Prop.: sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \dots, v_n \in V$; allora $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi può essere scritto come combinazione lineare degli altri; equivalentemente, se esiste $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che v_j è combinazione lineare di $\underbrace{\{v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n\}}_{v_j \text{ è escluso}}$; equivalentemente se esiste $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $v_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$

Dim: "$\Rightarrow$" supponiamo che $v_1, \dots, v_n$ siano linearmente dipendenti; allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

pertanto esiste $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\lambda_j \neq 0$; dunque

$$v_j = -\frac{1}{\lambda_j}\left(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \dots + \lambda_n v_n\right)$$

ovvero $v_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$

"$\Leftarrow$" supponiamo che per un certo $j \in \{1, \dots, n\}$ valga che

$$v_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$$

allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n \in K$ tali che

$$v_j = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \dots + \lambda_n v_n$$

quindi

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1} v_{j-1} - v_j + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

e pertanto $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti dato che il coefficiente di v_j in questa combinazione lineare che restituisce il vettore nullo è -1, e $-1 \neq 0$ in K.

Def: sia V uno spazio vettoriale su K; se esiste un sistema di generatori $\{v_1, \dots, v_n\}$ <u>finito</u> di V, allora V si dice <u>finitamente generato</u>.

Teorema: sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato; un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq V$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V se e solo se ogni $v \in V$ si può scrivere in maniera unica come combinazione lineare di elementi di $\mathcal{B}$.

Dim: "$\Rightarrow$" sia $\mathcal{B}$ una base di V, dimostriamo che ogni $v \in V$ si può scrivere in maniera unica come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$; dato che $\mathcal{B}$ è una base, è in particolare un sistema di generatori e dunque se $v \in V$, esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

rimane da dimostrare che questa scrittura è unica; supponiamo quindi che possiamo scrivere

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

con $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$; vogliamo mostrare che $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$; per ipotesi

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$$

dato che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, deve essere $\lambda_1 - \mu_1 = 0, \dots, \lambda_n - \mu_n = 0$, ovvero $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$.

"$\Leftarrow$" supponiamo che ogni $v \in V$ si possa scrivere in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$; dobbiamo dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di V, ovvero che $v_1, \dots, v_n$ sono un sistema di generatori e sono linearmente indipendenti; dato che ogni $v \in V$ si può scrivere come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$, allora questi ultimi sono un sistema di generatori per V; rimane da dimostrare che sono linearmente indipendenti; supponiamo che esistano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

d'altro canto, vale sempre che

$$0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$$

pertanto abbiamo scritto 0 come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ in due modi; per ipotesi, questi due modi devono coincidere, e quindi $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$.

Def: sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato; sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e sia $v \in V$; allora possiamo scrivere in modo unico $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$; la n-upla

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$$

è detta la n-upla delle <u>coordinate</u> di v <u>rispetto</u> a $\mathcal{B}$.

Esempio: in K^n possiamo considerare

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

si può dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di K^n; essa si dice la <u>base standard</u> di K^n ed è denotata $\mathcal{E}$; per ogni vettore $v \in K^n$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, le sue coordinate rispetto alla base standard sono $v_1, \dots, v_n$.

Esempio: in $M_{m,n}(K)$ possiamo considerare

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{0} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & \mathbf{0} & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \mathbf{0} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

si può dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di $M_{m,n}(K)$; questa base è costituita da $m \cdot n$ elementi.