Tutorato di Analisi 1

Foglio di esercizi 3

1. Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{3x-2}{2x+3}-\dfrac{3x+2}{2x-3}\right)$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2-x}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\tan x}$

   (h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$

2. Dire se le seguenti funzioni sono continue nel punto $(0,0)$:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

3. Verificare direttamente la continuità delle seguenti funzioni nel punto $(0,1)$ (trovando esplicitamente per ogni ε un opportuno δ che soddisfa la definizione di continuità):

   (a) $\dfrac{x}{y}$

   (b) $\dfrac{x+y}{x-y}$

   (c) $\dfrac{\sin x}{1+y}$

4. Trovare un esempio per ciascuno dei seguenti casi o spiegare perché è impossibile.

   (a) Due funzioni f e g, entrambe discontinue in 0, tali che $f+g$ e $f \cdot g$ sono continue in 0.

   (b) Due funzioni f e g tale che f è continua in 0, g non è continua in 0 e $f+g$ è continua in 0.

   (c) Due funzioni f e g tale che f è continua in 0, g non è continua in 0 e $f \cdot g$ è continua in 0.

   (d) Una funzione f non continua in 0 tale che $f + \frac{1}{f}$ è continua in 0.

   (e) Una funzione f non continua in 0 tale che f^3 è continua in 0.

   (f) Una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ che è continua solo nel punto 0.

   (g) Una funzione f continua su $\mathbf{R}$ tale che $f(\mathbf{R}) = \mathbf{Q}$.