Oss.: in K^n, le nozioni di sistema di generatori e di indipendenza lineare si possono tradurre in termini di sistemi lineari; infatti, se $\{v_1, \dots, v_s\} \subseteq K^n$ un sistema di generatori di K^n, allora per ogni $v \in K^n$ esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ tali per cui $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s$; se scriviamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, v_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

allora la scrittura $v = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i$ è equivalente a

$$\begin{cases} b_1 = \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_s a_{1s} \\ \vdots \\ b_n = \lambda_1 a_{n1} + \dots + \lambda_s a_{ns} \end{cases}$$

ovvero, in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{ns} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

in altre parole, abbiamo un sistema del tipo $AX = b$, che è compatibile qualsiasi sia b;
similmente, dire che $v_1, \dots, v_s$ sono linearmente indipendenti significa dire che il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{ns} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ha come unica soluzione $x_1 = 0, \dots, x_s = 0$.

Trattiamo ora alcuni fondamentali risultati riguardo alle basi.

Teorema: (teorema di estrazione di una base)
sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato, sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ un sistema di generatori di V. Allora esiste $B \subseteq \{v_1, \dots, v_k\}$, tale che B è una base di V.

Dim.: (idea) costruiamo la base cercata tramite il cosiddetto algoritmo dello scarto, per il quale supponiamo che $V \neq \{0\}$

1. inizializziamo $B = \{\}$
2. consideriamo v_1; se $v_1 \neq 0$, allora lo aggiungiamo a B, altrimenti lo scartiamo;
3. consideriamo v_2; se $v_2 \notin \text{span}(v_1)$, allora lo aggiungiamo a B, altrimenti lo scartiamo;
4. se $v_3 \notin \text{span}(v_1, v_2)$, allora lo aggiungiamo a B, altrimenti lo scartiamo
5. ripetiamo fino a v_k

si dimostra che l'insieme B così ottenuto è una base di V.

Teorema: (teorema del completamento o dell'estensione)
sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato e siano $\{v_1, \dots, v_p\}$ vettori linearmente indipendenti, allora esiste una base B di V tale che $\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq B$ (ovvero $\{v_1, \dots, v_p\}$ possono essere completati a una base).

Dim.: (idea) dato che V è finitamente generato, esiste $\{w_1, \dots, w_k\}$ un sistema di generatori di V; allora anche $\{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_k\}$ è un sistema di generatori di V; applichiamo ora l'algoritmo dello scarto a quest'ultimo sistema di generatori, ottenendo una base B di V; analizzando come funziona l'algoritmo dello scarto e tenendo in considerazione che $v_1, \dots, v_p$ sono linearmente indipendenti, otteniamo che $\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq B$.

I due risultati precedenti chiariscono come una base di uno spazio vettoriale possa essere pensata equivalentemente come:
* un sistema di generatori minimale
* un insieme linearmente indipendente massimale

Lemma: (lemma di Steinitz)
sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato e sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, allora per ogni $k > n$ e per ogni scelta di vettori $w_1, \dots, w_k \in V$ vale che $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente dipendenti.

Dim.: (idea) per ipotesi vale che

$$\begin{aligned} w_1 &= c_{11} v_1 + \dots + c_{n1} v_n \\ w_2 &= c_{12} v_1 + \dots + c_{n2} v_n \\ &\vdots \\ w_k &= c_{1k} v_1 + \dots + c_{nk} v_n \end{aligned} \qquad \text{con } c_{ij} \in K$$

si può mostrare che $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente dipendenti se e solo se, definita

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \dots & c_{nk} \end{pmatrix},$$

il sistema lineare omogeneo $CX = 0$ ammette una soluzione non tutta nulla; osserviamo che la matrice C ha n righe e k colonne e per ipotesi $k > n$; se ora applichiamo l'algoritmo di Gauss a C, otteniamo una matrice $\tilde{C}$ a scala della forma

$$\tilde{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & * \end{pmatrix}}_{k} \Bigg\} n$$

dato che $k > n$, almeno uno degli "scalini" deve avere lunghezza maggiore di 1, e quindi il sistema $\tilde{C}X = 0$ (che ha le stesse soluzioni di $CX = 0$) ha soluzioni che dipendono almeno da un parametro libero, e quindi ne si può costruire una non tutta nulla, il che mostra che $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente dipendenti.

Teorema: sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato; siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ due basi di V; allora

$$\boxed{n = m}$$

(equivalentemente tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso numero di elementi)

Dim: dato che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base, allora $m \leq n$ per il lemma di Steinitz visto che $\{w_1, \dots, w_m\}$ è linearmente indipendente; scambiando i ruoli di $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ otteniamo che $n \leq m$; pertanto $n = m$.

Def.: sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato
- se $V = \{0\}$, definiamo la dimensione di V come zero (e definiamo l'insieme vuoto come una sua base)
- se $V \neq \{0\}$, definiamo la dimensione di V come il numero di elementi di una sua qualsiasi base (questa definizione è ben posta visto il risultato precedente)

indichiamo la dimensione di V con $\dim V$.

Esempi:
* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ infatti $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$
* $\dim K^2 = 2$ (per lo stesso motivo)
* $\dim K^n = n$ (infatti la base standard ha n elementi)
* $\dim M_{m,n}(K) = m \cdot n$ (una base di $M_{m,n}(K)$ è data dalle matrici che hanno un'unica entrata uguale a 1 e tutte le altre entrate nulle)

Oss.: tutti i risultati precedenti, accanto al concetto di dimensione, si applicano anche ai sottospazi vettoriali.

Prop.: sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato, sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale; allora:
1. $\dim W \leq \dim V$
2. $\dim W = \dim V$ se e solo se $W = V$

Con il concetto di dimensione abbiamo imparato ad associare un numero a uno spazio vettoriale. Ora associeremo un numero a una matrice.

Oss.: se $A \in M_{m,n}(K)$, allora le colonne di A sono elementi di K^m

$$A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in K^m.$$

Def.: sia $A \in M_{m,n}(K)$; definiamo il rango di A, e lo denotiamo $rg(A)$, il numero naturale

$$rg(A) := \dim \underbrace{\text{span}\left(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right)}_{\text{sottospazio di } K^m \text{ generato dalle colonne di } A.}$$

Oss.: se $A \in M_{m,n}(K)$, allora
- $rg(A) \leq m$, infatti $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in K^m$, pertanto $\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq K^m$, pertanto

$$\underbrace{\dim\left(\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})\right)}_{rg(A)} \leq \underbrace{\dim K^m}_{m}$$

- $rg(A) \leq n$ perché A ha n colonne, dunque $\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ è un sottospazio che ha un insieme di generatori ($\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}$) costituito da n elementi; per il teorema dimostrato precedentemente, una base di $\text{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ avrà dunque al più n elementi

in definitiva, $rg(A) \leq \min\{m, n\}$.

Esempio: consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = \dim\left(\text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right)$$

sappiamo che $rg(A) \leq \min\{2, 3\} = 2$
se fosse $rg(A) = 1$, allora tutte le colonne sarebbero proporzionali tra di loro (ovvero ottenibili l'una dall'altra tramite moltiplicazione per uno scalare), ma così non è; quindi $rg(A) = 2$.

Esempio.

$$rg(\mathbb{1}_n) = \dim\left(\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = \dim K^n = n$$

Prop.: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $\tilde{A}$ una matrice ottenuta da A applicando le tre trasformazioni elementari; allora:
1. $rg(A) = rg(\tilde{A})$
2. se $\tilde{A}$ è a scala, allora

$$rg(\tilde{A}) = \text{numero di righe non nulle di } \tilde{A}$$

Prop.: $rg(A) = rg(A^t)$

Questi risultati ci danno un algoritmo per calcolare il rango, ovvero: data una matrice A, la si porta a scala tramite l'algoritmo di gaussianizzazione di Gauss e a quel punto si contano le righe non nulle.