Il Determinante

Il **DETERMINANTE** è una funzione sullo spazio delle matrici che sono quadrate:

$$\det : M_n(K) \longrightarrow K$$
$$A \longmapsto \det(A)$$

Esempi:

MATRICE 1×1

n=1: $A = (a) \Rightarrow \det(A) = a \in K$

GIÀ VISTO A INIZIO CORSO

n=2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a\cdot d - b\cdot c \in K$

n=3: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \in K$

E al crescere di n diventa **sempre più complicato** (nel senso che il numero di termini cresce, anzi cresce **velocissimo**, con una crescita **più che esponenziale**, una crescita che è **fattoriale**

es: $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ ⇝ numero di termini è $n!$)

(per $n=4$ sono 24 termini, per $n=5$ sono 120 termini)

	$A \in M_n(K)$ $\exists A^{-1}$ (A quadrata invertibile)	$A \in M_n(K)$ $\nexists A^{-1}$ (A quadrata NON invert)	$A \in M_{n \times m}(K)$ $n \neq m$ (A NON quadrata)
det	$\det(A) \neq 0$	$\det(A) = 0$	$\nexists \det(A)$
rank	$\text{rank}(A) = n$	$\text{rank}(A) \lneq n$	$\exists \text{rank}(A)$

MEMO! SE NON È QUADRATA NON HA NEMMENO SENSO CERCARE DI INVERTIRLA

Def 1 [Metodo di Laplace applicato alle **COLONNE**, o Sviluppo di Laplace del determinante per **COLONNE**, o **LAPLACE sulle COLONNE**] [**DEFINIZIONE ITERATIVA**]:

$$\det(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \underbrace{(-1)^{i+j} \cdot \det\big(\underbrace{A_{(\hat{i})}^{(\hat{j})}}\big)} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

È POSSIBILE SCEGLIERE **QUALSIASI COLONNA** (j-ESIMA)!

SI CHIAMA **COFATTORE (i,j)** DELLA MATRICE **A** E SI INDICA IN FORMA ABBREVIATA CON $\mathrm{cof}(A)_{ij}$

PER BREVITÀ SI INDICA CON A_{ij} E SI CHIAMA IL **MINORE (i,j)** DELLA MATRICE A. $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$!

SI OTTIENE **RIMUOVENDO** DALLA MATRICE **A** LA RIGA **i-ESIMA** E LA COLONNA **j-ESIMA**. ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

È PIÙ PICCOLA!

QUINDI POSSIAMO **ITERARE** IL PROCESSO FINCHÉ NON ABBIAMO SOLO MATRICI 1x1 E POI: $\det(a) = a$

Quindi è la stessa cosa scriverlo anche come:

$$\det(A) := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \mathrm{cof}(A)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Def 2 [Metodo di Laplace applicato alle **RIGHE**, o Sviluppo di Laplace del determinante per **RIGHE**, o **LAPLACE sulle RIGHE**] [**DEFINIZIONE ITERATIVA**]:

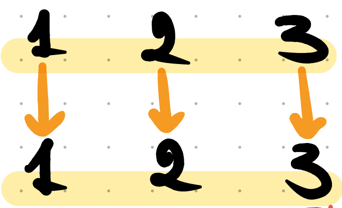
$$\det(A) := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det\big(A_{(\hat{i})}^{(\hat{j})}\big) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Def 3 [Definizione tramite **PERMUTAZIONI** o **DETERMINANTE A SUDOKU**] [**DEFINIZIONE COSTRUTTIVA**]:

$$\det(A) := \sum_{\substack{\text{PERMUTAZIONI}\\ \sigma}} (-1)^{I(\sigma)} \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

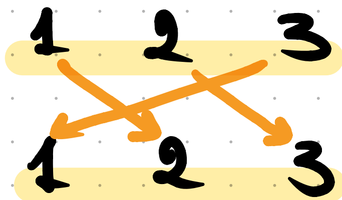
dove una **PERMUTAZIONE** è una biezione $\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ e $I(\sigma)$ è il numero minimo richiesto di inversioni di due elementi per trasformare σ nella biezione **IDENTITÀ** $(id(j) := j)$

Esempio: $n=3$



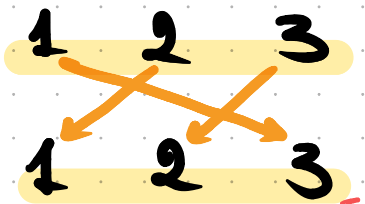
$I(\nu)=0 \Rightarrow (-1)^{I(\nu)} = +1$

$\det(A) = + a_{11}a_{22}a_{33}$



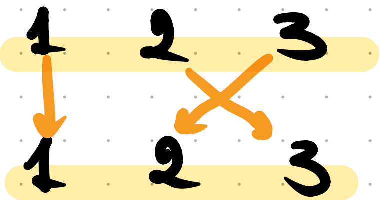
$I(\nu)=2 \Rightarrow (-1)^{I(\nu)} = +1$

$+ a_{12}a_{23}a_{31}$



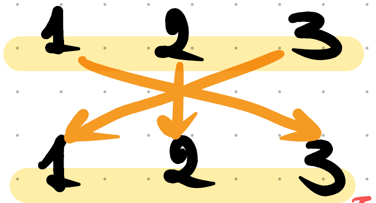
$I(\nu)=2 \Rightarrow (-1)^{I(\nu)} = +1$

$+ a_{13}a_{21}a_{32}$



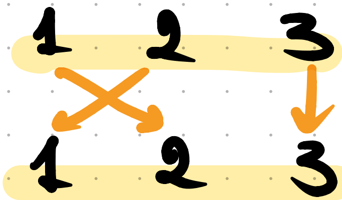
$I(\nu)=1 \Rightarrow (-1)^{I(\nu)} = -1$

$- a_{11}a_{23}a_{32}$



$I(\nu)=1 \Rightarrow (-1)^{I(\nu)} = -1$

$- a_{13}a_{22}a_{31}$



$I(\nu)=1 \Rightarrow (-1)^{I(\nu)} = -1$

$- a_{12}a_{21}a_{33}$

Def 4 [COMPATIBILITÀ con le proprietà che definiscono gli SPAZI VETTORIALI] [DEFINIZIONE ASSIOMATICA]:

$\det : M_n(K) \to K$ è L'UNICA FUNZIONE che soddisfa:

$\boxed{D1}$ $\det(I_n) = 1$

MATRICE OTTENUTA SCAMBIANDO DUE RIGHE DI A, LA i-ESIMA E LA j-ESIMA (OE3), OPPURE, EQUIVALENTEMENTE, SCAMBIANDO DUE COLONNE DI A.

$\boxed{D2}$ $\det(A(i \leftrightarrow j)) = -\det(A) \quad \forall i \neq j,\ i,j \in \{1,\dots,n\}$

$\boxed{D3.a}$ $\det(A(A^{(i)} \mapsto \lambda \cdot A^{(i)})) = \lambda \cdot \det(A) \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}\ \forall \lambda \in K$

IN ALTRE PAROLE, VUOL DIRE CHE LA FUNZIONE **DET** È **COMPATIBILE** CON LA MOLTIPLICAZ. PER SCALARI SULLE COLONNE (EQUIVALENTEM., SI POTEVA RICHIEDERE SULLE RIGHE ANZICHÉ SULLE COLONNE).

VUOL DIRE CHE MOLTIPLICARE UNA COLONNA PER UNO SCALARE HA L'EFFETTO DI MOLTIPLICARE IL **DET** PER QUELLO SCALARE

[SIMILE A OE1].

$\boxed{D3.b}$ $\det(A(A^{(i)} \mapsto B+C)) = \det(A(A^{(i)} \mapsto B)) + \det(A(A^{(i)} \mapsto C))$

SIMILE A OE2

VUOL DIRE CHE IL **DET** DI UNA MATRICE IN CUI GUARDIAMO AD UNA PARTICOLARE COLONNA COME ALLA **SOMMA DI DUE VETTORI COLONNA**, ALLORA POSSIAMO **SPEZZARE** IL DETERMINANTE NELLA SOMMA DI DUE DETERMINANTI, OGNUNO SULLA STESSA MATRICE MA CON QUELLA COLONNA SOSTITUITA CON IL PRIMO E CON IL SECONDO SOMMANDO DI QUELLA COLONNA. DI NUOVO, SI POTEVA CHIEDERE CON LE RIGHE INVECE.

TEOREMA

i) Def 1 $\Longleftrightarrow$ Def 2 $\Longleftrightarrow$ Def 3 $\Longleftrightarrow$ Def 4

ii) TEOREMA di BINET: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

iii) $\det({}^tA) = \det(A)$

Dim.: Sernesi, [per coloro che sostengono la prova orale].

Oss.: Il punto iii), cioè che il determinante di una matrice sia uguale a quello della sua trasposta, può essere utilizzato per dimostrare dualità (i.e. "equivalenze") tra proposizioni a proposito delle colonne e le corrispondenti proposizioni a proposito delle righe, e viceversa.