RINORMALIZZAZIONE delle teorie di gauge non-abeliane

Consideriamo la Lagrangiana BARE (in gauge di Lorentz) di una teoria di gauge con gruppo G

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right)^2 + \frac{1}{2} g f^{abc} A^a_\mu A^b_\nu \left(\partial^\mu A^{c\nu} - \partial^\nu A^{c\mu}\right) \\
& - \frac{1}{4} g^2 f^{bce} f^{dea} A^b_\mu A^c_\nu A^{d\mu} A^{e\nu} + \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^{a\mu}\right)^2 \\
& - \bar{c}^a \partial^2 c^a - g\, \bar{c}^a \partial^\mu f^{abc} A^b_\mu c^c \\
& + i \bar{\psi} \not{\partial} \psi - m \bar{\psi}\psi - g \bar{\psi} \gamma^\mu t^a_R \psi A^a_\mu
\end{aligned}
$$

← campo fermionico in rap. R di G

Grado di divergenza

- $\mathcal{L}$ contiene termini con mass-dim ≤ 4 $\rightsquigarrow$ ci aspettiamo divergenze in un numero FINITO di ampiezze.

- Abbiamo diversi tipi di VERTICI della forma

$$
(m, n, k) \quad \text{con} \quad \begin{cases} m & \text{linee fermioniche} \rightarrow \\ n & \text{" bosoniche } A^a_\mu \\ k & \text{" di ghost} \dashrightarrow \end{cases}
$$

Def: $V_{(m,n,k)} \equiv$ # vertici del tipo (m, n, k)

- Ricordiamo le seguenti relazioni:

E_φ = # linee ESTERNE del campo φ

I_φ = # linee INTERNE del campo φ

$$
2 V_{(2,1,0)} = E_f + 2 I_f
$$

$$V_{(2,1,0)} + 3\,V_{(0,3,0)} + 4\,V_{(0,4,0)} + V_{(0,1,2)} = E_A + 2I_A$$

$$2\,V_{(0,1,2)} = E_c + 2\,I_c$$

$$\Downarrow$$

$$2\,I_f = 2V_{(2,1,0)} - E_f$$

$$2I_b \equiv 2\,I_A + 2I_c = V_{(2,1,0)} + 3\,V_{(0,3,0)} + 4\,V_{(0,4,0)} + 3\,V_{(0,1,2)} \underbrace{- E_A - E_c}_{\equiv\, -E_b}$$

- Il numero di loop è

$$L = \underbrace{I_f + I_b}_{\text{momenti interni}} \underbrace{- V_{(2,1,0)} - V_{(0,3,0)} - V_{(0,4,0)} - V_{(0,1,2)} + 1}_{-\ \#\ \text{funct. } \delta}$$

$$\int \frac{\prod_i d^d q_i}{\prod \text{propagators}} \quad (p \text{ nei vertici})$$

$\Downarrow$

Il grado di divergenza è dato da

$$D = \underbrace{d\,L}_{\substack{\text{misure}\\ \text{degli integrali}}} \underbrace{- 2I_b - I_f}_{\text{propagatori}} + \underbrace{V_{(0,1,2)} + V_{(0,3,0)}}_{p^\mu \text{ nei vertici}}$$

$$D = d\,(I_f + I_b - V_{(2,1,0)} - V_{(0,3,0)} - V_{(0,1,2)} + 1) - 2I_b - I_f + V_{(0,1,2)} + V_{(0,3,0)}$$

$$= \underline{I_f\,(d-1)} + \underline{I_b\,(d-2)} - d\,V_{(2,1,0)} - (d-1)\,V_{(0,3,0)} - d\,V_{(0,4,0)} - (d-1)\,V_{(0,1,2)} + d$$

$$= (d-1)\left(V_{(2,1,1,0)} - \frac{E_f}{2}\right) + \frac{(d-2)}{2}\left(V_{(2,1,1,0)} + 3V_{(0,3,1,0)} + 4V_{(0,4,0,0)} + 3V_{(0,1,1,2)} - E_b\right) - \dots$$

$$= d - \frac{d-1}{2}E_f - \frac{d-2}{2}E_b + V_{(2,1,1,0)}\big(\underbrace{d-1+\frac{d-2}{2}-d}_{\frac{d-4}{2}}\big)$$

$$+ V_{(0,3,1,0)}\big(\underbrace{\tfrac{3}{2}(d-2)-d+1}_{\frac{d-4}{2}}\big) + V_{(0,4,0,0)}\big(\underbrace{2d-4-d}_{d-4}\big)$$

$$+ V_{(0,1,1,2)}\big(\underbrace{1-d+\tfrac{3}{2}(d-2)}_{\frac{d-4}{2}}\big)$$

$$= d - \frac{d-1}{2}E_f - \frac{d-2}{2}E_b + \frac{d-4}{2}\left[V_{(2,1,1,0)} + V_{(0,3,1,0)} + 2V_{(0,4,0,0)} + V_{(0,1,1,2)}\right]$$

La dipendenza di D dal # di vertici si annulla per $d=4$ (qto ha a che fare col fatto che i termini in $\mathcal{L}$ sono di mass-dim ≤ 4)

In $d=4$

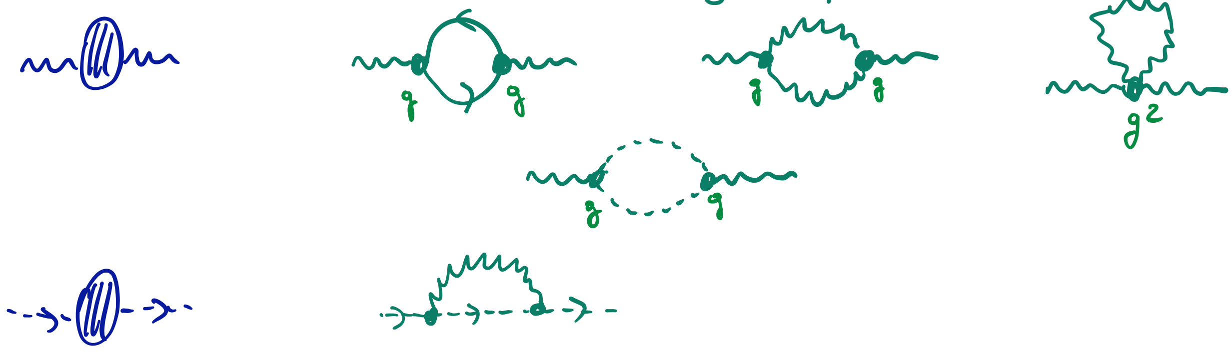
$$D = 4 - \frac{3}{2}E_f - E_b$$

$\Rightarrow$ c'è un numero finito di ampiezze 1PI che sono potenzialmente divergenti.

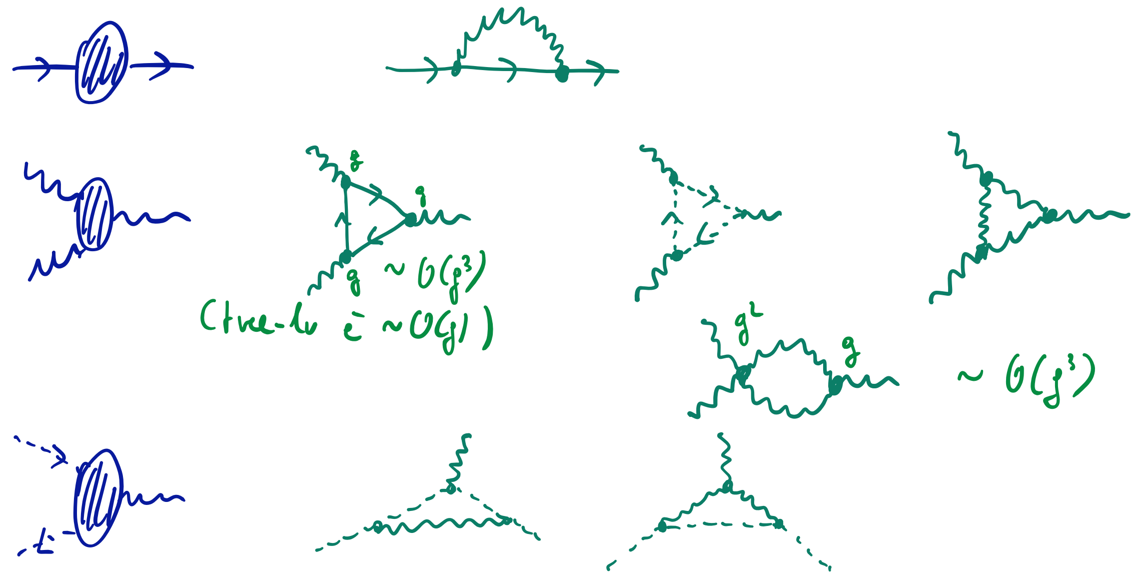
Andiamo a vedere quali sono tali ampiezze 1PI divergenti (tralasciamo 0pt e 1pt functions).

All'ordine g^2 rispetto a tree-level

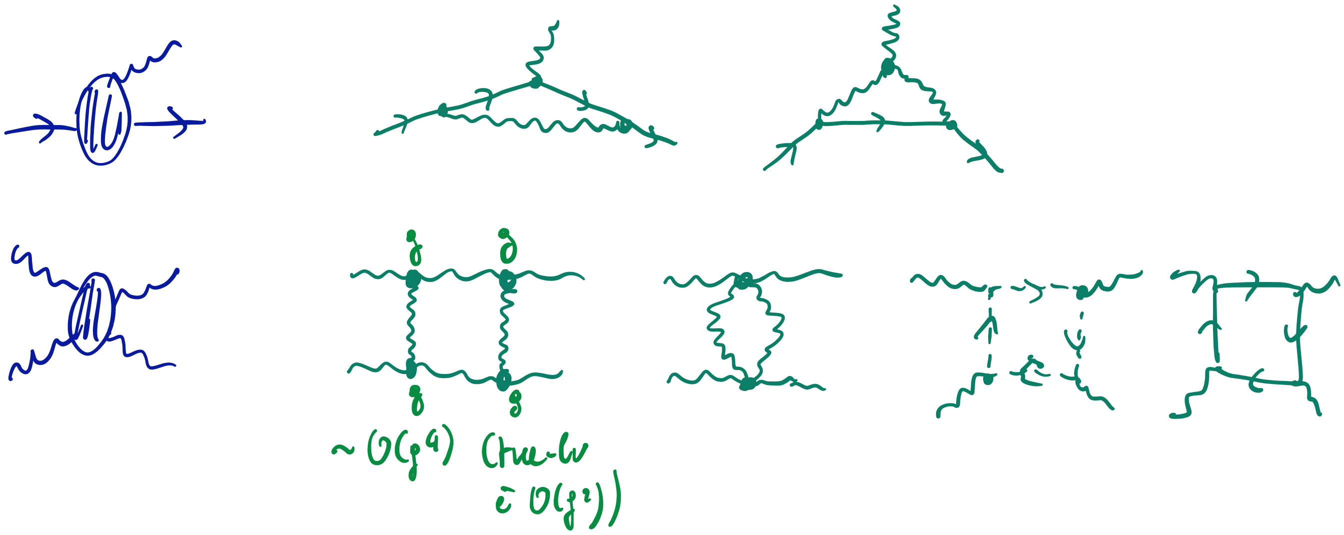
D=2



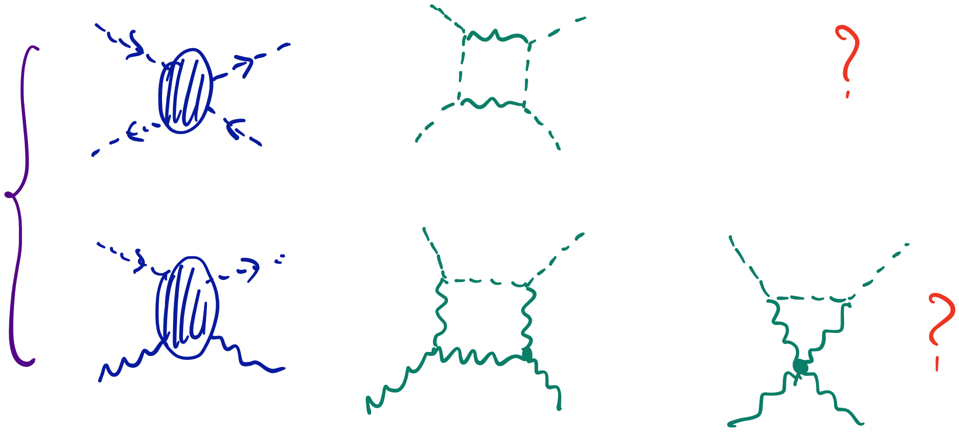
D=1



D=0



(*)



Non ci sono termini in $\mathcal{L}$ del tipo $(c\bar{c})^2$

e nemmeno del tipo $\bar{c}cAA$

(*) sono apparentemente divergenti. Tuttavia, l'identità di Ward relativa alla simmetria ($\bar{c} \mapsto \bar{c} + \gamma^{\text{cost.}}$) permette di capire che il vero grado di divergenza di tali ampiezze è <0.

Antighost TRANSLATION invariance :

$\mathcal{L}_{gh} = \partial^\mu \bar{c}\, D_\mu c$ inv. sotto $\bar{c} \mapsto \bar{c} + \gamma$ γ cost

$$\int \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\; e^{i\int \mathcal{L}_{gh}}\, \bar{c}(y) = \int \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\; e^{i\int \mathcal{L}_{gh} + i\int \partial^\mu \gamma(x) D_\mu c}\,(\bar{c}(y) + \gamma(y))$$

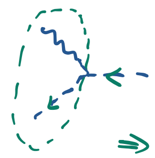
cambio coord. usando $\bar{c} \mapsto \bar{c} + \gamma(x)$

$$= \int \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\; e^{i\int \mathcal{L}_{gh}}\, \bar{c}(y) + \int \gamma(x) \langle (-i)\, \partial^\mu D_\mu c(x)\, \bar{c}(y) \rangle\, d^4x$$

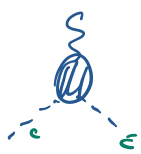
$$+ \int \gamma(x)\, \delta(x-y)\, d^4x$$

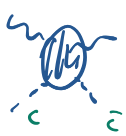
$$\Rightarrow \quad \partial^\mu_x \langle i \underbrace{D_\mu c(x)}_{\text{CORRENTE}}\, \bar{c}(y) \rangle = \delta(x-y)$$

CORRENTE dell'ANTI-GH TRANSL.

p^μ  = costante finita 

$\Rightarrow$ per ogni linea di $\bar{c}$ tolgo un grado di div.

$\Rightarrow$  $D=1 \to D=0$ ancora div.

 $D=0 \to D=-1$

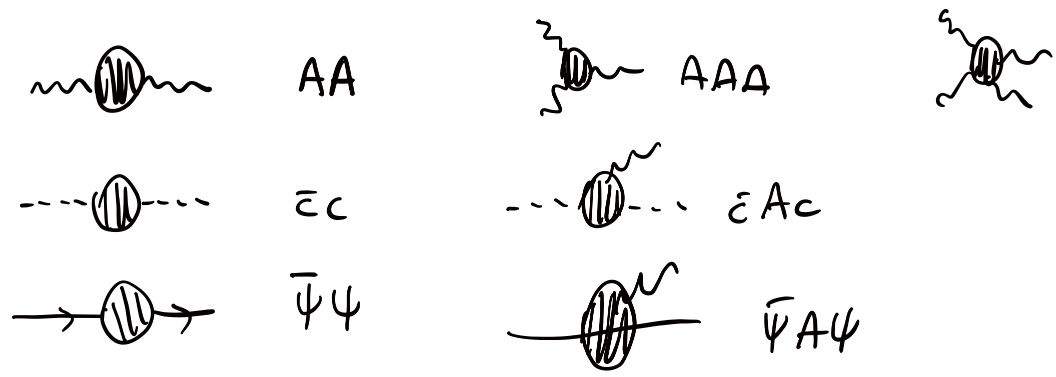
 $D=0 \to D=-2$

} convergenti

Qsta simm è presente per $G(A) = \partial^\mu A_\mu$.

Per altre scelte di $G(A)$, uno ha bisogno di termini $\sim c^4$ per poter rinormalizzare la teoria.

Per cancellare gli infiniti nelle 1PI, uno aggiunge dei CONTROTERMINI:



$d = 2\omega$

con coeff. proporzionale a $\frac{1}{2-\omega}$

Purtroppo, aggiungere tali termini, NON corrisponde a priori a una RIDEFINIZIONE dei PARAMETRI nella Lagrangiana BARE.

→ i termini in $\mathcal{L}$ hanno dei coefficienti LEGATI TRA LORO dalla SIMMETRIA <u>BRST</u>.

$$\mathcal{L}_B = \underbrace{\text{termini cinetici quadratici}}_{\leftarrow Z\text{'s}} + g\, A A\partial A + g^2 AAAA + g\, \bar c A c + g\, \bar\psi A \psi$$

Affinché la teoria sia RINORMALIZZABILE, cioè da predizioni finite con una opportuna scelta dei parametri (come funzioni di ω, μ es. in dim. reg.), bisogna che gli infiniti siano pure legati da relazioni dettate da BRST.

Se aggiungiamo i controtermini a $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = -\frac{Z_A}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{Z_V^{(0,3,0)}}{2} g_r f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b (\partial^\mu A^{c\nu} - \partial^\nu A^{c\mu})$$

$$- \frac{Z_V^{(0,4,0)}}{4} g_r^2 f^{bce} f^{dea} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu} + \frac{Z_\xi}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 \qquad (*)$$

$$- Z_c \bar{c}^a \partial^2 c^a - Z_V^{(0,1,2)} g_r \bar{c}^a \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b c^c + Z_\psi i \bar{\psi} \partial\!\!\!/ \psi - Z_m m_r \bar{\psi}\psi$$

$$- Z_V^{(2,1,0)} g_r \bar{\psi} \gamma^\mu t_R^a \psi A_\mu^a$$

(i campi sono i CAMPI RINORMALIZZATI $\varphi_B = \varphi_r Z_\varphi^{1/2}$)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\varphi_r, g_r, m_r) + \mathcal{L}_{c.t.}$$

Se uno usa un REGOLARIZZATORE BRST-INVAR. allora le identità di Ward valgono ancora ($\mathcal{L}^{reg}$ è ancora inv. sotto BRST)

↳ relazioni tra i correlatori che ci si può ricavare usando le trasf. di BRST nel P.I.

Applicando le identità di WARD-TAKAHASHI (SLAVNOV-TAYLOR) per la simmetria di BRST, ci ricava

$$\frac{Z_V^{(0,4,0)}}{Z_V^{(0,3,0)}} = \frac{Z_V^{(0,3,0)}}{Z_A} = \frac{Z_V^{(0,1,2)}}{Z_c} = \frac{Z_V^{(2,1,0)}}{Z_\psi}$$

[Prendiamo trasf. BRST $(\delta\varphi = \epsilon Q_B \cdot \varphi)$

$$Q_B \cdot A_\mu^a = \partial_\mu c^a + a f^{abc} A_\mu^b c^c$$

$$Q_B \cdot c^a = -\frac{b}{2} f^{abc} c^b c^c \qquad Q_B^2 = 0 \Rightarrow b = a = r$$

$$Q_B \bar{c}^a = \gamma \partial^\mu A_\mu^a \qquad Q_B \psi = r i c \psi$$

Imponendo l'inv. sotto BRST della Lagrangiana $\mathcal{L}$ (*)

$$a Z_A = g_r Z_V^{(0,3,0)} \qquad a Z_V^{(0,3,0)} = g_r Z_V^{(0,4,0)}$$

$$a Z_c = g_r Z_V^{(0,1,2)} \qquad a Z_\psi = g_r Z_V^{(2,1,0)}$$

$$Z_V^{(2,1,0)} \mu^{2-\omega} g_r \bar\psi \gamma^\mu t_R^a \psi A_\mu^a = g_B \bar\psi_B \gamma^\mu t_R^a \psi_B A_{B\mu}^a$$

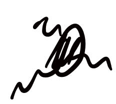
$$= g_B Z_\psi Z_A^{1/2} \bar\psi \gamma^\mu t_R^a \psi A_\mu^a$$

$$\Rightarrow g_B = g_r \mu^{2-\omega} Z_V^{(2,1,0)} Z_\psi^{-1} Z_A^{-1/2} \quad (\star) \quad (d = 2\omega)$$

Potremmo calcolare g_B utilizzando un altro termine di interazione in $\mathcal{L}$, per esempio $g\, AA\partial A$:

$$Z_V^{(0,3,0)} \frac{g_r}{2} \mu^{2-\omega} AA\partial A = \frac{g_B}{2} A_B A_B \partial A_B$$

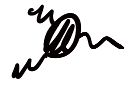
$$\to g_B = g_r \mu^{2-\omega} \frac{Z_V^{(0,3,0)}}{Z_A^{3/2}} = g_r \mu^{2-\omega} \underbrace{\frac{Z_V^{(0,3,0)}}{Z_A}}_{= Z_V^{(2,1,0)} Z_\psi^{-1}} Z_A^{-1/2}$$

Detto altrimenti, ci basta definire g_B come in ($\star$) per cancellare gli infiniti anche in $\longrightarrow$  (e , )

$$\frac{1}{2} g_B A_B^2 \partial A_B = \frac{1}{2} \mu^{2-\omega} g_r Z_V^{(2,1,0)} Z_\psi^{-1} Z_A^{-1/2} Z_A^{3/2} A^2 \partial A =$$

$$= \frac{1}{2} \mu^{2-\omega} g_r Z_A^{(0,3,0)} A^2 \partial A$$

Id. Slavnov-Taylor

qta è la costante che uno trova richiedendo la cancellaz. di ∞ in .