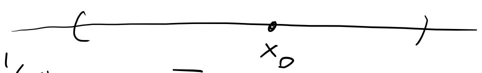
5 Novembre

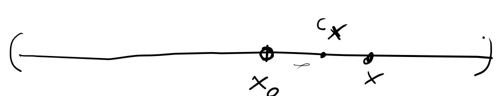
Teor (2° regola $\frac{0}{0}$) Sia I un intervallo, x_0 un punto di accumulazione di I (è possibile $x_0 = \pm\infty$), $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, t.c. $\exists$ $f'(x)$ e $g'(x)$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $g(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ e con $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$.



Allora se $\exists$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L .$$

Dim Solo nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$.



Definiamo $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ anche nel punto x_0 ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ segue che $f, g \in C^0(I \cup \{x_0\})$. Nell'intervallo $[x_0, x]$ sono soddisfatte le ipotesi del Teor. di Cauchy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \quad \text{per un} \quad x_0 < c_x < x$$

$x_0 \to x_0$, $c_x \to x_0$ per $x \to x_0^+$, $x \to x_0$ per $x \to x_0^+$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \qquad y = c_x$$

$$= \lim_{y \to x_0^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

$$\frac{f(n)}{g(n)}$$

(supponendo valga H)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

Esempio $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = x$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$-x^2 \le \underbrace{x^2 \cos\left(\tfrac{1}{x}\right)}_{\downarrow\, 0} \le x^2$$

$$-x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0, \qquad x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0$$

$g'(x) = 1$

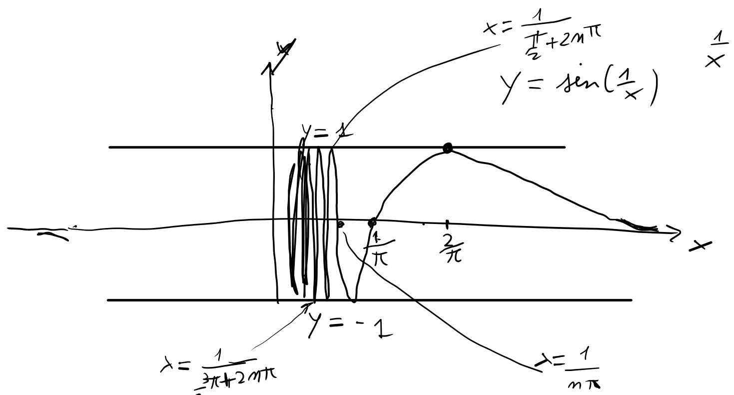
$f'(x) =$

$$= \left(x^2\cos\frac{1}{x}\right)' = (x^2)'\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2x\cos\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right) + x^2 \quad \cos'\left(\frac{1}{x}\right)\quad\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x}^2\quad\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\quad\left(-x^{-2}\right)$$

$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ non esiste $\qquad \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ non esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$-|x| \le \underbrace{x\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)}_{\downarrow\, 0} \le |x|$$

$$-|x| \xrightarrow{x\to 0} 0, \qquad |x| \xrightarrow{x\to 0} 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{2x\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)}_{\to 0} + \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)$$

$= \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ non esiste.

Teorema (3° regola $\frac{\infty}{\infty}$) I un intervallo,

$f, g : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ (x_0 punto di accumulazione di I, possibilmente $x_0 = \pm\infty$)

$f'(x)$, $g'(x)$ definite in $I \setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$

$\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ e sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$.

Allora se $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$

si ha $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \qquad n \in \mathbb{N} \qquad \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{n \, x^{n-1}}{e^x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{n(n-1) \, x^{n-2}}{e^x} =$$

$$= \cdots\cdots = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots 2}\; x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{e^x}$$

$$= \frac{n!}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\varepsilon}}{\lg x} = +\infty \qquad \varepsilon > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varepsilon \, x^{\varepsilon-\cancel{1}}}{\cancel{x^{-1}}} = \lim_{x\to+\infty} \varepsilon \, x^{\varepsilon} = +\infty$$

Qui ho usato

qui $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$*$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\varepsilon} = +\infty$.

Sia $n \in \mathbb{N}$ t.c. $0 < \boxed{\frac{1}{n} < \varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

questo n esiste perché $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

per $x > 1$ abbiamo $x^{\frac{1}{n}} < x^{\varepsilon}$

$*$ segue da $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{n}} = +\infty$

$x^{\frac{1}{n}}$ è la funzione inversa della funzione x^n

$$y = x^n \qquad x = y^{\frac{1}{n}}$$

$$\begin{tikzcd} x^n : (0,+\infty) \arrow[r] & (0,+\infty) \arrow[l, bend left, "x^{\frac{1}{n}}"] \end{tikzcd}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{n}} = \sup \{ x^{\frac{1}{n}} : x > 0 \} = \sup (0,+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\varepsilon}}{\lg x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \lg x = \quad 0 \, (-\infty)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\lg x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\lg x}{x^{-1}} \qquad \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \qquad \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\cancel{\frac{1}{2}} (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cancel{2}x} \qquad \text{Golamir}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2} (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} 2x}{1} = \lim_{x \to +\infty} x (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

In realtà

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\left(x^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 1$$

Def Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I un intervallo aperto. Supponiamo che f' sia definita su tutto I e che in un punto $x_0 \in I$ esista $(f')'(x_0)$. Questa viene chiamata derivata seconda di f in x_0 e viene denotata

con $$f''(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} f(x_0) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x_0)$$

Supponendo che $f: I \to \mathbb{R}$ sia tale che è stata definita ~~la~~ derivata di ordine $(n-1)$ in I

$$f^{(n-1)}(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} f(x)$$

se in $x_0 \in I$ esiste $\left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$ diciamo

che f ammette derivata di ordine n in x_0 che viene denotata con $$f^{(n)}(x_0) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} f(x_0).$$

$f(x) = \left([x]^3 - [x]\right) e^{-[x]^2}$

dimostrare che esiste punti di max/min ass in $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon$ t.c.

$|x| > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Inoltre esistono punti x_0 e x_1 t.c.

$f(x_0) < 0 < f(x_1)$

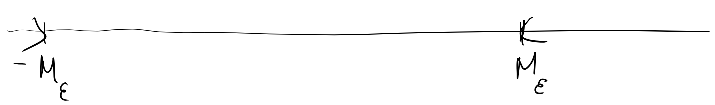
Sia $0 < \varepsilon < \min\{|f(x_0)|, f(x_1)\}$

e consideriamo M_ε. So che per

$x < -M_\varepsilon$ e per $x > M_\varepsilon$

$\boxed{f(x_0) < f(x) < f(x_1)}$

$f(x_0) < -\varepsilon < f(x) < \varepsilon < f(x_1)$



In $[-M_\varepsilon, M_\varepsilon]$ so che i valori di f in numero finito $\mathrm{Card}\, f([-M_\varepsilon, M_\varepsilon]) < +\infty$

$\exists \quad y_m = \min f([-M_\varepsilon, M_\varepsilon])$

$y_M = \max f([-M_\varepsilon, M_\varepsilon])$

$\Rightarrow \quad x_m, x_M \in [-M_\varepsilon, M_\varepsilon]$

t.c. $f(x_m) = y_m$, $f(x_M) = y_M$

x_m è il pt di min assoluto in $\mathbb{R}$

x_M max