Lezione 4 novembre 2024

lunedì 4 novembre 2024 10:10

Annunci: domani simulazione
OGGI: 16-18 RICEVIMENTO
venerdì 8-10 svolgimento

lunedì 11 : LEZIONE CANCELLATA
martedì 12 : regolare
venerdì 15: no lezione (TUTOR su richiesta)

da lunedì 18: prof. Le [illegible]

da LUNEDÌ 25/11 fino a Natale:
ricevimento 16-18

APPELLI: prossimamente su Moodle e S3

Teorema di de l'Hôpital:

Cons. funzioni $f(x)$ e $g(x)$; supp. che siano derivabili in un intorno di x_0, con derivate continue.
(cioè: $f'(x)$, $g'(x)$ esistono intorno a x_0 e sono funzioni continue)

Supp. che $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to+\infty\\ x\to-\infty}} f(x) = 0 = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to+\infty\\ x\to-\infty}} g(x)$

allora: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to+\infty\\ x\to-\infty}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to+\infty\\ x\to-\infty}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Inoltre: se $g'(x_0) \neq 0$, allora $= \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Oss.: Il caso $x_0 = +\infty$ o pp. $x_0 = -\infty$ infinito è analogo

VARIANTE: Supp. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty = \lim\limits_{x\to x_0} |g(x)|$

allora $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Esempio: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overset{\to 0}{\boxed{e^x-1}}}{\underset{\to 0}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1$

$f(x) = e^x - 1$; $f'(x) = e^x$
$g(x) = x$; $g'(x) = 1$

. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overset{\to+\infty}{\boxed{e^x}}}{\underset{\to+\infty}{\boxed{x^2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overset{+\infty}{\boxed{e^x}}}{\underset{+\infty}{\boxed{2x}}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}\cdot e^x = +\infty$

APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI

CON POLINOMI

TEOREMA DI TAYLOR:

Se f è derivabile n volte su $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, allora $\exists$ un polinomio di grado n : $P_n(x)$ t.c.

$$
\begin{aligned}
P_n(x_0) &= f(x_0)\\
P_n'(x_0) &= f'(x_0)\\
P_n''(x_0) &= f''(x_0)\\
&\vdots\\
P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0)
\end{aligned}
$$

e precisamente

$$
P_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{2\cdot 3}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n
$$

$P_n(x)$ è chiamato
POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE n
di f in x_0.

Se $x_0=0$, il polinomio che si ottiene si dice anche POLINOMIO DI MACLAURIN

$$
P_n(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n
$$

Vediamo ora perchè i polinomi $P_n(x)$ sono considerati dei buoni approssimanti della funzione $f(x)$ "vicino" a x_0:

TEOREMA DI LAGRANGE SUL RESTO:

ⓐ $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Se, inoltre, f è derivabile n+1 volte su $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ allora si ha:

ⓑ $\forall \bar{x} \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\exists$ c compreso tra x_0 e $\bar{x}$ ($c \in (x_0, \bar{x})$ oppure $c \in (\bar{x}, x_0)$, e c dipende da $\bar{x}$) tale che

$$f(\bar{x}) = P_n(\bar{x}) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\bar{x}-x_0)^{n+1}, \text{ cioè:}$$

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\bar{x}-x_0)^{n+1}$$

OSS.: Se $|\bar{x}-x_0| < 1 \Rightarrow |(\bar{x}-x_0)^{n+1}|$ è ancora più piccolo. Quindi il valore $P_n(\bar{x})$ è molto vicino al valore $f(\bar{x})$, in questo caso

Esempio: $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$, ...,

$f^{(n)}(x) = e^x$, ...

Il polinomio di Mac Laurin di e^x (in $x_0 = 0$) è:

$$P_n(x) = \overset{1}{f(0)} + \overset{1}{f'(0)} \cdot x + \overset{1/2}{\frac{f''(0)}{2}} x^2 + \dots + \overset{\frac{1}{n!}}{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}} x^n$$

$$= 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Inoltre, per il Teorema di Lagrange sul resto, abbiamo che $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$, vale

(*) $$e^{\bar{x}} = 1 + \bar{x} + \frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{x}^3}{6} + \dots + \frac{\bar{x}^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}\bar{x}^{n+1}$$

Questo ci permette di approssimare il numero di Nepero e con la precisione che vogliamo:

infatti, nella formula ⊛ inseriamo il valore $\bar{x} = 1$:

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!} + \boxed{\frac{e^c}{(n+1)!}} \quad , \ c \in (0,1)$$

dove $c \in (0,1)$; siccome e^x è una funzione crescente,

abbiamo : $\boxed{e^c < e^1} < 3$, quindi

il resto è : $< \boxed{\frac{3}{(n+1)!}}$

Fissata una tollerenza di errore ε

(ad es. $\varepsilon = 10^{-16}$) se risolvo la diseq.

$$(**) \quad \frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-16}$$, cioè trovo il più

piccolo n t.c. (**) sia soddisfatta, avrò trovato

un polinomio $P_n(x)$ tale che

$$e - P_n(1) \leq 10^{-16}$$

* * *

STUDIO DI GRAFICO
DI FUNZIONE

Data $f(x)$ (es. $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$)

① Determinare il DOMINIO di f

D_f (il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui f è definita)

(es. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$
$= (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$)

② determinare se f è PARI o DISPARI

es. $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+3}{-x-1} = \frac{x^2+3}{-x-1} \begin{array}{l} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{array}$$

non è né pari né dispari

③ Segno, zeri e valore in 0 :

$f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ es.: $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ >0 $\forall x$

$(x-1>0;\ x>1)$ $(x-1<0;\ x<1)$

$\underbrace{f(x)=0}$, $f(0)$ $\Longrightarrow (0, f(0))$ su asse y

soluz $x_1, .., x_k$ corrispondono a punti $(x_1, 0), --, (x_k, 0)$ del grafico (su asse x)

④ limiti per $x \to \pm\infty$

e $x \to$ estremi del dominio (in cui f non è definita)

es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x-1} \underset{\text{de l'Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1} = +\infty$

$x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $= -\infty$

$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty$ $\quad (x^2+3 \to 4)$

$\lim_{x\to1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty$ $\quad (x^2+3 \to 4)$

⑤ Ricerca di PUNTI CRITICI, MAX & MIN locali

$f'(x)$: > 0
$= 0$
< 0

es.: $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+3)' \cdot (x-1) - (x^2+3) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2}$$

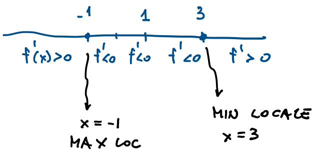
$$= \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

> 0 ecc.
$= 0$ ecc.
< 0 ecc.

....



5 bis CONTROLLARE eventuali punti in cui la DERIVATA f' non esiste: vedere se sono MAX o MIN locale

⑥ CONVESSITÀ E CONCAVITÀ; FLESSI

$$f''(x) \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array}$$

es.: $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$$f''(x) = \frac{(x^2-2x-3)' \cdot (x-1)^2 - (x^2-2x-3)\left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4}$$

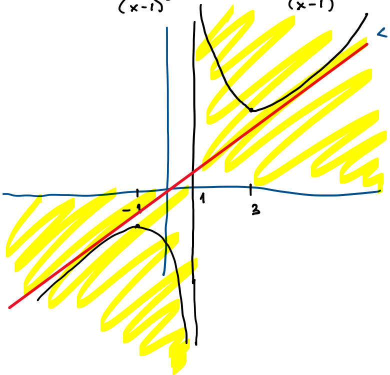
$$= \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2 - (x^2-2x-3)\cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}\left(2(x-1)^2 - 2(x^2-2x-3)\right)}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-4x+2+4x+6}{(x-1)^3} = \frac{\boxed{8}}{(x-1)^3}$$

>0 >0 se $x-1>0 \Rightarrow f$ è CONVESSA

$=0$ mai

<0 se $x-1<0 \Rightarrow f$ CONCAVA