ESERCIZI SU SISTEMI LINEARI
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2024/25

Esercizio 1

Usando l'algoritmo di gradinizzazione di Gauss, **calcola** (quando possibile) una soluzione del sistema lineare $A \cdot X = b$, dove

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & -8 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -6 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -24 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 17 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -9 & 0 \\ -2 & -1 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Risoluzione. Consideriamo la matrice completa $A' = (A|b)$ e applichiamo l'algoritmo di Gauss per trasformarla in una matrice a gradini:

$$A' = \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

(1-i) Il primo elemento non nullo della prima riga, $a_{1,1} = -1$, è nella prima colonna quindi non dobbiamo scambiare nessuna riga, diventerà il nostro primo pivot.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{-1} & 2 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Rinormalizziamo il pivot dividendo la prima riga per $a_{1,1}$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

(1-ii) Siccome il secondo elemento della prima colonna $a_{2,1} = 1$ è non nullo, allora sostituiamo la seconda riga con:

$$A'_{(2)} - a_{2,1}A'_{(1)}.$$

Dato che $a_{2,1} = 1$, alla seconda riga sostituiamo $A'_{(2)} - A'_{(1)}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

(2-i) Le entrate sotto al primo pivot sono tutte nulle, quindi procediamo con la scelta del prossimo pivot. Siccome $a_{2,2} = 2$ è non nullo non serve scambiare nessuna riga, diventerà il secondo pivot.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Rinormalizziamo il pivot, dividendo la seconda riga per $a_{2,2}$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

(2-ii) Siccome il terzo elemento della seconda colonna $a_{3,2} = -1$ è non nullo, allora sostituiamo la terza riga con:

$$A'_{(3)} - a_{3,2}A'_{(2)}.$$

Dato che $a_{3,2} = -1$, alla terza riga sostituiamo $A'_{(3)} + A'_{(2)}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

(3-i) Le entrate sotto al secondo pivot sono tutte nulle, quindi procediamo con la scelta del prossimo pivot. Notiamo che $a_{3,3} = 1$ è il terzo pivot e abbiamo ottenuto una matrice a gradini. L'algoritmo si arresta.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

In questo caso il sistema è compatibile quindi possiamo procedere alla ricerca delle soluzioni.

Il sistema lineare associato alla matrice a scala ottenuta è:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \quad - x_4 + 4x_5 = 1 \\ \qquad x_2 + \quad + x_4 - 3x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

I parametri liberi sono x_4, x_5 (le variabili che non sono in corrispondenza con i pivot). Per ottenere una soluzione particolare $\tilde{s}$ del sistema ci basta sostituire a x_4 e x_5 due valori arbitrari e poi risolvere per sostituzione dal basso verso l'alto. Scegliamo $x_4 = -1$ e $x_5 = 0$, otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1 = 1 \\ x_2 - 1 = 0 \\ x_3 - 1 = -1 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

Determina i valori di $t \in \mathbb{R}$ affinché i sistemi lineari $A \cdot X = b$ dati dalle matrici seguenti siano compatibili. Per tali valori, **determina** tutte le soluzioni del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -8+t \\ 4+t \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1-t \\ 2 \\ -2 \\ 1+t \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & -7 & -4 \\ -5 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Risoluzione. Consideriamo la matrice completa $A' = (A|b)$ e applichiamo l'algoritmo di Gauss per trasformarla in una matrice a gradini.

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -6 & -1 & -1-t \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1+t \end{array}\right)$$

(1-i) Il primo elemento non nullo della prima riga, $a_{1,1} = 1$, è nella prima colonna quindi non dobbiamo scambiare nessuna riga, diventerà il nostro primo pivot (non serve rinomalizzare).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & -6 & -1 & -1-t \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1+t \end{array}\right)$$

(1-ii) Siccome il quarto elemento della prima colonna $a_{4,1} = -1$ è non nullo, allora sostituiamo la quarta riga con $A'_{(4)} + A'_{(1)}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & -6 & -1 & -1-t \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(2-i) Le entrate sotto al primo pivot sono tutte nulle, quindi procediamo con la scelta del prossimo pivot. Siccome $a_{2,2} = 1$ è non nullo non serve scambiare nessuna riga, diventerà il secondo pivot (non serve rinomalizzare).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -6 & -1 & -1-t \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(2-ii) Siccome il terzo elemento della seconda colonna $a_{3,2} = -1$ è non nullo, allora sostituiamo la terza riga con $A'_{(3)} + A'_{(2)}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -6 & -1 & -1-t \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(3-i) Le entrate sotto al secondo pivot sono tutte nulle, quindi procediamo con la scelta del prossimo pivot. Notiamo che dobbiamo scambiare la terza e la quarta riga:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -6 & -1 & -1-t \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Rinomalizzando otteniamo una matrice a gradini e l'algoritmo si arresta:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -6 & -1 & -1-t \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

In questo caso il sistema è compatibile per ogni $t \in \mathbb{R}$ quindi possiamo procedere alla ricerca delle soluzioni.

Il sistema lineare associato alla matrice a scala ottenuta è:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = -1 - t \\ x_2 - 4x_4 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Non ci sono parametri liberi, quindi la soluzione del sistema è unica. Risolvendo per sostituzione dal basso verso l'alto, otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 - t \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

Applica la procedura di gradinizzazione alle seguenti matrici C e alle loro trasposte. **Compara** il numero di righe non nulle ottenute alla fine della gradinizzazione di una matrice e della sua trasposta: cosa noti?

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Risoluzione. Applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

(1-i) Il primo elemento non nullo della prima colonna è nella prima riga, $a_{1,1} = 1$, quindi non dobbiamo scambiare nessuna riga e diventerà il nostro primo pivot.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Il pivot è 1 quindi non serve rinormalizzare.

(1-ii) Siccome il secondo elemento della prima colonna $a_{2,1} = -1$ è non nullo, allora sostituiamo la seconda riga con $C_{(2)} - a_{2,1}C_{(1)} = C_{(2)} + C_{(1)}$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

(1-iii) Siccome il terzo elemento della prima colonna $a_{3,1} = 1$ è non nullo, allora sostituiamo la terza riga con $C_{(3)} - C_{(1)}$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -5 \\ 5 & -2 & 2 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

(1-iv) Siccome il quarto elemento della prima colonna $a_{4,1} = 5$ è non nullo, allora sostituiamo la quarta riga con $C_{(4)} - 5C_{(1)}$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & 12 & -15 \end{pmatrix}$$

(2-i) Le entrate sotto al primo pivot sono tutte nulle, quindi procediamo con la scelta del prossimo pivot. Siccome $a_{2,2} = 4$ è non nullo non serve scambiare nessuna riga, diventerà il secondo pivot.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{4} & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & 12 & -15 \end{pmatrix}$$

Rinomalizziamo il pivot dividendo la seconda riga per 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & 12 & -15 \end{pmatrix}$$

(2-ii) Siccome il terzo elemento della seconda colonna $a_{3,2} = 1$ è non nullo, allora sostituiamo la terza riga con $C_{(3)} - C_{(2)}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 4 & -\frac{23}{4} \\ 0 & 3 & -3 & 12 & -15 \end{pmatrix}$$

(2-iii) Siccome il quarto elemento della seconda colonna $a_{4,2} = 3$ è non nullo, allora sostituiamo la quarta riga con $C_{(4)} - 3C_{(2)}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 4 & -\frac{23}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{21}{4} & 12 & -\frac{69}{4} \end{pmatrix}$$

(3-i) Le entrate sotto al secondo pivot sono tutte nulle, quindi procediamo con la scelta del prossimo pivot. Siccome $a_{3,3} = -\frac{7}{4}$ è non nullo non serve scambiare nessuna riga, diventerà il terzo pivot. Moltiplichiamo la terza per $-\frac{4}{7}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{16}{7} & \frac{23}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{21}{4} & 12 & -\frac{69}{4} \end{pmatrix}$$

(3-ii) Notiamo che vale la seguente relazione $C_{(4)} = -\frac{21}{4}C_{(3)}$ quindi otteniamo la seguente matrice a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{16}{7} & \frac{23}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algoritmo si arresta e abbiamo ottenuto 3 righe non nulle.

Applicando l'algoritmo alla matrice:

$$^tC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene la matrice a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove il numero di righe non nulle è sempre 3.

Esercizio 4

Computa il numero massimo di operazioni (somme e moltiplicazioni) che possono essere necessarie per svolgere l'algoritmo di gradinizzazione su una matrice 3×4 a coefficienti in un campo K.