Tutorato Analisi Matematica 1 - 2024/2025

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 7 - Calcolo di limiti - 05/11/2024

Richiamo - Calcolare i limiti

Nel calcolo di un limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ (con $x_0 \in \mathbb{R}$ o $x_0 = \pm\infty$) procediamo con la sostituzione $x \to x_0$ nella funzione f, ricordandoci le regole dell' "algebra dei limiti":

- $(+\infty) + \ell = +\infty$ se $\ell \in \mathbb{R}$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + \ell = -\infty$ se $\ell \in \mathbb{R}$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) \cdot \ell = +\infty$ se $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$
- $(+\infty) \cdot \ell = -\infty$ se $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell < 0$
- $(-\infty) \cdot \ell = -\infty$ se $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$
- $(-\infty) \cdot \ell = +\infty$ se $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell < 0$
- $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
- $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- $\frac{\ell}{0^+} = +\infty$ se $\ell > 0$ o $\ell = +\infty$
- $\frac{\ell}{0^+} = -\infty$ se $\ell < 0$ o $\ell = -\infty$
- $\frac{\ell}{0^-} = -\infty$ se $\ell > 0$ o $\ell = +\infty$
- $\frac{\ell}{0^-} = +\infty$ se $\ell < 0$ o $\ell = -\infty$

Se ricadiamo nelle forme indeterminate

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right], \left[0\cdot(\pm\infty)\right], \left[1^{\pm\infty}\right], \left[(+\infty)+(-\infty)\right], \left[(-\infty)+(+\infty)\right], \left[0^0\right], \left[(\pm\infty)^0\right]$$

dobbiamo procedere con altri metodi di calcolo (mettere in evidenza termini opportuni, Teorema del confronto, moltiplicare e dividere per termini opportuni, usare limiti notevoli o, come vedrete dopo le derivate, sviluppi di Taylor e Teorema di De l'Hôpital).

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1$$

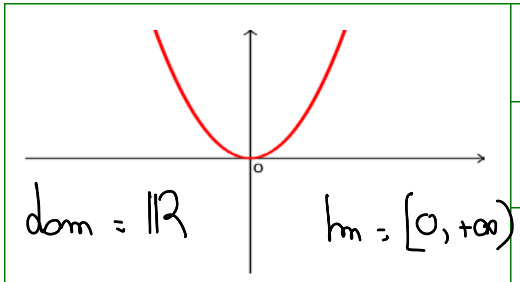
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(e) = \frac{1}{\log_e(a)}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \frac{1}{\log_a(e)} = \log_e(a)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

→ i limiti notevoli saranno più facili da ricordare e da usare quando vedremo gli sviluppi di Taylor.

Limiti delle funzioni elementari

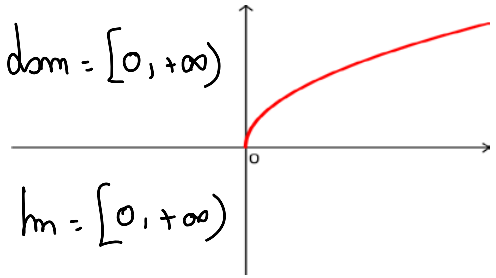


$y = x^n$ potenza con esponente **n pari**

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} x^n = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

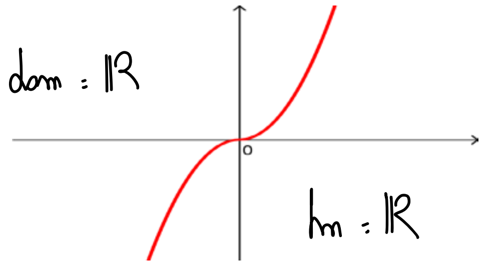


$y = \sqrt[n]{x}$ radice con indice **n pari**

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = non\ esiste$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

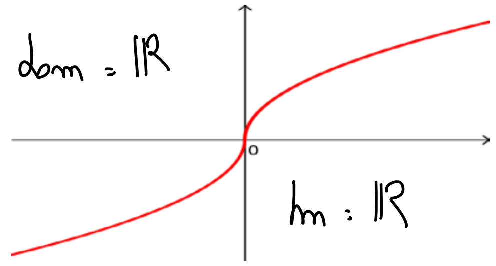


$y = x^n$ potenza con esponente **n dispari**

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} x^n = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

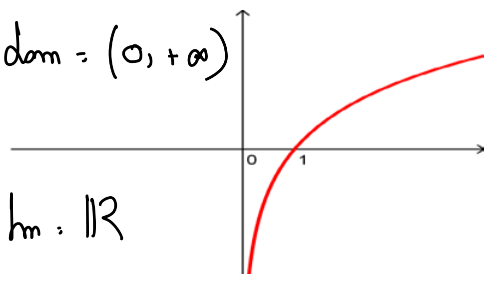


$y = \sqrt[n]{x}$ radice con indice **n dispari**

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

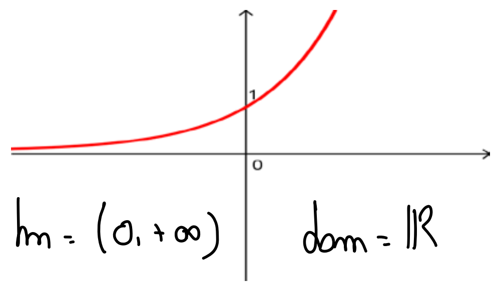


$y = \log_a(x)$ logaritmo con base **a > 1**

$$\lim_{x\to-\infty} \log_a(x) = non\ esiste$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$$

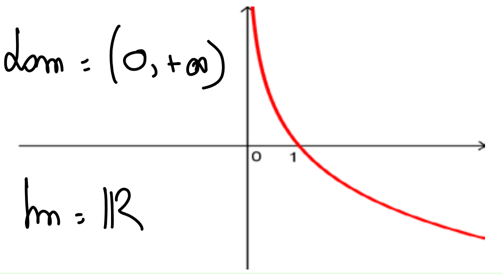


$y = a^x$ esponenziale con base **a > 1**

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0^+$$

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

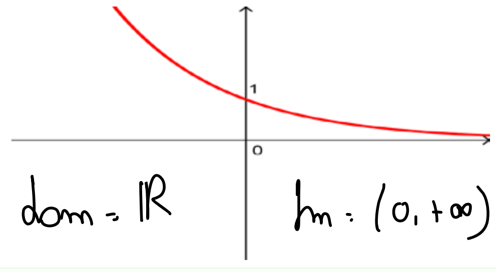


$y = \log_a x$ logaritmo con base **0 < a < 1**

$$\lim_{x\to-\infty} \log_a(x) = non\ esiste$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$$



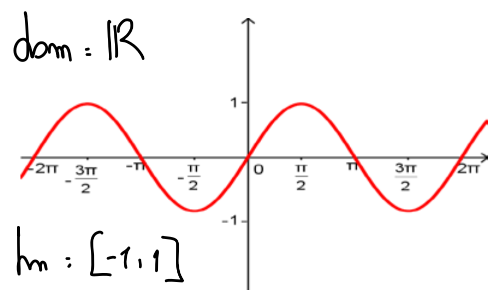
$y = a^x$ esponenziale con base **0 < a < 1**

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0^+$$

Limiti delle funzioni elementari



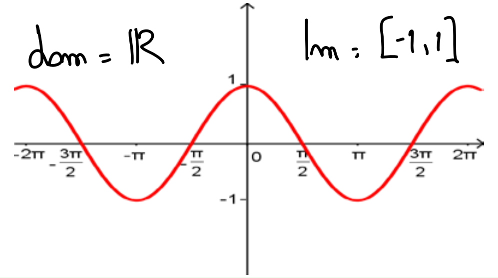
$y = \boldsymbol{sin}\,(x)$ seno

$$\lim_{x\to\pm\infty} sin\,(x) = non\ esiste$$

il limite non esiste ma è un valore compreso tra -1 ed 1

$$\lim_{x\to 0} sin\,(x) = 0$$

$$\lim_{x\to \pi/2} sin\,(x) = 1$$



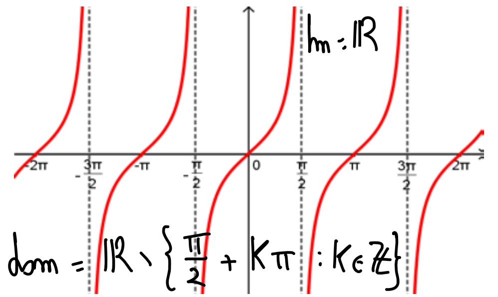
$y = \boldsymbol{cos}\,(x)$ coseno

$$\lim_{x\to\pm\infty} cos\,(x) = non\ esiste$$

il limite non esiste ma è un valore compreso tra -1 ed 1

$$\lim_{x\to 0} cos\,(x) = 1$$

$$\lim_{x\to \pi/2} cos\,(x) = 0$$

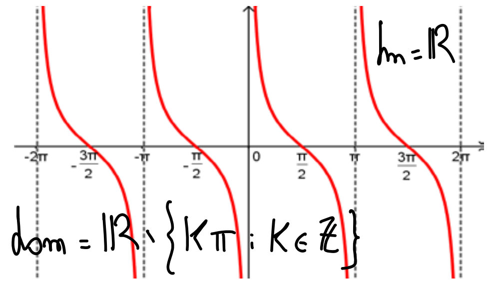


$y = \boldsymbol{tan}\,(x)$ tangente

$$\lim_{x\to 0} tan\,(x) = 0$$

$$\lim_{x\to \pi/2^-} tan\,(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to \pi/2^+} tan\,(x) = -\infty$$

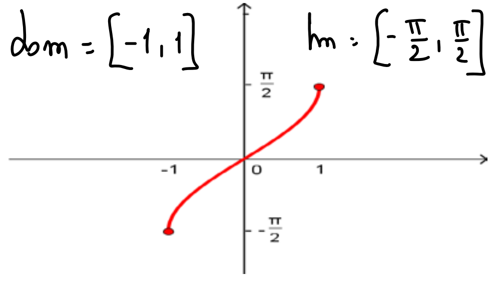


$y = \boldsymbol{cot}\,(x)$ cotangente

$$\lim_{x\to 0^-} cot(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} cot(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to \pi/2} cot(x) = 0$$

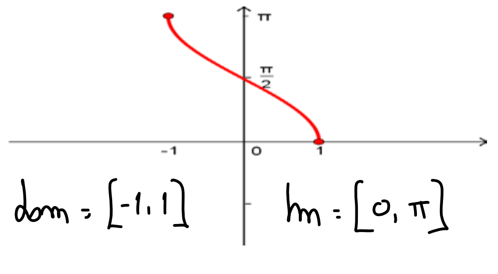


$y = \mathbf{arcsin}(x)$ arcoseno

$$\lim_{x\to -1^+} arcsin\,(x) = -\pi/2$$

$$\lim_{x\to 0} arcsin\,(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} arcsin\,(x) = \pi/2$$

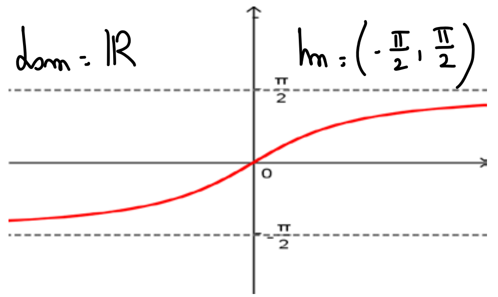


$y = \boldsymbol{arccos}\,(x)$ arcocoseno

$$\lim_{x\to -1^+} arccos\,(x) = \pi$$

$$\lim_{x\to 0} arccos\,(x) = \pi/2$$

$$\lim_{x\to 1^-} arccos\,(x) = 0$$

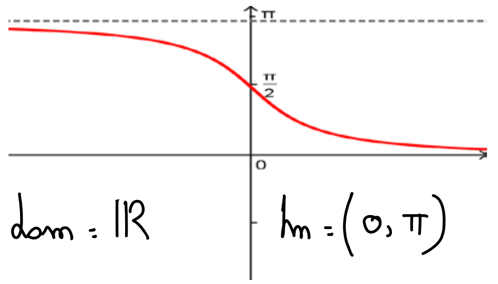


$y = \mathbf{arctan}(x)$ arcotangente

$$\lim_{x\to -\infty} arctan(x) = -\pi/2$$

$$\lim_{x\to 0} arctan(x) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} arctan(x) = \pi/2$$



$y = \mathbf{arccot}(x)$ arcocotangente

$$\lim_{x\to -\infty} arccot(x) = \pi$$

$$\lim_{x\to 0} arccot(x) = \pi/2$$

$$\lim_{x\to +\infty} arccot(x) = 0$$

ESERCIZI

Es. 1

Dimostrare che il limite $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste

Es. 2

Calcolare i seguenti limiti:

i) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 4x}$, ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4)}{\operatorname{sen}^2(x^2)}$, iii) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$, iv) $\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$

Es. 3 (13/07/2021)

i) $\lim_{x \to \frac{9}{2}\pi} \frac{\tan(2x)}{9\pi - 2x}$, ii) $\lim_{x \to +\infty} e^{1 - \log\left(\frac{2x^2+1}{3x^2-1}\right)}$

Es. 4 (15/07/2024)

$$\lim_{x \to -2} \frac{\operatorname{sen}(x+2)}{\log(x^2-3)}$$

Es. 5

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x$$

SOLUZIONI

Es.1

i) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste perché se consideriamo 2 diverse restrizioni (intorno destro e sinistro di 0) abbiamo:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

→ in diverse restrizioni il valore del limite è diverso, quindi $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

N.B

Le scritture $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ oppure $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$, seppur accettate ogni tanto, sono formalmente sbagliate.

Es.2

i) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \cdot \frac{3\cancel{x}}{4\cancel{x}} \cdot \frac{4x}{\operatorname{sen} 4x} = \frac{3}{4} \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}} =$$

numeratore
$t = 3x$
se $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$

denom.
$h = 4x$
se $x \to 0 \Rightarrow h \to 0$

$$= \frac{3}{4} \frac{\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}}{\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{4}$$

N.B. In generale con la sostituzione si dimostra che $\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} = 1$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

→ e in maniera simile per gli altri limiti notevoli

ii) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4)}{\operatorname{sen}^2(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4)}{x^4} \cdot \frac{x^4}{\operatorname{sen}(x^2) \cdot \operatorname{sen}(x^2)} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\operatorname{sen}(x^4)}{x^4}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}}}_{\to 1} = 1$$

iii) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi} = 0$$ → nessuna forma indeterminata

iv) $$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t+\pi)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t\cdot\cos\pi + \cos t\cdot\operatorname{sen}\pi}{t}$$

$t = x-\pi$

se $x\to\pi \Rightarrow t\to 0$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-\operatorname{sen} t + 0}{t} = -1$$

Es. 3

i) $$\lim_{x\to\frac{9}{2}\pi} \frac{\operatorname{Tan}(2x)}{9\pi-2x} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{Tan}(9\pi-t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-\operatorname{Tan}(t-9\pi)}{t} = -\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{Tan} t}{t} = -1$$

$t = 9\pi - 2x$

se $x\to\frac{9}{2}\pi \Rightarrow t\to 0$

$\operatorname{Tan}(-x) = -\operatorname{Tan} x$

$\operatorname{Tan}(x) = \operatorname{Tan}(x+k\pi)$

ii) $$\lim_{x\to+\infty} e^{1-\log\left(\frac{2x^2+1}{3x^2-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{1}\cdot e^{-\log\left(\frac{2x^2+1}{3x^2-1}\right)} = e\cdot\lim_{x\to+\infty} e^{\log\left(\frac{2x^2+1}{3x^2-1}\right)^{-1}}$$

$$= e\cdot\lim_{x\to+\infty} e^{\log^{2}\left(\frac{3x\ -1}{2x^2+1}\right)} = e\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{2x^2+1} = \frac{3}{2}e$$

Es. 4

$$\lim_{x\to-2}\frac{\operatorname{sen}(x+2)}{\log(x^2-3)} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{\log(t^2-4t+4-3)} = \lim_{t\to 0}\underbrace{\boxed{\frac{\operatorname{sen} t}{t}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{t}{t^2-4t}}}_{\to -\frac{1}{4}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{t^2-4t}{\log(1+t^2-4t)}}}_{\to 1}$$

$t = x+2$

se $x\to-2 \Rightarrow t\to 0$

$$= -\frac{1}{4}$$

perchè per sostituzione

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\log(1+f(x))}{f(x)} = 1 \quad \text{se} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

Es. 5

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{1/x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\overbrace{\boxed{-\frac{1}{x}}}^{\to 0}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{-1/x^2}}}_{\to 1}} = e^{0\cdot 1} = e^0 = 1$$

perché per sostituzione

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\log(1+f(x))}{f(x)} = 1 \quad \text{se} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

→ spesso per risolvere forme indeterminate quando il limite è del tipo

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}$$

si sfruttano le proprietà di logaritmi e esponenziali:

$$\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{\log\left[\left(f(x)\right)^{g(x)}\right]} = e^{g(x)\log(f(x))}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\log(f(x))}$$

in questa forma spesso riusciamo a ricondurci a usare il limite notevole del logaritmo

In questo caso il limite poteva essere risolto anche:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-x^2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left[\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-x^2}\right]}_{[\dots]\to e}^{\overbrace{\boxed{-\frac{1}{x}}}^{\to 0}} = e^0 = 1$$

perché

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \quad \text{se} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$$

($f(x) = -x^2$ e "$x_0 = +\infty$" nel nostro caso)