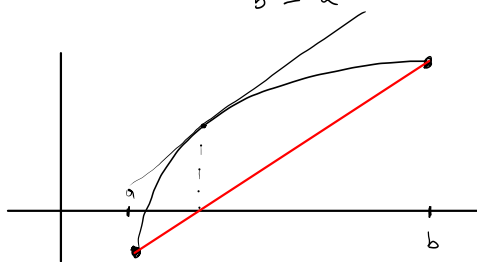


31 ottobre

Teor (Rolle) Se $f \in C^0([a, b])$, $a, b \in \mathbb{R}$,
 f derivabile in (a, b) e se $f(a) = f(b)$, allora $\exists$
 $c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = 0$

Teor (Lagrange) Se $f \in C^0([a, b])$, f derivabile in (a, b) ,
allora $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Dim Introduciamo una nuova funzione

$F(x) = f(x) + A(x - a)$ dove voglio
scegliere A in modo tale che
 $F(b) = F(a)$

$$f(b) + A(b - a) = f(a) \Rightarrow A = \frac{f(a) - f(b)}{b - a} = - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

$$F(b) = F(a) = f(a), \quad F \in C^0([a, b]) \quad e$$

F è derivabile in (a, b) .

Per Rolle applicato ad F so che $\exists c \in (a, b)$
t.c. $F'(c) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \underbrace{(x - a)'}_1$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall x \in (a, b).$$

$$F'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

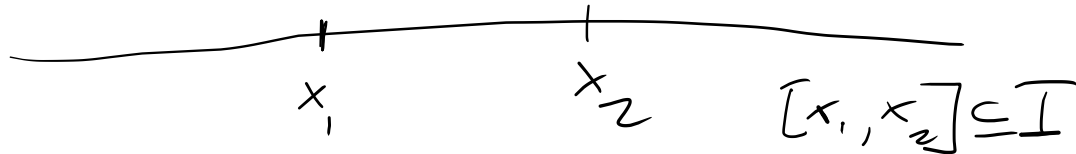
$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollari

$$(f'(x) \leq 0)$$

1) Se $f \in C^0(I)$ e se $f'(x) \geq 0$ ~~per ogni~~ ⁱⁿ I
allora f è una funzione crescente in I .
(decrecente)

Dim Si tratta di dimostrare che per $x_1 < x_2$ due punti in I allora $f(x_1) \leq f(x_2)$ *



Si ottiene * osservando che $f|_{[x_1, x_2]} \in C^0([x_1, x_2])$

ed inoltre $(x_1, x_2) \subseteq \overset{\circ}{I}$ da cui f
è derivabile in (x_1, x_2) . Per applicare

Lagrange concludendo che $\exists c \in (x_1, x_2) \subseteq \overset{\circ}{I}$
t.c. $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Se invece per ipotesi $f'(c) \geq 0$ segue

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{> 0}} \geq 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

2) Se $f \in C^0(I)$ e se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ ($f'(x) < 0$)

allora f è strettamente crescente
(decrecente)

Dim Si tratta di dimostrare che per ogni
coppia $x_1 < x_2$ in I si ha $f(x_1) < f(x_2)$.

Anche qui si applica Lagrange a $f|_{[x_1, x_2]}$
Esiste $c \in (x_1, x_2) \stackrel{\circ}{=} I$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Siccome $f'(c) > 0$ segue

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{> 0}} > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Esercizio Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$, sia $X \subseteq \mathbb{R}$
con $\text{card } X = \aleph^{\aleph}$. Supponiamo che

$f'(x) > 0 \quad \forall x \notin X$. Dimostrare che
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente.

Osservazioni Nel Corollario 2 abbiamo dimostrato

che se $f \in C^0(I)$ e $f' > 0$ in $\overset{\circ}{I} \Rightarrow f$

è strettamente crescente in I .

Notare che se $f \in C^0(I)$ è derivabile in $\overset{\circ}{I}$

e se f è strettamente crescente allora non

è detto che $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{I}$

Esempio $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R} (= \overset{\circ}{\mathbb{R}})$

ma $f'(x) = 3x^2 \Big|_{x=0} = 0$

Corollario 3 Sia $f \in C^0(I)$ e derivabile in $\overset{\circ}{I}$.

Sono equivalenti

1) f è una funzione costante

2) $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{I}$.

Dim In dimostrazioni di questo tipo si procede

dimostrando $1) \Rightarrow 2)$

e $2) \Rightarrow 1)$

Per primo caso $1) \Rightarrow 2)$

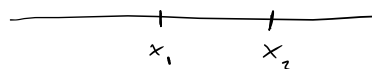
$$\text{Se } f(x) \equiv c \Rightarrow f'(x) = (c)' = 0$$

Ora dimostriamo che $2) \Rightarrow 1)$

Ho una $f \in C^0(I)$ t.c. $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{I}$.

Voglio dimostrare che f è costante.

f sarà costante se



$f(x_1) = f(x_2) \quad \forall$ coppia $x_1 < x_2$ in I .

Sappiamo che per ogni coppia $x_1 < x_2$ in I

possiamo applicare Lagrange $f|_{[x_1, x_2]}$. Pertanto $\exists$

$$c \in (x_1, x_2) \overset{\circ}{\subset} I \text{ t.c. } f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Allora $f'(c) = 0$

$$\left(\begin{array}{l} [0, 2) \\ [0, 2) = (0, 2) \end{array} \right)$$

Quindi $\forall x_1 < x_2$ in I

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Corollario 4 (Teorema di Cauchy)

Siano $f, g \in C^0([a, b])$, f' e g' definite in (a, b)

con $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Allora $\exists c \in (a, b)$ t.c.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Osservazioni 1) Cauchy generalizza Lagrange. Infatti,
per $g(x) \equiv x$ ottengo Lagrange.

2) $g(b) - g(a) \neq 0$ perché per Rolle, e overni
 $g(b) - g(a) = 0$ ~~non~~ esistibile $c \in (a, b)$ t.c.
 $g'(c) = 0$, ma questo non succede per ipotesi.

Le regole dell'Hôpital. Riguardano limiti di
 frazioni della forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Distingueremo tre regole dell'Hôpital, due
 del tipo $\frac{0}{0}$ ed una del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Teor (I° regola $\frac{0}{0}$) Siano f, g definite in I ,
 $x_0 \in I$, f e g differenziabili in x_0 con $g'(x_0) \neq 0$.
 E sia anche $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

$$\text{Allora } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Osservazione 1) Se non $g'(x_0) \neq 0$ esiste un
 intervallo con centro x_0 all'interno del quale
 se $x \neq x_0$ si ha $g(x) \neq g(x_0) = 0$

Se questo non fosse vero esisterebbe una successione
 $x_n \rightarrow x_0$ in I di punti dove $g(x_n) = 0 \forall n$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} = 0$$

ma questo non può succedere perché per ipotesi
 $0 \neq g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$

$$\text{Dim } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$\text{Es } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\lg(1+x) - \lg 2}$$

$$\text{qui } D(e^x - e) = \mathbb{R}, \quad D(\lg(1+x) - \lg 2) = (-1, +\infty)$$

$$e^x - e \Big|_{x=1} = 0$$

$$\lg(1+x) - \lg 2 \Big|_{x=1} = 0$$

$$(e^x - e)' = (e^x)' = e^x$$

$$(\lg(1+x) - \lg 2)' = (\lg(1+x))' =$$

$$= \lg'(1+x) \quad \underbrace{(1+x)'}_1 = \frac{1}{1+x} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\lg(1+x) - \lg 2} = \frac{e}{\frac{1}{2}} = 2e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(\sin x)' = \cos(x) \Big|_{x=0} = 1$$

$$(x)' = 1$$

Teorema (2° regola $\frac{0}{0}$) Siano $f, g: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dove

sia x_0 è un punto di accumulazione di $I \setminus \{x_0\}$

(qui si può avere anche $x_0 = \pm \infty$).

Supponiamo che f e g sono derivabili in $I \setminus \{x_0\}$

Siano $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$

e $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$

E infine supponiamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Allora, se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$