



Calcolare A^{-1} tramite il Determinante

Q: Cosa possiamo dire del determinante dell'inversa?

R: Useremo il teorema di BINET $\leftarrow$ "IL DETERMINANTE DEL PRODOTTO È IL PRODOTTO DEI DETERMINANTI"
Se A invertibile:

$$I_n = A \cdot A^{-1} \Rightarrow 1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \overset{K}{\underbrace{\det(A)}} \cdot \overset{K}{\underbrace{\det(A^{-1})}}$$

Da cui:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

NON PUÒ ESSERE
ZERO PERCHÉ
 A È L'INVERSA
DELLA SUA INVERSA
 $\Rightarrow A^{-1}$ INVERTIBILE
 $\Rightarrow \det(A^{-1}) \neq 0$.

MA ANCHE PERCHÉ
UN CAMPO NON HA
ZERO-DIVISORI.

PROP $A \cdot {}^t(\text{cof}(A)) = \det(A) \cdot I_n$

In particolare, nel caso in cui $\det(A) \neq 0$ (ovvero $\exists A^{-1}$)
allora si può CALCOLARE L'INVERSA ESPLICITAMENTE COME:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t(\text{cof}(A))$$

MOLTO
UTILE 

Dim.: Possiamo riscrivere le tesi $I_n \cdot \det(A) = A \cdot {}^t(\text{cof}(A))$ espandendo il prodotto riga per colonna:

$$\forall i, j: \det(A) \cdot \delta_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (\text{cof}(A))_{jk} \stackrel{\text{DEF DI COPATTORE}}{=} \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} \det(\underbrace{A_{(j)}^{(\hat{k})}}_{=A_{jk}})$$

Dato che abbiamo δ_{ij} nell'espressione, distinguiamo $i=j$ e $i \neq j$.

CASO $i=j$: Allora troviamo $\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} \det(A_{ik})$ che è proprio la Def 2 [Laplace per righe].

CASO $i \neq j$: Allora troviamo

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} \det(A_{jk}) = \det\left(A \left(\overbrace{A_{(i)} \mapsto A_{(j)}} \right)\right) = 0$$

NON È UN'OPERAZIONE ELEMENTARE!

COR SOPRA PUNTO ii).

ABBIAMO SOSTITUITO ALLA i -ESIMA RIGA LA j -ESIMA RIGA, QUINDI LA MATRICE RESULTANTE HA DUE RIGHE UGUALI, E QUINDI IN PARTICOLARE DUE RIGHE PROPORZIONALI.



Esempio: $n=2$ [Dimostrazione delle formule 2×2]

PRESENTATA
ALL' INIZIO
DEL CORSO

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

USIAMO FORMULA PER DETERMINANTE
& CALCOLIAMO MATRICE COFATTORE (A).

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t \text{cof}(A) = \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \cdot {}^t \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$
$$= \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

TRASPONIAMO

$$\boxed{\text{COR}} \quad \det(\text{cof}(A)) = \det(A)^{n-1} \quad [\text{se } \exists A^{-1}]$$

Dim.: Applicando la proposizione sopra e le varie proprietà del determinante che abbiamo visto:

$$\det(A)^{-1} = \det(A^{-1}) = \det\left[\frac{1}{\det(A)} {}^t\text{cof}(A)\right] = (\det(A)^{-1})^n \cdot \det({}^t\text{cof}(A))$$

↑
COROLLARIO
DI BINET

↑
det (PROPOSIT. SCORSA)

↑
LO SCALARE $\det(A)$
MOLTIPLICA OGNUNA
DELLE n COLONNE

$$\det({}^tB) = \det(B)$$

$$\downarrow = \det(A)^{-n} \cdot \det(\text{cof}(A))$$

Quindi moltiplicando per $\det(A)^n$ da entrambi i lati
si ottiene la tesi



COR [Applicazione ai sistemi lineari: **LA REGOLA DI CRAMER**]

$$\left. \begin{array}{l} Ax=b \\ A \in M_n(K) \\ \exists A^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists! \text{ soluzione ed esplicitamente:}$$

$$s_i = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A(A^{(i)} \mapsto b))$$

Dim.: Se A è invertibile allora ha rango massimo quindi il rango della matrice completa non può essere maggiore. Allora per **ROUCHÉ-CAPELLI** LA SOLUZIONE ESISTE ED È UNICA ed è:

$$s_i = (A^{-1} \cdot b)_i = \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} \det(A_{ki}) \cdot b_k = \det(A(A^{(i)} \mapsto b))$$

□

Esempio:

$$\begin{cases} x + 0 + 2z = 1 \\ -x + 3y + z = 0 \\ x + 0 + 7z = 1 \end{cases}$$

Parto da questo sistema:
lo vogliamo risolvere con
IL METODO DI CRAMER

Matrice
Associate

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} =: A$$

Calcoliamo prima $\det(A)$

2 GHIOTTI ZERI SULLA SECONDA
COLONNA! CI CONVIENE
ALLORA APPLICARE
LAPLACE
SULLA SECONDA
COLONNA
Def 1 con $j=2$

$$\Rightarrow \det(A) =$$

$$= 0 \cdot (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + 3 \cdot (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a_{12} $\text{cof}(A)_{12}$ a_{22} $\text{cof}(A)_{22}$ a_{32} $\text{cof}(A)_{32}$

$$= 3(1 \cdot 7 - 2 \cdot 1) = 15 \Rightarrow \det(A) = 15$$

Sappiamo che esiste ed è unica la soluzione $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$: $As = b$.

$$\begin{cases} s_1 = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det \begin{pmatrix} b & A^{(2)} & A^{(3)} \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{15}{15} = 1 \\ s_2 = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det \begin{pmatrix} A^{(1)} & b & A^{(3)} \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot 5 = \frac{1}{3} \\ s_3 = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} & b \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow s = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$
è l'unica
soluzione del
sistema

Se abbiamo più variabili che equazioni linearmente indep., possiamo sempre prima INSERIRE IL NUMERO DI PARAMETRI CHE CI SERVE, e poi APPLICARE CRAMER.

Esempio:

$$\begin{cases} x + y - 5z = 6 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$$

SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

ABBIAMO 3 VARIABILI E 2 EQUAZIONI LINEARI INDIP.

⇒ CI SERVONO $3 - 2 = 1$

PARAMETRI DA INSERIRE (NON IMPORTA SU QUALE VARIABILE!)

$$z := t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x + y = 5t + 6 \\ 3x - y = -t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}!$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5t+6 \\ 2-t \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -1 - 3 = -4 \neq 0$$

Troviamo l'unica soluzione per t fissato:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{1}{-4} \cdot \det \begin{pmatrix} 6+5t & 1 \\ 2-t & -1 \end{pmatrix} = 2+t \\ s_2 = \frac{1}{-4} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 6+5t \\ 3 & 2-t \end{pmatrix} = 4(1+t) \end{cases}$$

Mettendo tutto insieme:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ 4(1+t) \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \dim(S) = 1$$