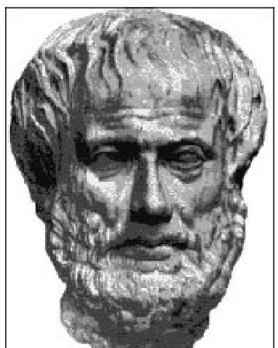
Dal metodo di esaustione agli indivisibili

1. Il metodo di esaustione di Eudosso

Per rintracciare le origini del calcolo integrale bisogna risalire fino ai geometri greci i quali, nella ricerca di aree e volumi, seppero ottenere risultati ammirevoli. Integrare, infatti, significa determinare un'area. In termini moderni si integra generalmente una funzione, ma nell'antichità i problemi di integrazione erano di natura squisitamente geometrica.

Il procedimento adottato nell'antichità parte da un sistema di analisi infinitesimale chiamato *metodo di esaustione*.

Inventato da **Eudosso di Cnido** (406-355 a.C.), filosofo seguace di Platone, questo metodo si proponeva di riempire un'area con delle figure note tali che la loro somma approssimasse l'area cercata.



Eudosso 408-355 a.C.

Archimede perfeziona questo metodo inserendo il concetto di *momento statico* delle figure, come se si trattasse di "pesare" le aree e di trovare il punto d'equilibrio della bilancia utilizzata. Fu il primo ad affrontare problemi geometrici applicando nozioni di meccanica e di statica, riuscendo addirittura a costruire un metodo che anticipava di ben diciotto secoli il calcolo integrale.

In termini moderni, questa teoria consiste nel dimostrare che due grandezze (lunghezze, aree o volumi) sono uguali perché è assurdo che la loro differenza sia diversa da zero. Ciò non si ottiene da un confronto diretto delle due grandezze in questione, ma dal confronto tra due classi (contigue) di grandezze.

In questo dobbiamo leggere la potenza del metodo di esaustione: se gli antichi geometri avevano solo suggerito l'idea che il cerchio (come le altre figure curvilinee) poteva essere esaurito o colmato da poligoni regolari iscritti, intuendo soltanto il concetto di "passaggio al limite", Eudosso per la prima volta rende rigoroso il procedimento evitando di ricorrere al concetto di limite stesso.

Il calcolo infinitesimale sposterà il suo campo d'azione dalla geometria all'analisi arricchendolo in precisione e rapidità (a meno che non si conoscano formule più rapide già dimostrate, come l'area del cerchio).

2. La misura dell'area del cerchio a opera di Archimede

Prima di esporre il metodo utilizzato da Archimede nel suo *Misura del cerchio*, vediamo come si presentava all'epoca il problema.

Il risultato che si voleva raggiungere non era esattamente l'area del cerchio; più che altro si mirava alla soluzione del problema della famosa "quadratura del cerchio".

"Quadrare una figura", così come era inteso dagli antichi, significa costruire un quadrato di area uguale a quella della figura piana considerata. Se ciò è realmente possibile, allora si dice che la figura è "quadrabile". La sfida più grande era comunque sempre la quadratura del cerchio.

Riuscire a quadrare il cerchio è stato un chiodo fisso dei matematici dai tempi di Anassagora (500-420 a.C.) sino al 1882, quando Ferdinand Lindemann (1852-1939) dimostrò definitivamente l'impossibilità del problema.

Archimede troverà l'area del cerchio non direttamente, ma a partire da considerazioni volte a rendere possibile la costruzione del quadrato di area uguale al cerchio considerato.

Per quadrare le figure gli antichi greci lavoravano per "gradini": passavano dalla figura più complessa ad una più semplice utilizzando metodi fissi e dimostrati. Così iniziarono col quadrare il rettangolo, poi il triangolo e poi il poligono generico; e ogni quadratura faceva riferimento a quella precedente.

Il metodo di esaustione si propone di "riempire" una superficie di area sconosciuta, con figure note delle quali possiamo calcolare l'area. Per quadrare i poligoni si fa proprio questo: dato un poligono, lo si divide in tanti triangoli, quindi in figure quadrabili direttamente. Una volta diviso il poligono, si procede a quadrare singolarmente i triangoli ottenuti e a sommare le aree dei quadrati che risultano, ottenendo un unico quadrato di area uguale al poligono iniziale.

Archimede si spinse oltre, intorno al 225 a.C., nel trattato *Misura del cerchio*: per calcolare l'area del cerchio costruì dei poligoni inscritti e circoscritti, quindi quadrabili. Nel suo calcolo approssimato del rapporto tra circonferenza di un cerchio e diametro, Archimede diede un'ulteriore prova della sua abilità nel calcolo.

Da *La misura del cerchio*:

Problema. Si determini l'area di un poligono regolare con centro in O, perimetro Q e apotema h (l'apotema è il segmento passante per O e perpendicolare a uno qualsiasi dei lati).

Teorema. *L'area del poligono regolare è* $\frac{1}{2}\, hQ$.

Ma Archimede non puntava a questo. Egli si limitava ad osservare che se è possibile costruire un poligono la cui area si avvicini quanto si vuole a quella del cerchio, sarà anche possibile quadrare questo poligono, quindi è plausibile pensare – a torto – che probabilmente si potrà quadrare anche il cerchio.

Proposizione. *L'area di qualsiasi cerchio è uguale a quella di un triangolo rettangolo avente uno dei cateti uguale al raggio e l'altro uguale alla circonferenza.*

Ma l'area di tale triangolo è facilmente calcolabile ed è $T = \frac{1}{2}rC$, dove r è il raggio e C è la lunghezza della circonferenza.

3. Bonaventura Cavalieri e il metodo degli indivisibili

3.1. Il contesto storico e le fonti ispiratrici

Bonaventura Cavalieri, entrato nell'ordine dei Gesuati non ancora sedicenne, fu trasferito a Pisa dove aveva seguito le lezioni di Matematica di padre Benedetto Castelli e di Pietro Antonio Castaldi, entrambi allievi di **Galileo Galilei**. Tuttavia tenne fin da subito a proclamarsi allievo di Galileo stesso, infatti si rivolge ad esso chiamandolo "proprio maestro" nel lungo carteggio durato per circa venti anni a partire dal 1621. In tali lettere comunica i primi risultati delle sue ricerche geometriche, i progressi compiuti e i dubbi che via via si presentano. In una lettera del 1621 scrive: "Vado dimostrando alcune proposizioni d'Archimede diversamente da lui, et in particolare la quadratura della parabola, divers'ancora da quello di V.S."

Senza dubbio Cavalieri fu stimolato nelle sue ricerche da Galileo (il quale lo incoraggiò ad organizzare le sue riflessioni sotto forma di libro), dai lavori di **Nicola Oresme**, e soprattutto dal trattato di **Kepler** *Stereometria doliorum* in cui erano stati calcolati aree e volumi, suddividendo i corpi in infinite parti infinitesime. Il problema della quadratura dell'ellisse infatti era stato risolto già da Kepler utilizzando tali idee.

3.2. La geometria degli indivisibili

Cavalieri aveva sviluppato il suo metodo già a partire dal 1621 (da quanto emerge dalla lettera a Galileo); nel novembre del 1627 in un'altra lettera dice di essere in procinto di pubblicare un libro sull'argomento, segno quindi che l'opera era gia terminata, ma non lo farà, forse per rispetto al maestro, fino al 1635, dato che Galileo stesso si era riproposto di pubblicare un libro che trattasse di infinito. Comunque il trattato di Galileo avrebbe senza dubbio avuto un carattere più filosofico e speculativo, e avrebbe posto particolare accento sull'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo, tema che Cavalieri preferiva evitare.

Le idee su cui si basa la *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, nota con il nome di *Geometria degli indivisibili* e pubblicata nel 1635 dopo esitazioni, riscritture e impedimenti, sono presenti in autori precedenti, come già osservato. Sostanzialmente l'intuizione è che un'area potesse essere considerata come formata da un numero indefinito di segmenti paralleli equidistanti e sottilissimi e che un volume poteva essere considerato come composto da un numero infinito di aree piane parallele; questi elementi sono appunto chiamati "indivisibili di area" e "indivisibili di volume".

Cavalieri si rende conto che il numero di indivisibili che costituiscono un'area o un volume deve essere infinitamente grande, ma non cerca di approfondire questo fatto né di darne una spiegazione precisa. Questo era lo stesso ragionamento che Archimede stesso aveva utilizzato nel suo *Metodo*, che a quella data non era ancora stato scoperto.

Cavalieri parla a proposito delle superfici come formate dalla "totalità di tutte le linee" e dei solidi come formati dalla "totalità di tutti i piani". Questo gli consente di introdurre un principio noto ancora oggi come "Principio di Cavalieri" con il quale arriva ad elaborare un potente e nuovo strumento per la determinazione di aree e volumi.

3.3. Il Principio di Cavalieri

Se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi stanno in questo rapporto.

Cavalieri utilizza tale principio per calcolare aree e volumi confrontando le proprietà di due figure (ad esempio, le aree di due superfici o i volumi di due solidi) sulla base del rapporto fra gli indivisibili staccati dall'una e dall'altra sopra un medesimo fascio di rette parallele o di piani paralleli. Il procedimento consiste cioè nell'accoppiare sistematicamente gli elementi di una configurazione con i corrispondenti elementi di un'altra configurazione senza tralasciarne alcuno.

Applica il metodo per verificare la validità di alcuni problemi risolti da Archimede con il metodo di esaustione sul calcolo dei volumi dei solidi (ad esempio il volume del cono è $1/3$ di quello del cilindro circoscritto). In modo analogo tratta l'area compresa fra due curve considerando le aree come somma delle ordinate, e se le ordinate stavano in certo rapporto allora secondo il suo principio anche le aree stanno nello stesso rapporto.

Bisogna osservare che Cavalieri aveva successo nell'ottenere risultati corretti perché applicava il suo principio al calcolo di rapporti di aree e volumi in cui i rapporto fra gli indivisibili che li costituivano era costante.

Cavalieri mostra di conoscere il metodo di esaustione, ma è convinto della superiorità del metodo degli indivisibili rispetto ad esso, mosso anche da motivazioni logiche: l'esaustione fa uso essenzialmente della dimostrazione per assurdo, mentre il metodo degli indivisibili porta a realizzare delle dimostrazioni costruttive, anzi è un metodo costruttivo per calcolare aree e volumi. Inoltre il metodo di esaustione non può essere impiegato per la ricerca di un risultato, ma solo per la dimostrazione di una tesi: una limitazione molto pesante, davvero insostenibile per una comunità scientifica lanciata verso la precisazione di procedimenti nuovi, verso la matematizzazione di larghi settori del sapere umano.

3.4. Un teorema importante

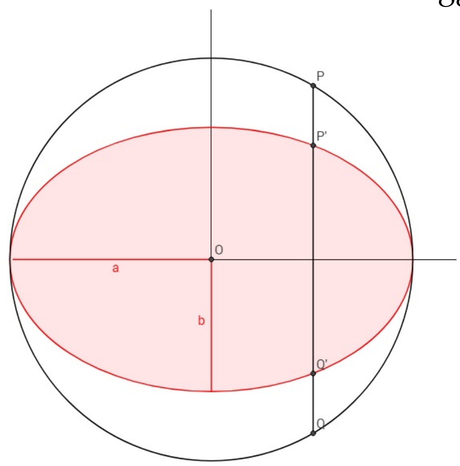
Con la teoria degli indivisibili, Cavalieri prova un risultato significativo sulla "quadratura" delle "parabole" di ogni ordine; in linguaggio moderno può essere espresso nel modo seguente:

$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}\ , \ldots ,\ \int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

3.5. La quadratura dell'ellisse

Un esempio significativo è la determinazione dell'area racchiusa dall'ellisse (utilizziamo le notazioni attuali).

Consideriamo un'ellisse di asse maggiore $2a$ e asse minore $2b$ e una circonferenza avente come diametro l'asse maggiore dell'ellisse.



Ogni retta ortogonale all'asse maggiore intercetta sul cerchio un segmento PQ e sull'ellisse un segmento $P'Q'$ (gli *indivisibili* delle due curve).

In un sistema di riferimento opportuno, la circonferenza e l'ellisse hanno equazioni rispettive

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e le rette hanno equazione $x = k$. Si ottengono facilmente le coordinate dei punti e quindi le misure dei due segmenti intercettati:

$$PQ = 2\sqrt{a^2 - k^2} \quad \text{e} \quad P'Q' = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - k^2}.$$

Il loro rapporto è

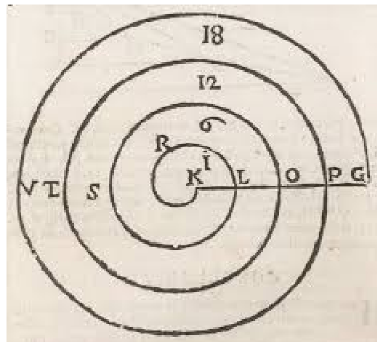
$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{a}{b}.$$

Allora, per il Principio di Cavalieri, un uguale rapporto deve intercorrere fra l'area del cerchio e quella dell'ellisse in quanto il cerchio è la totalità delle linee PQ e l'ellisse la totalità delle linee $P'Q'$. Indicando con A l'area dell'ellisse, avremo dunque

$$\pi a^2 : A = a : b$$

e quindi $A = \pi ab$.

3.6. La rettificazione parabolica della spirale di Archimede



La parabola $x^2 = ay$, con la sostituzione $x = r$ e $y = r\theta$, diventa in coordinate polari la spirale di Archimede $r = a\theta$.

Cavalieri prova che l'area tra la parabola, l'asse x e la retta verticale passante per il punto $(r, \theta) = (2a\pi, 2\pi)$ e l'area compresa nel primo giro della spirale sono uguali.