COR

i) Se A ha una riga oppure una colonna **nulla**, allora **det(A) = 0**.

ii) Se una riga (oppure una colonna) di A è **linearmente dipendente** ad altre righe (rispettivamente, altre colonne), allora **det(A) = 0**.

iii) Se due righe di A (o colonne) sono uguali, o proporzionali, allora **det(A) = 0**.

iv) Se A è triangolare superiore (in particolare per le matrici quadrate questo include matrici diagonali e a scala), allora

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Esempio di ii). Se A ha DUE RIGHE (COLONNE) UGUALI allora **det(A) = 0**.

VETTORE SCALARE QUALSIASI VETTORE

Dim.: i). Se $A_{(i)} = 0 \Rightarrow A_{(i)} = 0 \cdot B$, allora usando Def 4, proprietà D3.a) abbiamo che $\det(A) = 0 \cdot \det(A(A_{(i)} \mapsto B)) = 0$.
Lo stesso per le colonne invece che per le righe.

ii). Supponiamo che $A_{(i)} = \lambda_1 A_{(1)} + \dots + \widehat{A_{(i)}} + \dots + \lambda_n A_{(n)}$.
Dalle proprietà D3.a) e D3.b) segue che le operazioni elementari OE1 e OE2 **NON** cambiano il determinante, in matematica si dice che **IL DET È INVARIANTE PER LE OPERAZIONI OE1 e OE2** [mentre invece è alternante nel segno per OE3, perché ogni volta OE3 viene usata si produce un segno meno].
Allora tramite OE1 e OE2 possiamo sostituire

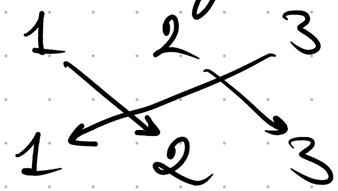
$$A_{(i)} \mapsto A_{(i)} - \sum_{j \neq i} \lambda_j A_{(j)} = 0$$

lasciando DET invariato. Avendo ottenuto una riga nulla, possiamo concludere usando i).

iii). Segue come caso particolare di ii).

iv). Usando Def 3, l'unica permutazione che forse sopravvive in una matrice triangolare è l'identità, mentre tutte le altre danno un contributo uguale a zero perché sotto la diagonale tutte le entrate sono uguali a zero. $\square$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{31} \end{pmatrix}$ la permutazione σ:



$\sigma(1) = 2$
$\sigma(2) = 3$
$\sigma(3) = 1$

contribuisce alla somma del determinante il sommando $a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot a_{3,\sigma(3)} = a_{12}\, a_{23}\, \underbrace{a_{31}}_{\substack{\| \\ 0}} = 0$

Qualsiasi altra permutazione scegliamo avrà **ALMENO UNA ENTRATA NELLA PARTE TRIANGOLARE INFERIORE**, che è uguale a zero, e quindi l'intero sommando moltiplica zero e perciò contribuisce zero, **CON L'UNICA ECCEZIONE** della permutazione identità

$\sigma = id$:

$$\begin{cases} \sigma(1) = 1 \\ \sigma(2) = 2 \\ \sigma(3) = 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{31} \end{pmatrix} \rightsquigarrow a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)}\, a_{3,\sigma(3)} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$$

Esempio: $n=1$ $\sigma:\{1\}\to\{1\}$, l'unica biezione possibile è l'identità $\sigma(1):=1$, e infatti $\det\left((a_{11})\right) = a_{11}$ ✓

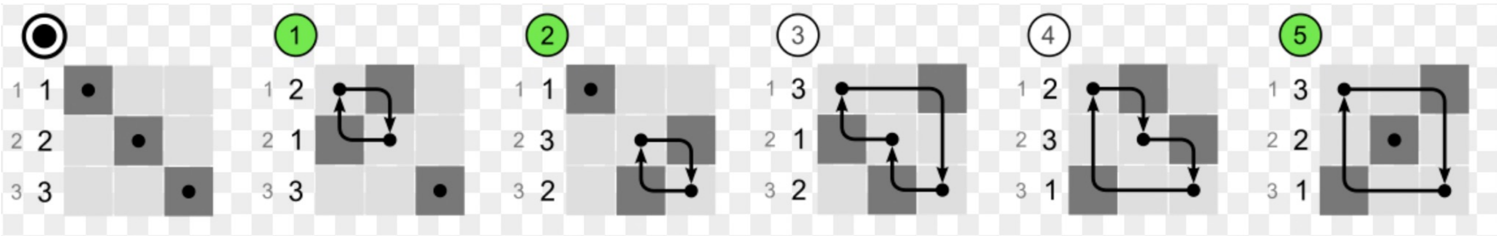
Esempio: $n=2$ $\sigma:\{1,2\}\to\{1,2\}$ allora ci sono 2 biezioni

$\sigma_1 = id$: $id(1)=1$, $id(2)=2$ $\quad I(id)=0 \Rightarrow (-1)^{I(id)} = +1$

$\sigma_2 =$ una inversione: $\sigma_2(1)=2$, $\sigma_2(2)=1$ $\quad (-1)^{I(\sigma_2)} = -1$

Infatti
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (+1)\cdot a_{1,id(1)}\cdot a_{2,id(2)} + (-1)\,a_{1,\sigma_2(1)}\cdot a_{2,\sigma_2(2)}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad ✓$$

Esempio: $n=3$ $\sigma:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ ci sono 6 biezioni.



$(k) \leftrightarrow I(\sigma)$ è dispari $\updownarrow$ $(-1)^{I(\sigma)} = -1$

$$\det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

PARI DISPARI DISPARI PARI PARI DISPARI

Esempio: $n=4$

Ci sono $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{24}$ permutazioni

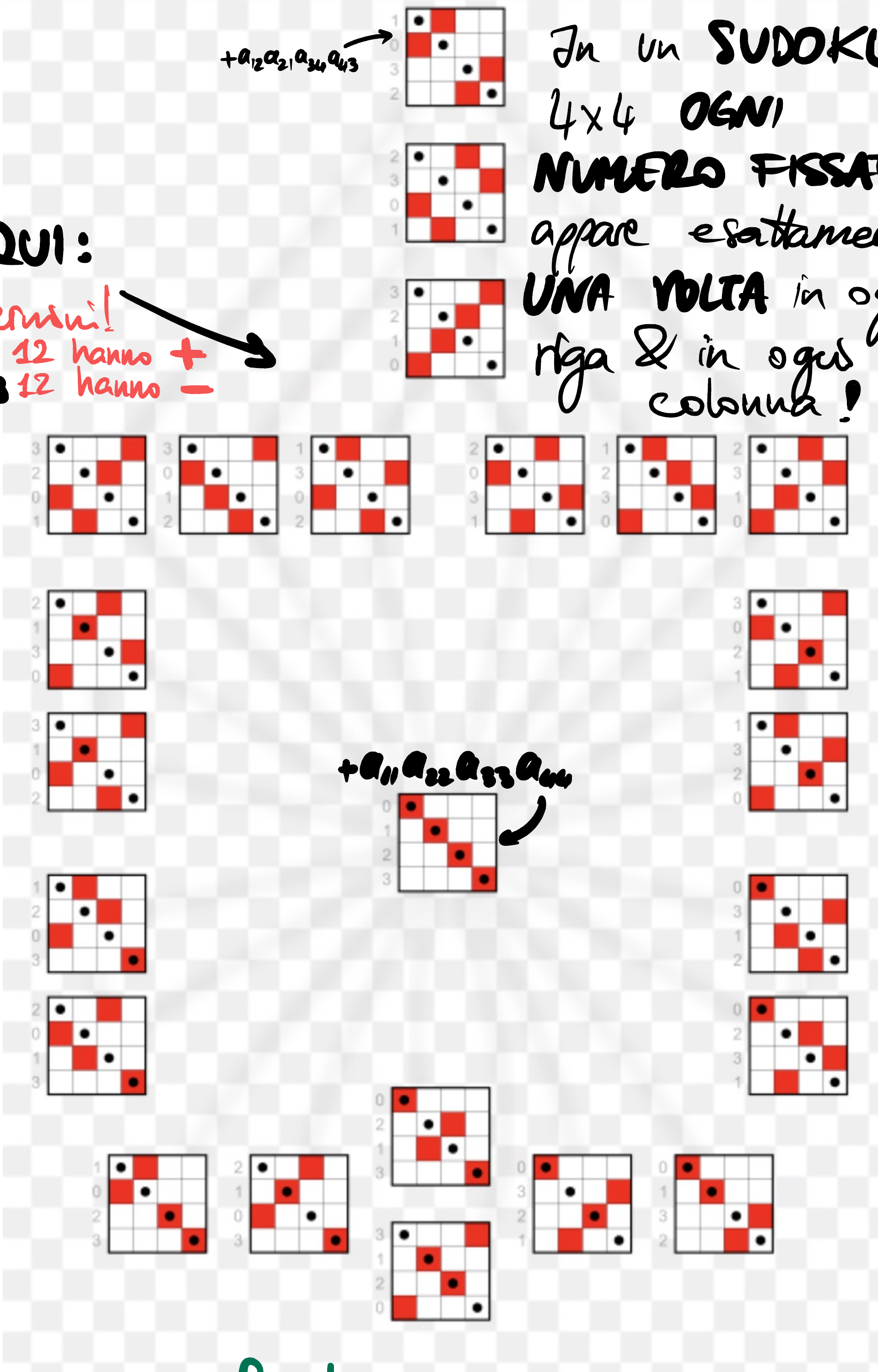
$\sigma : \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$ **ECCOLE QUI:**

ESERCIZIO! Scrivere tutti i 24 termini!

$$\det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$$

12 hanno $+$
12 hanno $-$

$+ \dots$



In un **SUDOKU** 4×4 **OGNI NUMERO FISSATO** appare esattamente **UNA VOLTA** in ogni riga & in ogni colonna!

L'unico vero modo per capire è farlo!

TEOREMA $A \in M_n(K)$ SEMPRE QUADRATA IN TUTTA L'UNITÀ 6 ALTRIMENTI NON HA SENSO PRENDERE IL DET

$$\det(A) \neq 0 \iff \text{rank}(A) = n \iff \exists A^{-1}$$

GIÀ VISTO IN TEOREMA PRECED. DIMOSTRATA ($\Leftarrow$) E RIMANDATO AL SERNESI PER ($\Rightarrow$).

Dim.: Se $\text{rank}(A) = n$, allora consideriamo la sua forma scala $\tilde{A}$. Chiaramente $\text{rank}(\tilde{A}) = \text{rank}(A) = n$. D'altra parte dalla Def 4 e dalla dimostrazione del punto ii) del corollario sopra si ha che:

$$\det(\tilde{A}) = (-1)^{\#OE3} \cdot \det(A)$$

$= $ NUMERO DI VOLTE CHE SONO STATE SCAMBIATE RIGHE DURANTE LA RIDUZ. A SCALA

$\tilde{A}$ è **QUADRATA** & ha **n PIVOTS** [in particolare tutti $\neq 0$] $\Rightarrow \tilde{A}$ ha tutti i PIVOTS sulla diagonale principale ed è **TRIANGOLARE SUPERIORE**. Dal punto iv) nel corollario sopra:

$$\det(\tilde{A}) = \underbrace{\tilde{a}_{11}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\tilde{a}_{22}}_{\neq 0} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\tilde{a}_{nn}}_{\neq 0} \neq 0$$

Quindi $\det(A) = (-1)^{\pm 1} \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{jj} \neq 0 \Rightarrow \det(A) \neq 0$.

Viceversa, supponiamo $\det(A) \neq 0$. Con lo stesso ragionamento siccome $\det(A) = (-1)^{\pm 1} \det(\tilde{A})$ allora si ha che $\det(\tilde{A}) \neq 0$
Ma $\det(\tilde{A}) = \tilde{a}_{11} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{nn}$ e dev'essere non nullo.
Questo implica che TUTTI GLI ELEMENTI $\tilde{a}_{jj} \neq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n$.
E siccome la matrice è in forma scala, tutti gli $\tilde{a}_{jj}$ sono pivots. Quindi ci sono n pivots, e più di n sicuramente non possono essere, perciò $\mathrm{rank}(A) = n$.

$\square$

COR $\mathrm{rank}(A) = \max \{ \text{ordine di } B \}$ tra tutte le sottomatrici quadrate B tali che $\det(B) \neq 0$

Dim.: Segue immediatamente dalla Def 3 del RANGO e dal teorema precedente [rango massimo $\Rightarrow \det \neq 0$].

Esempio: $n=5$

TANTI ZERI SU QUESTA COLONNA!

LAPLACE sulla 3^a colonna: Def 1, $j=3$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 5 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ -9 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = (-1)^{2+3}\cdot(-3)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ -9 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def 1, $j=3$

Def 1, $j=4$

$$\Rightarrow \det(A) = 3\cdot(-1)^{4+3}\cdot 4\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \\ -9 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -12\cdot(-1)^{2+3}\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= 24\cdot\big(8\cdot 1-(-1)(-9)\big) = -24$$ ✓