

SPAZIO DEGLI STATI FISICI:

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} = \frac{\text{Ker } Q_B}{\text{Im } Q_B} \longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{COTOPOLGY} \\ \text{of } Q_{\text{BRST}} \end{array}$$

Vediamo ora in un esempio semplice che qta condizione riproduce esattamente gli stati fisici che ci aspettiamo.

Per semplicità, consideriamo una teoria ABELIANA (i ghost sono DISACCOPIATI, ma la procedura di BRST è ancora valida, specialmente nell'identificare gli stati fisici).

- Prendiamo $G(A) = \partial_\mu A^\mu$
- Integriamo su B : le trasformazioni di BRST diventano
$$\delta A_\mu = \partial_\mu c \quad \delta \bar{c} = -\partial_\mu A^\mu / \xi \quad \delta c = 0$$
- Espandiamo i campi in operatori di costruzione e distruzione:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(a^\mu(\bar{p}) e^{ipx} + a^{\mu\dagger}(\bar{p}) e^{-ipx} \right)$$

$$c(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(d(\bar{p}) e^{ipx} + d^\dagger(\bar{p}) e^{-ipx} \right)$$

$$\bar{c}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(b(\bar{p}) e^{ipx} + b^\dagger(\bar{p}) e^{-ipx} \right)$$

- $[Q_B, a^\mu(\bar{p})] = -p^\mu d(\bar{p}) \quad [Q_B, a^{\mu\dagger}(\bar{p})] = p^\mu d^\dagger(\bar{p})$
 $\{Q_B, b(\bar{p})\} = p^\mu a_\mu(\bar{p})/\xi \quad \{Q_B, b^\dagger(\bar{p})\} = p^\mu a_\mu^\dagger(\bar{p})/\xi$
 $\{Q_B, d(\bar{p})\} = 0 \quad \{Q_B, d^\dagger(\bar{p})\} = 0$

- Consideriamo gli stati $|\psi\rangle$ f.c. $Q_B|\psi\rangle = 0$

- gli stati $|e, \psi\rangle \equiv e_\mu a^{\mu\dagger} |\psi\rangle$ non sono fisici se $e_\mu p^\mu \neq 0$
 \Rightarrow qto ammette solo $e \in \langle p^\mu = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

- gli stati $|\psi\rangle' \equiv b^\dagger(\bar{p})|\psi\rangle$ soddisfano $Q_B|\psi\rangle' = \frac{p^\mu a_\mu^\dagger(\bar{p})}{\xi} |\psi\rangle$
 ξ statico

- $\Rightarrow |e + \alpha p, \psi\rangle = |e_\mu, \psi\rangle + \xi \alpha Q_B|\psi\rangle' \cong |e, \psi\rangle \rightarrow$ polarizz. $e^\mu \propto p^\mu$
(solite conditioni di gauge-invarianza applicata ai vettori di polarizzazione.) $\Rightarrow \cong 0$

- Abbiamo anche $Q_B b^\dagger(\bar{p})|\psi\rangle = \frac{p^\mu a_\mu(\bar{p})}{\xi} |\psi\rangle \neq 0$

- \rightarrow stati $b^\dagger|\psi\rangle$ non sono fisici

- $\forall e_\mu$ con $e_\mu p^\mu \neq 0 \quad d^\dagger(\bar{p})|\psi\rangle = \frac{Q_B e_\mu a^{\mu\dagger}(\bar{p})|\psi\rangle}{(e \cdot p)} \Rightarrow$

- $\Rightarrow d^\dagger(\bar{p})$ è Q_B -esatto $\Rightarrow \cong 0$

- $\Rightarrow \mathcal{H}_{\text{phys}}$ non contiene ghost!

- $[a_\mu(\bar{p}), a_\nu^\dagger(\bar{p}')] = -\eta_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\bar{p}-\bar{p}') \Rightarrow \|\underbrace{Q_0^\dagger}|0\rangle\|^2 < 0$
 $(1, -1, -1, 1)$ Lo sp. di Fock NON è uno SPAZIO DI HILBERT

(a_0 è data e q_0^+ cond. in consistenza con Lorentz. inv.)

la vera domanda è " \mathcal{H}_{phys} è uno SP. DI HILBERT?"

La risposta è "SÌ" \updownarrow
S-matrix è unitaria

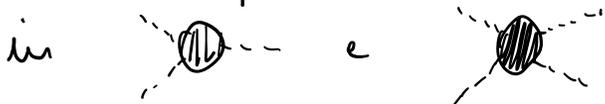
Basta dimostrarlo per una scelta di $G(A)$. Siccome esistono "GAUGE UNITARIE" \odot in cui la risposta è manifesta, allora sarà vero anche per le altre scelte di gauge fixing.

\odot AXIAL GAUGE in YM.
 $G(A) = n^\mu A_\mu$

Osservazione:

Il metodo di FP genera una Lagrangiana che è QUADRATICA nei campi c e \bar{c} . Quando si rinormalizza la teoria potrebbe servire di generazione dei controtermini cubici o quartici.

Qto non avviene per $G(A) = \partial_\mu A^\mu$, come vedremo. Tuttavia, ci sono altre scelte di $G(A)$ che richiedono termini cubici e quartici in c e \bar{c} per riassorbire gli infiniti



BRST danno un metodo più generico per generare una classe di Lagrangiane equivalenti, cioè che diano la stessa matrice S tra gli stati fissati;

Prendere L il più generico funzionale dei campi $\underbrace{A_\mu, \text{matter}, c, \bar{c}, B}_{\equiv \Phi}$ t.c. sia INVARIANTE sotto transf. BRST e sotto tutte le simmetrie globali della teoria di partenza.

Si può dimostrare che una tale L è data da

$$L[\Phi, c, \bar{c}, B] = L_0[\Phi] + Q_B \cdot \underbrace{\Psi[\Phi, c, \bar{c}, B]}_{\text{funzionale arbitrario di ghost } n^0=1}$$

↑
 $Q\Psi$ non è necessariamente quadratico in c, \bar{c}

Gli stati fisici sono dati dalla coomologia di Q_B

→ siccome esiste una gauge (p.e. $G(A) = n^4 A_\mu$) in cui i ghost disaccoppiano^(*), allora i ghost non sono fisici in ogni gauge (scelta di Ψ).

In qta gauge $L_{gh} = \bar{c}^a (-n^4 A_\mu^c f^{abc}) c^c$ e $L_{gh} = \frac{1}{2\xi} (n_\mu A^\mu)^2$

Per $\xi \rightarrow 0$, $n_\mu A^\mu$ viene localizzato a essere zero $\Rightarrow A_\mu$ scompare da L_{gh} e $\text{Det} \bar{c}^i \delta_{ij} c^j$ fattorizza fuori dal Pil.

Si può anche vedere che p. opportuno ξ in qta gauge, $n_\mu \Delta_F^{\mu\nu} = 0 = \Delta_F^{\mu\nu} n_\nu$ e quindi i ghost non interagiscono. Inoltre $\lim_{k^2 \rightarrow 0} k^2 K_\mu \Delta_F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$ no poli su poli longitudinali.

Extra: WARD-TAKAHASHI IDENTITIES for BRST-transformations.

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad \text{è inv. sotto BRST}$$

⇒ impone delle RELAZIONI sui COLLEGATORI

Consideriamo un operatore O (non necessariamente gauge-inv.)

$$\langle O \rangle = \int DA Dc D\bar{c} DB O(A, c, \bar{c}, B) e^{iS[A, c, \bar{c}, B]}$$

rinominiamo le
variab. d'integraz.

$$= \int DA' Dc' D\bar{c}' DB' O(A', c', \bar{c}', B') e^{iS[A', c', \bar{c}', B']}$$

cambio di
variabili.

MISURA INVES.
è INV. (Jac=1)

$$\begin{cases} A' = A + \epsilon Q_B \cdot A \\ c' = c + \epsilon Q_B \cdot c \\ \bar{c}' = \bar{c} + \epsilon Q_B \cdot \bar{c} \\ B' = B \end{cases}$$

$$= \int DA Dc D\bar{c} DB (O + \delta_{\text{BRST}} O) e^{iS[A, c, \bar{c}, B]}$$

$$= \langle O \rangle + \langle \delta_{\text{BRST}} O \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \delta_B O \rangle = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \langle Q_B \cdot O \rangle = 0$$

Ora consideriamo le fun. di Green

$$\tilde{G}(x, x_1, \dots, x_N) = \int DA Dc D\bar{c} DB O(x) \prod_{i=1}^N O_i(x_i) e^{iS}$$

↑
BRST invarianti

Facciamo stesso procedimento di sopra:

$$\langle (Q_B \cdot 0) \prod_i O_i \rangle = 0$$

→ correlatore di un'operatore BRST-esatto con qualsiasi op. BRST-inv. è nullo.

Usando qto risultato, si dimostra che i correlatori di operatori BRST-INVARIANTI sono indipendenti dalle scelte del gauge fixing $G(A)$ (qto in particolare è vero in la funt. di path-integrale $\langle 1 \rangle$)

Dim.

Ricordiamoci che
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + Q_{BRST} \left[\bar{c}^a G^a(A) - \frac{\xi}{2} \bar{c}^a B^a \right]$$

⇒ Se prendiamo due diverse funt. $G_1(A)$ e $G_2(A)$,

allora
$$S_1 - S_2 = \int d^3x Q_B \cdot [\bar{c}^a G_1^a(A) - \bar{c}^a G_2^a(A)] = Q_B \cdot V_{12}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \prod_i O_i(x_i) \rangle_1 &= \int e^{iS_1} \prod_i O_i = \int e^{iS_2 + iQ_B V_{12}} \prod_i O_i \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow_{BRST-inv.} \\ e^{iQ_B V_{12}} = 1 - iQ_B R_{12} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow_{Q_B^2=0} \\ R_{12} = \dots V_{12} + \dots V_{12}(Q_B V_{12}) + \dots \end{matrix} \\ &= \int e^{iS_2} \prod_i O_i - \underbrace{i \int e^{iS_2} Q_B \cdot R_{12} \prod_i O_i}_{=0 \text{ in } W1} \\ &= \langle \prod_i O_i(x_i) \rangle_2 \end{aligned}$$

"⇒" gli elementi della MATRICE S , che si derivano utilizzando tali correlatori, sono anch'essi indipendenti dalle scelte di $G(A)$.

Qte relazioni sono formali, ci potrebbe essere delle divergenze
→ PI va regolarizzato

Se non sceglie un REGULATOR che rompe l'inv. in BRST,
questi risultati da ottenere direkt potrebbe non essere
più validi.

Ci sono 3 possibilità:

- 1) Esiste un REGOL. BRST-inv. e lo usiamo:
i risultati trovati sopra sono validi in la teoria
regolarizzata (e anche in la teoria rinormalizzata)
- 2) Esiste un REGOL. BRST-inv. ma non lo usiamo
nei conti: proprietà trovate sopra non possono
essere applicate, ma i risultati sono ancora validi,
anche se nascosti
- 3) Non esiste un REGOL. BRST-inv.: BRST sym è
ANOMALIA.