare costante ω è data dalla relazione

$$P = \rho \omega R Q (V - \omega R) (1 - \cos \beta)$$

essendo ρ la densità dell'acqua, Q la portata e V la velocità del getto. Calcolare, altresì, la potenza di una ruota Pelton di raggio $R = 2 \text{ m}$, che ruota a 150 gpm, per $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$, $V = 50 \text{ m/s}$ e $\beta = 160^\circ$.



Analisi Come nel problema 6.27, la componente nella direzione del getto della spinta su una pala ferma ha modulo

$$\begin{aligned}S_0 &= M_1 - 2M_2 \cos \beta = \\ &= \rho Q V - 2\rho \frac{Q}{2} V \cos \beta = \rho Q V (1 - \cos \beta) = \rho A V^2 (1 - \cos \beta)\end{aligned}$$

Se la turbina ruota con velocità angolare ω , la pala ha una velocità tangenziale ωR . In tal caso, come nel problema 6.12, considerando un volume di controllo in movimento con la pala, nell'espressione della spinta al posto della velocità V va introdotta la velocità relativa $V - \omega R$. Per cui, la spinta sulla pala è

$$S_1 = \rho A (V - \omega R)^2 (1 - \cos \beta)$$

Tale spinta è minore di quella che la pala riceve quando è ferma sia perché diminuisce la velocità di impatto del getto sulla pala, sia perché diminuisce la portata. Infatti, la portata entrante nel volume di controllo in movimento è pari al prodotto dell'area A del getto per la velocità relativa $V - \omega R$, mentre la portata del getto è AV . La differenza fra le due portate, pari a $A\omega R$, non produce, quindi, alcuna spinta sulla pala ma serve solo ad allungare il getto. Se, però, come nel caso della turbina Pelton, alla pala che si è appena allontanata ne subentra subito un'altra, viene di fatto utilizzata l'intera portata, per cui la spinta che l'insieme delle pale riceve dal getto vale

$$S = \rho AV(V - \omega R)(1 - \cos \beta) = \rho Q(V - \omega R)(1 - \cos \beta)$$

Moltiplicando la spinta per il braccio R rispetto all'asse della turbina si ha il momento

$$\mathcal{M} = \rho R Q(V - \omega R)(1 - \cos \beta)$$

e, per la 5.85, la potenza

$$P = \omega \mathcal{M} = \rho \omega R Q(V - \omega R)(1 - \cos \beta)$$

Sostituendo i valori assegnati, essendo

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n = \frac{2 \times \pi}{60} \times 150 = 15,7 \text{ rad/s}$$

risulta

$$\begin{aligned} P &= \rho \omega R Q(V - \omega R)(1 - \cos \beta) = \\ &= 1000 \times 15,7 \times 2 \times 1 \times (50 - 15,7 \times 2) \times (1 - \cos 160^\circ) = \\ &= 1,13 \text{ MW} \end{aligned}$$

Riepilogo

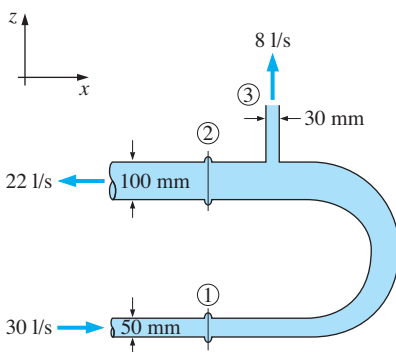
6.46 Nell'impianto di figura defluisce acqua con una portata di 30 l/s in ingresso. Attraverso il tronco di tubazione 3 defluisce in atmosfera la portata di 8 l/s. Essendo le pressioni relative pari a 100 kPa e a 50 kPa, in corrispondenza, rispettivamente, della flangia 2 e della flangia 1, calcolare le componenti secondo x e z delle forze che si scaricano sulle flange.

Analisi La forza $\mathbf{F}$ che si scarica sulle flange è la risultante del peso proprio $\mathbf{P}$ del tronco di tubazione compreso tra le due flange e della spinta dinamica $\mathbf{S}$ che il liquido esercita sulle pareti della tubazione stessa. Pertanto, si ha

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{S}$$

L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra le sezioni 1 e 2, compreso il tratto verticale fino alla sezione 3 di sbocco nell'atmosfera, essendo Π_0 , Π_1 , Π_2 e Π_3 le forze che, rispettivamente, la parete, la sezione 1, la sezione 2 e la sezione 3 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_3 = 0$$



Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e $\Pi_3 = 0$ perché lo sbocco è in atmosfera, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sulla curva, uguale e contraria a Π_0 , è

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_3$$

Il peso $\mathbf{G}$ è verticale. I flussi di quantità di moto sono vettori diretti come le velocità nelle rispettive sezioni. Essendo la densità dell'acqua $\rho = 1\,000\text{ kg/m}^3$ e A_1 , A_2 e A_3 le aree delle rispettive sezioni, assumendo $\beta = 1,03$, essi hanno, rispettivamente, modulo

$$M_1 = \beta\rho \frac{Q_1^2}{A_1} = 1,03 \times 1\,000 \times \frac{0,030^2}{\pi \times 0,050^2/4} = 472\text{ N}$$

$$M_2 = \beta\rho \frac{Q_2^2}{A_2} = 1,03 \times 1\,000 \times \frac{0,022^2}{\pi \times 0,100^2/4} = 63,5\text{ N}$$

$$M_3 = \beta\rho \frac{Q_3^2}{A_3} = 1,03 \times 1\,000 \times \frac{0,008^2}{\pi \times 0,030^2/4} = 93,3\text{ N}$$

Le spinte Π_1 e Π_2 sono ortogonali alle rispettive sezioni ed hanno modulo pari al prodotto della pressione p_G nel baricentro per l'area della sezione, per cui

$$\Pi_1 = p_{G1}A_1 = 50\,000 \times \pi \times 0,050^2/4 = 98,1\text{ N}$$

$$\Pi_2 = p_{G2}A_2 = 100\,000 \times \pi \times 0,100^2/4 = 785\text{ N}$$

Ipotizzando che il tratto di tubazione compreso fra le due flange abbia una lunghezza $L = 10D_1 = 10 \times 0,100 = 1\text{ m}$ e diametro costante $D = 0,075\text{ m}$ pari al diametro medio, il termine G risulta

$$G = \rho g \frac{\pi D^2}{4} L = 1\,000 \times 9,81 \times \frac{\pi \times 0,075^2}{4} \times 1 = 43,3\text{ N}$$

Analogamente, ipotizzando che il tubo abbia uno spessore $s = 4\text{ mm}$ e sia costituito da materiale di densità $\rho_m = 8\,000\text{ kg/m}^3$, il peso P del tratto compreso tra le due flange risulta

$$P = \rho_m g \pi D L s = 8\,000 \times 9,81 \times \pi \times 0,075 \times 1 \times 0,004 = 74,0\text{ N}$$

La forza che si scarica sulle flange ha componenti

$$F_x = S_x = \Pi_1 + M_1 + \Pi_2 + M_2 = 98,1 + 472 + 785 + 63,5 = 1\,420\text{ N}$$

$$F_z = -P + S_z = -P - G - M_3 = -74,0 - 43,3 - 93,3 = -211\text{ N}$$

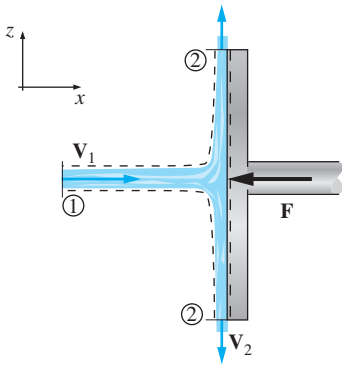
modulo

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{1\,420^2 + 211^2} = 1\,436\text{ N}$$

ed è inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo

$$\theta = \arctan \frac{F_z}{F_x} = \arctan \frac{-211}{1\,420} = -8,45^\circ$$

6.47 Un getto orizzontale, del diametro di 50 mm e velocità di 30 m/s, colpisce una lastra piana verticale ferma. Che forza bisogna applicare alla lastra per mantenerla in equilibrio?



Analisi Per l'equilibrio alla traslazione in direzione orizzontale, alla lastra bisogna applicare una forza $\mathbf{F}$ uguale e contraria alla spinta $\mathbf{S}$ che su di essa esercita il getto. L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra una sezione trasversale del getto 1 e la sezione 2 di uscita dal bordo della lastra, tenendo presente che il termine $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e che le pressioni relative sono ovunque nulle tranne che sulla superficie della lastra, diviene

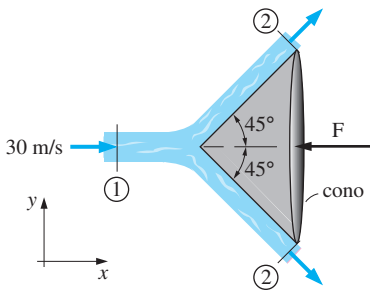
$$\mathbf{G} + \mathbf{F} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Pertanto, si ha

$$\mathbf{F} = -\mathbf{G} - \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

Il vettore $\mathbf{G}$ è verticale e il flusso di quantità di moto uscente $\mathbf{M}_2$ giace su un piano verticale, per cui, proiettando sull'orizzontale, essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, si ha

$$F = M_1 = \rho A V^2 = 1000 \times \pi \times 0,050^2 / 4 \times 30^2 = 1,77 \text{ kN}$$



6.48 Un getto orizzontale, del diametro di 50 mm e velocità di 30 m/s, colpisce il vertice di un cono ad asse orizzontale che devia le traiettorie di 45° rispetto alla direzione originale. Che forza bisogna applicare al cono per mantenerlo in equilibrio?

Analisi Per l'equilibrio alla traslazione, la forza $\mathbf{F}$ da applicare al cono è uguale e contraria alla spinta $\mathbf{S}$ che il getto esercita sul cono. L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra una sezione 1 del getto a monte del cono e la sezione 2 al bordo di uscita dal cono, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, il cono, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e $\Pi_1 = \Pi_2 = 0$ perché nelle due sezioni la pressione relativa è nulla, la spinta $\mathbf{S}$ che la corrente esercita sul cono, uguale e contraria a Π_0 , è

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il flusso di quantità di moto entrante $\mathbf{M}_1$ è diretto come l'asse x ed ha modulo

$$M_1 = \rho Q V$$

La sezione 2 al bordo di uscita dal cono è assimilabile ad una corona circolare di raggio interno pari a quello della base del cono e spessore pari allo spessore che assume la lamina di liquido dopo avere lambito la superficie laterale del cono. Per il teorema di Bernoulli, essendo la pressione ovunque pari alla pressione atmosferica e le differenze di quota trascurabili, la velocità ha ovunque lo stesso valore $V = 30 \text{ m/s}$. Nella sezione di uscita le traiettorie non sono parallele tra loro in quanto tangenti in ogni punto del bordo di uscita alla superficie laterale del cono e, quindi, inclinate tutte di 45° rispetto all'asse x . Pertanto, per la 6.11, il flusso di quantità di moto uscente è

$$\mathbf{M}_2 = \int_{A_2} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \rho V^2 \int_{A_2} \mathbf{n} dA$$

essendo $\mathbf{n}$ il versore normale a dA , variabile con dA ma sempre inclinato di 45° rispetto all'asse del cono. Essendo nulla, per simmetria, la componente in direzione y , il vettore $\mathbf{M}_2$ è orizzontale ed ha modulo

$$M_2 = \rho V^2 \cos 45^\circ \int_{A_2} n dA = \rho V^2 A_2 \cos 45^\circ = \rho V Q \cos 45^\circ$$

Essendo il peso $\mathbf{G}$ trascurabile, anche la spinta è orizzontale, è diretta come l'asse x ed ha modulo

$$\begin{aligned} S &= M_1 - M_2 = \rho Q V - \rho Q V \cos 45^\circ = \\ &= \rho Q V (1 - \cos 45^\circ) = \rho A V^2 (1 - \cos 45^\circ) = \\ &= 1000 \times \pi \times 0,050^2 / 4 \times 30^2 \times (1 - \cos 45^\circ) = 517 \text{ N} \end{aligned}$$

6.49 Un treppiedi sorregge un ugello, con sezione terminale del diametro di 30 mm, da cui defluisce un getto orizzontale d'acqua. Calcolare la velocità di sbocco e la portata per il valore massimo della spinta, pari a 600 N, che il treppiedi è in grado di sopportare.

Ipotesi L'ugello è sagomato come nel problema 6.45, in modo che nella sezione di sbocco le traiettorie siano rettilinee e parallele.

Analisi Come nel problema 6.30, se la corrente in ingresso nel volume di controllo ha direzione verticale, l'unica forza orizzontale che agisce sul volume è il flusso di quantità di moto uscente, in quanto allo sbocco la pressione relativa è nulla. Pertanto, la forza orizzontale $\mathbf{S}$ che si scarica sul treppiedi è uguale e contraria al flusso di quantità di moto $\mathbf{M}_2$ nella sezione di sbocco. Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua e $\beta = 1$ per l'uniformità della distribuzione di velocità, la spinta ha modulo

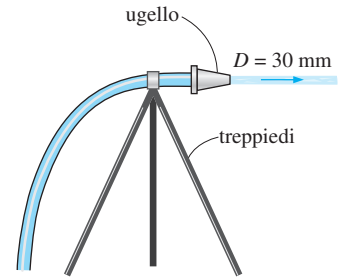
$$S = M_2 = \rho V^2 A$$

Imponendo che la spinta sia pari al valore massimo che il treppiedi è in grado di sopportare, la velocità di efflusso massima del getto risulta

$$V = \sqrt{\frac{S}{\rho A}} = \sqrt{\frac{600}{1000 \times \pi \times 0,030^2 / 4}} = 29,1 \text{ m/s}$$

a cui corrisponde una portata

$$Q = VA = VA = 29,1 \times \pi \times 0,030^2 / 4 = 20,6 \text{ l/s}$$



6.50 Un'astronave, che ha una massa di 8000 kg, si muove a velocità costante di 450 m/s. Per rallentarla, viene acceso un motore a razzo a combustibile solido, i cui gas di combustione vengono scaricati, per 5 secondi, nella stessa direzione dell'astronave, con portata costante di 70 kg/s e velocità media di 1500 m/s. Considerando costante la massa totale dell'astronave, calcolare la decelerazione dell'astronave nei 5 secondi, la variazione di velocità nello stesso intervallo di tempo e la spinta sull'astronave.

Analisi Si tratta del moto di un corpo in assenza di forze esterne, in cui la massa m del sistema si può considerare costante. In tal caso, sul corpo agisce una spinta dinamica $\mathbf{S}$ data dalla 6.28

$$\mathbf{S} = (m\mathbf{a})_W = \sum_{n_e} \beta_i Q_{mi} \mathbf{V}_i - \sum_{n_u} \beta_i Q_{mi} \mathbf{V}_i$$

pari alla differenza tra i flussi di quantità di moto entranti nel volume di controllo attraverso le n_e sezioni di imbocco e quelli uscenti attraverso le n_u sezioni di sbocco. Nel caso in esame, attraverso l'unica sezione di sbocco, si ha il flusso di quantità di moto uscente $\mathbf{M}_u$, per cui, indicando con il pedice u le grandezze riferite al flusso dei gas di combustione in uscita, si ha

$$\mathbf{S} = m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\mathbf{M}_u = -Q_{mu} \mathbf{V}_u$$

La velocità $\mathbf{V}$ dell'astronave e la velocità $\mathbf{V}_u$ dei gas di combustione hanno la stessa direzione, per cui, proiettando nella direzione del moto, si ha

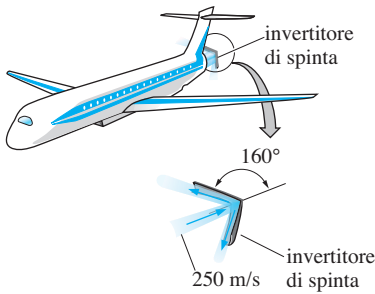
$$S = m \frac{dV}{dt} = -Q_{mu} V_u = -70 \times 1500 = -105 \text{ kN}$$

Per effetto di tale spinta, agente con verso opposto a quello del moto, l'astronave subisce una accelerazione negativa

$$a = \frac{dV}{dt} = -\frac{Q_{mu}}{m} V_u = -\frac{70}{8000} \times 1500 = -13,1 \text{ m/s}^2$$

Se tale decelerazione è costante per un tempo Δt , si ha una diminuzione di velocità

$$\Delta V = a \Delta t = -13,1 \times 5 = -65,6 \text{ m/s}$$



6.51 Il motore di un aereo espelle, dalla sezione di coda, gas di scarico con portata di 18 kg/s e velocità relativa $V = 250 \text{ m/s}$. In fase di atterraggio, il getto di scarico viene deviato di 160° da un invertitore di spinta, che, esercitando un'azione frenante sull'aereo, ne facilita l'atterraggio su piste corte. Calcolare la spinta sull'aereo prima e dopo che venga posizionato l'invertitore di spinta.

Analisi In assenza di invertitore di spinta, la spinta $\mathbf{S}$ sull'aereo è uguale e contraria al flusso della quantità di moto $\mathbf{M}_2$ del getto formato dai gas di scarico. Essa ha, pertanto, la stessa direzione del moto dell'aereo e modulo

$$S = M_2 = \rho Q V = Q_m V = 18 \times 250 = 4500 \text{ N}$$

In fase di atterraggio, il getto esercita sull'invertitore una spinta $\mathbf{S}_a$ diretta in senso opposto al moto dell'aereo, frenandolo. Infatti, l'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di gas di scarico compreso tra la sezione 1 a monte dell'invertitore e quella 2 al bordo di uscita dall'invertitore, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, l'invertitore di spinta, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente, $\Pi_1 = \Pi_2 = 0$ perché nelle due sezioni la pressione relativa è nulla e $\mathbf{G}$ trascurabile, la spinta $\mathbf{S}_a$ che la corrente esercita sull'invertitore, uguale e contraria a Π_0 , è

$$\mathbf{S}_a = -\Pi_0 = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il flusso di quantità di moto entrante $\mathbf{M}_1$ è diretto come il getto ed ha modulo

$$M_1 = \rho Q V = Q_m V$$

La sezione 2 al bordo di uscita dall'invertitore di spinta è assimilabile ad una corona circolare di raggio esterno pari a quello della base del dispositivo e spessore pari a quello che assume il fluido dopo avere lambito la superficie interna dell'invertitore. Per il teorema di Bernoulli, essendo la pressione ovunque pari alla pressione atmosferica e le differenze di quota trascurabili, la velocità ha ovunque lo stesso valore. Nella sezione di uscita le traiettorie non sono parallele tra loro in quanto tangenti in ogni punto del bordo di uscita alla superficie interna dell'invertitore e, quindi, inclinate tutte dello stesso angolo rispetto all'asse del dispositivo. Pertanto, per la 6.11, il flusso di quantità di moto uscente è

$$\mathbf{M}_2 = \int_{A_2} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \rho V^2 \int_{A_2} \mathbf{n} dA$$

essendo $\mathbf{n}$ il versore normale a dA , variabile con dA ma sempre inclinato di 160° rispetto alla direzione del getto. Essendo nulla, per simmetria, la componente in direzione ortogonale al getto, il vettore $\mathbf{M}_2$ ha la stessa direzione del getto, verso opposto ed ha modulo

$$M_2 = \rho V^2 \cos 160^\circ \int_{A_2} n dA = \rho V^2 A_2 \cos 160^\circ = \rho V Q \cos 160^\circ$$

Pertanto, la spinta $\mathbf{S}_a$ sull'invertitore è diretta come il getto ed ha modulo

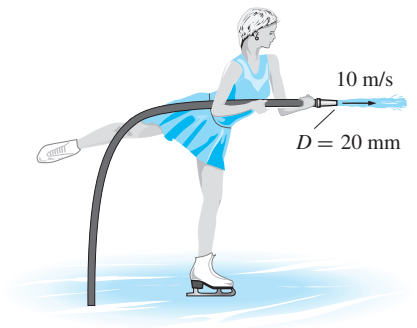
$$\begin{aligned} S &= M_1 - M_2 = \rho Q V - \rho Q V \cos 160^\circ = \\ &= \rho Q V (1 - \cos 160^\circ) = Q_m V (1 - \cos 160^\circ) = \\ &= 1,8 \times 250 \times (1 - \cos 160^\circ) = 8730 \text{ N} \end{aligned}$$

La spinta frenante esercitata dal getto dei gas di scarico sull'aereo con l'inserimento dell'invertitore è, quindi, poco meno del doppio della spinta motrice esercitata sull'aereo, in assenza di invertitore.

6.52 Una pattinatrice, la cui massa è di 60 kg, in piedi sul ghiaccio con i pattini ai piedi (attrito trascurabile), regge in mano un tubo flessibile (peso trascurabile), da cui sbocca un getto del diametro di 20 mm in direzione orizzontale parallela ai pattini. La velocità di sbocco è di 10 m/s. Nell'ipotesi di partenza dalla quiete, calcolare la velocità della pattinatrice dopo 5 secondi e la distanza percorsa, il tempo necessario per percorrere 5 m e la velocità in quel momento.

Analisi Come nel problema 6.30, considerando un volume di controllo in cui la corrente in ingresso ha direzione verticale, l'unica forza orizzontale che agisce sul volume è il flusso di quantità di moto uscente, in quanto allo sbocco la pressione relativa è nulla. Pertanto, la forza orizzontale $\mathbf{S}$ che si scarica sulla pattinatrice è uguale e contraria al flusso di quantità di moto $\mathbf{M}_u$ nella sezione di sbocco. Essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua e $\beta = 1$ per l'uniformità della distribuzione di velocità, la spinta ha modulo

$$S = M_u = \rho A V^2 = 1000 \times \pi \times 0,020^2 / 4 \times 10^2 = 31,4 \text{ N}$$



Per la seconda legge di Newton, la pattinatrice è sottoposta ad un'accelerazione costante, in direzione contraria a quella del getto, di modulo

$$a = \frac{S}{m} = \frac{31,4}{60} = 0,523 \text{ m/s}^2$$

che la fa muovere di moto uniformemente accelerato. Pertanto, partendo dalla quiete, la sua velocità al tempo $t = 5 \text{ s}$ è

$$V_p = at = 0,523 \times 5 = 2,62 \text{ m/s}$$

e in tale intervallo di tempo percorre una distanza

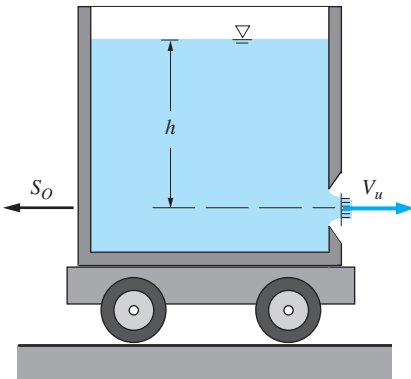
$$d = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \times 0,523 \times 5^2 = 6,54 \text{ m}$$

Analogamente, partendo dalla quiete, il tempo t_1 necessario per percorrere la distanza $d_1 = 5 \text{ m}$, è

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d_1}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{0,523}} = 4,37 \text{ s}$$

istante in cui la pattinatrice ha raggiunto la velocità

$$V_{p1} = at_1 = 0,523 \times 4,37 = 2,29 \text{ m/s}$$



6.53 Un serbatoio cilindrico di diametro D_0 è montato su un carrello che può muoversi su un piano orizzontale praticamente senza attrito. In prossimità del fondo, è praticata una piccola apertura di diametro D dalla quale fuoriesce un getto orizzontale che mette in movimento il contenitore. Considerando la diminuzione della massa d'acqua nel tempo e ritenendo trascurabile la massa del carrello e del contenitore, scrivere le relazioni che forniscono in funzione del tempo l'accelerazione e la velocità del sistema e lo spazio percorso.

Analisi Se le dimensioni della luce sono tali da dar luogo ad un abbassamento molto lento del livello idrico nel serbatoio, il processo di efflusso può essere studiato, con buona approssimazione, come se il moto fosse permanente. Per cui, essendo il fluido incompressibile, tra un punto all'interno del serbatoio, il cui carico è uguale alla quota z_s della superficie libera rispetto ad un piano di riferimento, e la sezione u di sbocco, dove la pressione relativa è nulla perché l'efflusso è in atmosfera, trascurando le perdite di carico lungo il percorso, per il teorema di Bernoulli, ponendo $\alpha = 1$, si ha

$$z_s = z_u + \frac{V_u^2}{2g}$$

Essendo $h = z_s - z_u$ il dislivello tra la superficie libera e la quota della sezione di sbocco, la velocità media allo sbocco risulta

$$V_u = \sqrt{2g(z_s - z_u)} = \sqrt{2gh}$$

Il movimento del carrello è causato dalla componente orizzontale della spinta S che l'acqua esercita sulle pareti del serbatoio. L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24 applicata al volume di fluido contenuto nel serbatoio fino

alla sezione 2 di sbocco, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, le pareti del serbatoio, la superficie libera e la sezione di sbocco esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\Pi_1 = \Pi_2 = 0$ perché la superficie libera e lo sbocco sono a pressione atmosferica, $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e $\mathbf{M}_1 = 0$ perché non vi è ingresso di fluido nel volume di controllo, la spinta $\mathbf{S}$ sul serbatoio, uguale e contraria a Π_0 , risulta

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} - \mathbf{M}_2$$

Pertanto, la componente orizzontale della spinta ha verso opposto al flusso di quantità di moto uscente e, essendo Q la portata e ρ la densità dell'acqua, modulo

$$S_O = M_u = \rho Q V_u$$

Essendo A l'area della luce, A_u l'area della sezione contratta subito a valle di essa e C_c il loro rapporto, si ha anche

$$S_O = \rho Q V_u = \rho A_u V_u^2 = \rho C_c A V_u^2 = \rho C_c \frac{\pi D^2}{4} 2gh$$

Il contenitore di massa

$$m = \rho \frac{\pi D_0^2}{4} h$$

subisce, per la seconda legge di Newton, un'accelerazione

$$a = \frac{S_O}{m} = \frac{2\rho gh C_c}{\rho h} \frac{\pi D^2/4}{\pi D_0^2/4} = 2g C_c \frac{D^2}{D_0^2}$$

che risulta indipendente dall'altezza d'acqua nel contenitore e, dunque, costante nel tempo. Il carrello, partendo dalla quiete, si muove, quindi, di moto uniformemente accelerato con una velocità

$$V = at = 2g C_c \frac{D^2}{D_0^2} t$$

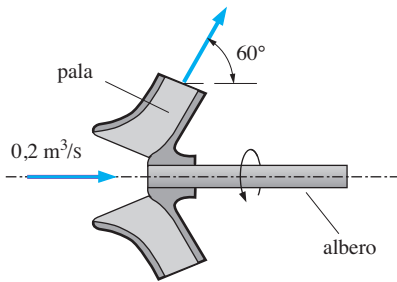
funzione lineare del tempo. Lo spazio percorso $x(t)$ si calcola per integrazione della

$$dx = V dt = 2g C_c \frac{D^2}{D_0^2} t dt$$

che, imponendo la condizione $x = 0$ per $t = 0$, fornisce

$$x = g C_c \frac{D^2}{D_0^2} t^2$$

6.54 In una pompa centrifuga elicoidale, una portata d'acqua di $0,2 \text{ m}^3/\text{s}$ entra in direzione assiale, con una velocità media di 5 m/s , ed esce in atmosfera con una inclinazione di 60° rispetto all'orizzontale, come mostrato in figura. Calcolare la forza che si scarica sull'albero in direzione assiale, supponendo che l'area della sezione di sbocco sia la metà di quella di ingresso.



Analisi L'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24 applicata al volume di fluido compresso tra la sezione 1 di ingresso e la sezione 2 di uscita dalla girante, essendo Π_0 , Π_1 e Π_2 le forze che, rispettivamente, la girante, la sezione 1 e la sezione 2 esercitano sul liquido, diviene

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

Essendo $\Pi_1 = \Pi_2 = 0$ perché l'ingresso e lo sbocco sono a pressione atmosferica e $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente, la spinta $\mathbf{S}$ sull'albero, uguale e contraria a Π_0 , risulta

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il vettore $\mathbf{G}$ è verticale mentre i flussi di quantità di moto sono diretti come le rispettive velocità. Pertanto, proiettando sull'asse nel verso della corrente, si ha

$$S = M_1 - M_2 \cos 60^\circ = \rho Q (V_1 - V_2 \cos 60^\circ)$$

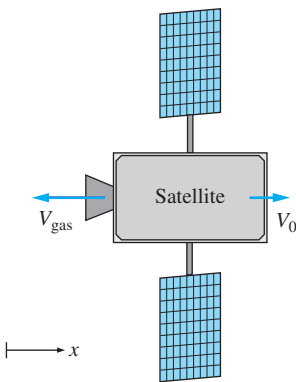
Essendo l'area A_2 della sezione di sbocco pari alla metà dell'area A_1 della sezione di ingresso e, per l'equazione di continuità, $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$, si ha

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \frac{A_1}{0,5 A_1} V_1 = 2 V_1$$

La componente in direzione assiale della spinta sull'albero ha, quindi, modulo

$$\begin{aligned} S &= \rho Q (V_1 - V_2 \cos 60^\circ) = \\ &= \rho Q V_1 (1 - 2 \cos 60^\circ) = \rho Q V_1 (1 - 2 \times 0,5) = 0 \text{ N} \end{aligned}$$

Discussione Nel caso in esame, il particolare valore del rapporto tra le aree di ingresso e di uscita e il valore dell'angolo di deviazione all'uscita fanno sì che la spinta in direzione assiale sia nulla. In generale, quindi, il valore della spinta in direzione assiale può essere variato agendo opportunamente sul rapporto tra tali aree e sull'angolo di deviazione.



6.55 Un satellite avente una massa di 5 000 kg orbita attorno alla terra a velocità V_0 . Per alterarne l'orbita, da un razzo sul satellite vengono scaricati, nel verso opposto a quello di V_0 , 100 kg di gas combusti per 2 s, alla velocità relativa di 3 000 m/s. Calcolare (a) la spinta sul satellite, (b) l'accelerazione del satellite nei 2 s e (c) la variazione di velocità del satellite.

Analisi (a) Si assuma un sistema di riferimento solidale col satellite e avente come asse x la direzione di V_0 . Sul satellite non agiscono forze esterne e la sua massa può essere considerata praticamente costante. Pertanto, può essere applicata l'equazione 6.28

$$\mathbf{S} = \sum_{n_e} \beta_i Q_{mi} \mathbf{V}_i - \sum_{n_u} \beta_i Q_{mi} \mathbf{V}_i$$

secondo la quale sul satellite agisce una spinta dinamica pari alla differenza fra i flussi di quantità di moto entranti e uscenti. Il flusso entrante è nullo. Quello uscente è pari al prodotto $Q_m V_{\text{gas}}$ della portata di massa del gas scaricato per la velocità relativa del gas. La portata è data dal rapporto tra la massa m_{gas} del gas e il tempo di scarico Δt

$$Q_m = \frac{m_{\text{gas}}}{\Delta t} = \frac{100}{2} = 50 \text{ kg/s}$$

Pertanto, il satellite riceve nella direzione del moto una spinta di modulo

$$S = 0 - Q_m V_{\text{gas}} = -50 \times (-3\,000) = 150\,000 \text{ N}$$

(b) Per la seconda legge di Newton, la spinta $\mathbf{S}$, unica forza agente, imprime al satellite di massa m un'accelerazione di modulo

$$a = \frac{S}{m} = \frac{150\,000}{5\,000} = 30 \text{ m/s}^2$$

diretta come la spinta.

(c) Essendo $a = dV/dt = \text{costante}$, il satellite subisce una variazione di velocità

$$\Delta V = a \Delta t = 30 \times 2 = 60 \text{ m/s}$$

6.56 Un getto del diametro di 7 cm e velocità di 15 m/s è diretto verticalmente verso l'alto. Calcolare il peso di una piastra piana circolare in equilibrio sotto l'azione del getto ad una altezza di 2 m al di sopra della sezione iniziale del getto.

Analisi Per l'equilibrio alla traslazione verticale, il peso $\mathbf{P}$ della piastra deve essere uguale e contrario alla spinta $\mathbf{S}$ che il getto esercita sulla piastra. Come nel problema 6.9, l'equazione globale dell'equilibrio dinamico 6.24, applicata al volume di fluido compreso tra la sezione 1 del getto subito a monte della piastra e la sezione 2 di uscita dal bordo della piastra, tenendo presente che il termine $\mathbf{I} = 0$ perché il moto è permanente e che le pressioni relative sono ovunque nulle tranne che sulla superficie della piastra, diviene

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_0 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0$$

avendo indicato con $\mathbf{\Pi}_0$ la risultante delle forze di superficie che la piastra esercita sul fluido. La spinta dinamica $\mathbf{S}$ che il liquido esercita sulla piastra è uguale e contraria a quella che la piastra esercita sul liquido. Pertanto, si ha

$$\mathbf{S} = -\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{G} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

Il vettore $\mathbf{G}$ è verticale ed è pari al peso del volume di liquido considerato. Il flusso di quantità di moto uscente $\mathbf{M}_2$ è orizzontale e nullo per simmetria. Pertanto, la spinta $\mathbf{S}$ è verticale, è diretta verso l'alto ed ha modulo

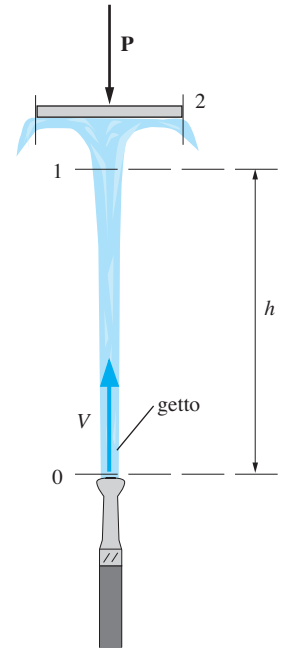
$$S = -G + M_1 \cong M_1 = \rho Q V_1$$

essendo il peso G trascurabile rispetto a M_1 . Il getto di diametro D e velocità V ha una portata

$$Q = AV = \frac{\pi D^2}{4} V = \frac{\pi \times 0,070^2}{4} \times 15 = 57,7 \text{ l/s}$$

Applicando il teorema di Bernoulli tra la sezione iniziale 0 del getto e la sezione 1 posta ad una altezza h al di sopra di tale sezione, essendo $p_0 = p_1 = 0$, si ha

$$\frac{V_0^2}{2g} = h + \frac{V_1^2}{2g}$$



da cui

$$V_1 = \sqrt{V_0^2 - 2gh} = \sqrt{15^2 - 2 \times 9,81 \times 2} = 13,6 \text{ m/s}$$

Pertanto, essendo $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ la densità dell'acqua, si ha

$$P = S = \rho Q V_1 = 1\,000 \times 0,0577 \times 13,6 = 787 \text{ N}$$

6.57 Risolvere il problema precedente nel caso in cui la piastra sia ad un'altezza di 5 m al di sopra della sezione iniziale del getto.

Analisi Se la sezione 1 è posta ad un'altezza $h = 5 \text{ m}$ rispetto alla sezione iniziale del getto, si ha

$$V_1 = \sqrt{V_0^2 - 2gh} = \sqrt{15^2 - 2 \times 9,81 \times 5} = 11,3 \text{ m/s}$$

e, conseguentemente,

$$P = S = \rho Q V_1 = 1\,000 \times 0,0577 \times 11,3 = 650 \text{ N}$$

maggio 2011