Progettazione Meccanica CAD/CAE Integrata

A.A. 2024/2025

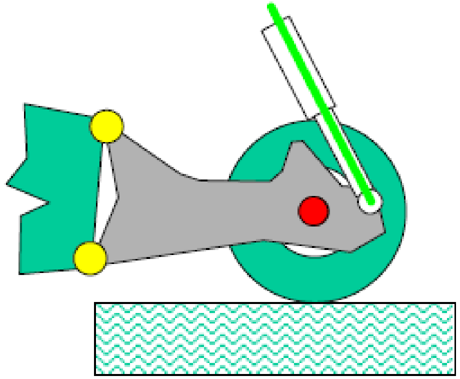
Analisi strutturale in ambiente virtuale
Introduzione-II parte
Elementi monodimensionali – Elementi piani

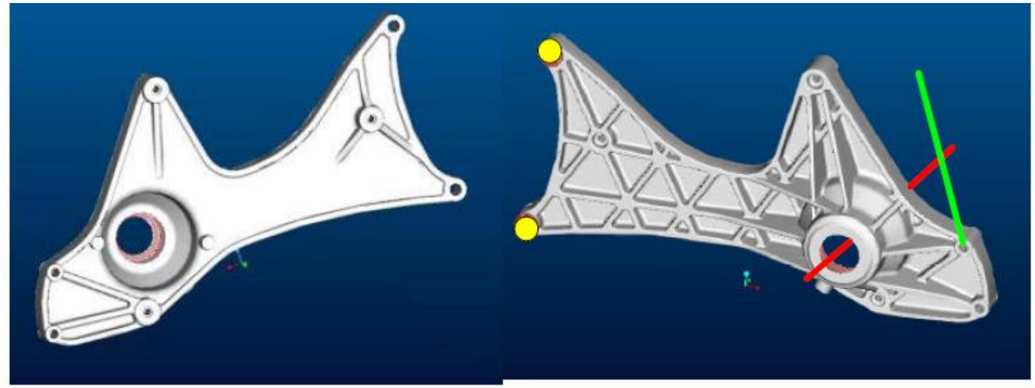
Ph.D. Eng. Domenico Marzullo

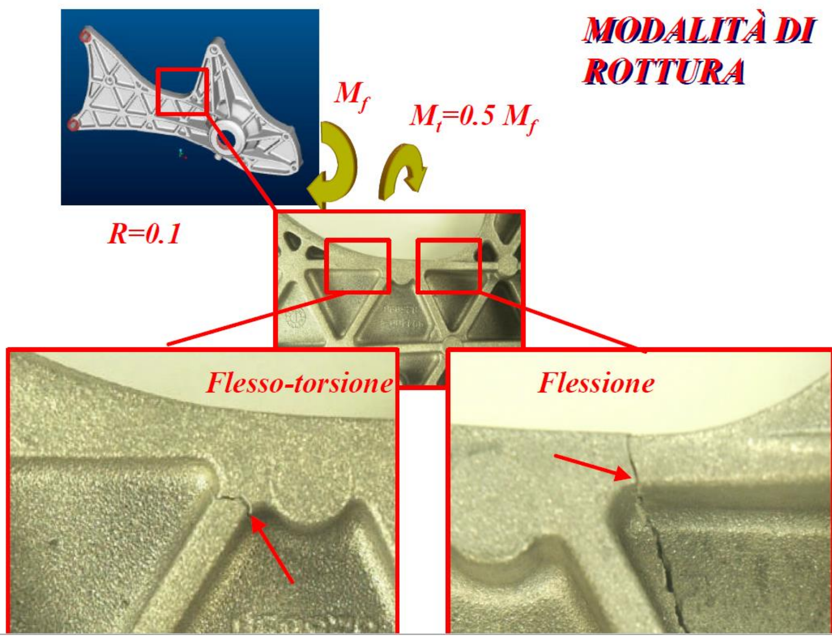
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

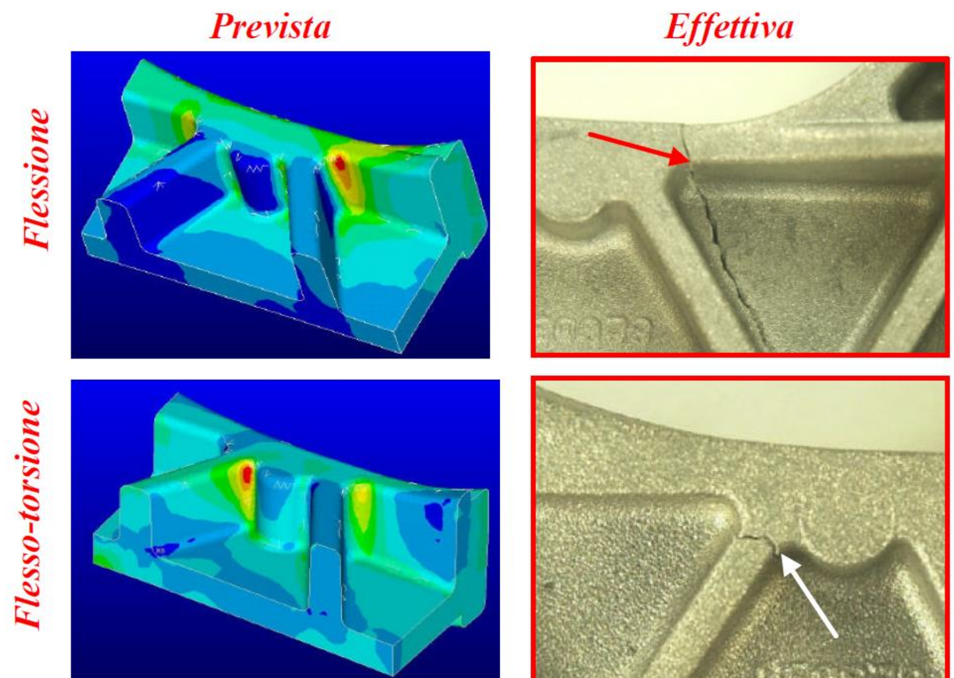
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Università degli Studi di Trieste

MODALITÀ DI ROTTURA









Discretisation

There are many practical engineering problems for which we **cannot** obtain **exact solutions**. This inability to obtain an exact solution may be due to either the **complex** nature of the governing differential equations or the **difficulties** in dealing with the boundary and initial conditions.

The continuum nature of the problem and of the governing equations means that the real structure cannot be analyzed as is.

The **continuum problem** is transformed into a **discretised solution**, using the **Finite Element Method (FEM)**, a numerical procedure for solving PDEs associated with field problems.

Continuous system

Discrete system

Classical Analysis

Real structures

governed by PDEs

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = 0$$

Discretisation

FEM

Structural Model

governed by matrix equation

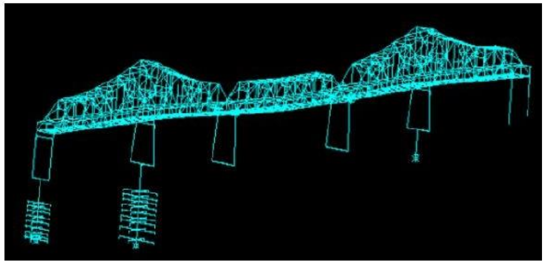
$$[M]\{\ddot{u}\} + [B]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = P(t)$$

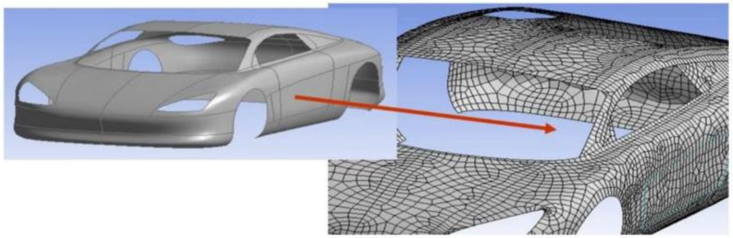
$[M]$ - *mass*
$[B]$ - *dumping*
$[K]$ - *stiffness*
$\{\ddot{u}\}$ - *acceleration vector*
$\{\dot{u}\}$ - *velocity vector*
$\{u\}$ - *displacement vector*
$P(t)$ – *applied load*

Reference: Dominique Madier. Practical Finite Element Analysis for Mechanical Engineers. FEA Academy, 2020.

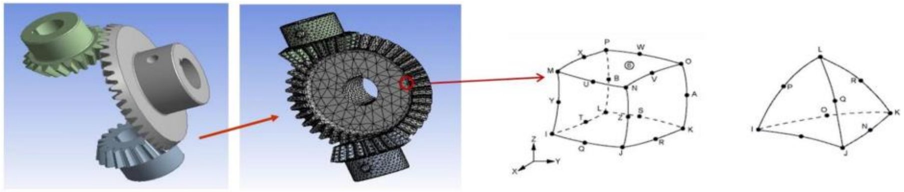
Element types

Category	Type		Number of nodes	Description
1D	Truss		2	A long, slender element with two nodes that can be oriented in any direction in 3D space; transmits axial force only
	Beam		2	A long, slender element with two nodes that can be oriented in any direction in 3D space; six DoFs per node allowing three translations and three rotations
2D	Plain Strain of Stress		3 or 4	A 2D element with only two translational DoFs per node in their plane; used in plane stress or plane strain analyses
	Membrane		3 or 4	A 2D element that can be oriented in any direction in 3D space; transmits only in-plane loading at each node
	Shell		From 3 to 8	A 2D element that can be oriented in any direction in 3D space; transmits all translational DoFs and rotational DoFs, except the rotation around the normal of the element
3D	Solid		From 8 to 20	A 3D solid element having various forms; transmits only translational DoFs





Surface Body

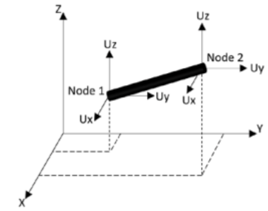


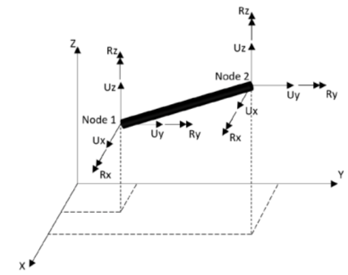
3D Solids → 3D Element   Hex Element   Tet Element

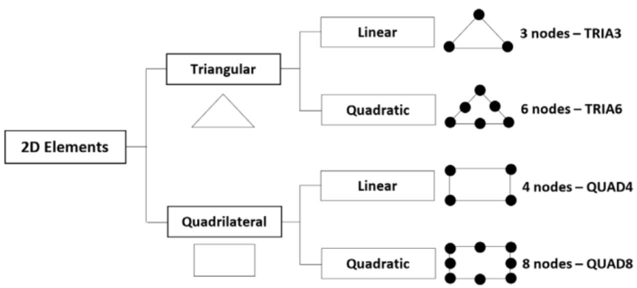
Reference: Dominique Madier. Practical Finite Element Analysis for Mechanical Engineers. FEA Academy, 2020.

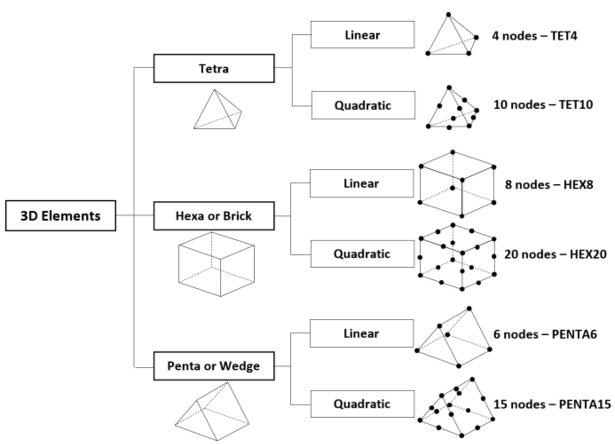
Element types

Category	Type		Number of nodes	Description
1D	Truss		2	A long, slender element with two nodes that can be oriented in any direction in 3D space; transmits axial force only
	Beam		2	A long, slender element with two nodes that can be oriented in any direction in 3D space; six DoFs per node allowing three translations and three rotations
2D	Plain Strain of Stress		3 or 4	A 2D element with only two translational DoFs per node in their plane; used in plane stress or plane strain analyses
	Membrane		3 or 4	A 2D element that can be oriented in any direction in 3D space; transmits only in-plane loading at each node
	Shell		From 3 to 8	A 2D element that can be oriented in any direction in 3D space; transmits all translational DoFs and rotational DoFs, except the rotation around the normal of the element
3D	Solid		From 8 to 20	A 3D solid element having various forms; transmits only translational DoFs



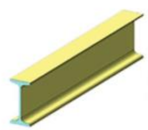
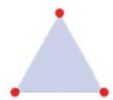
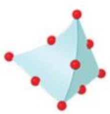
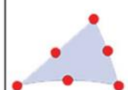
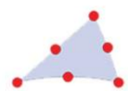


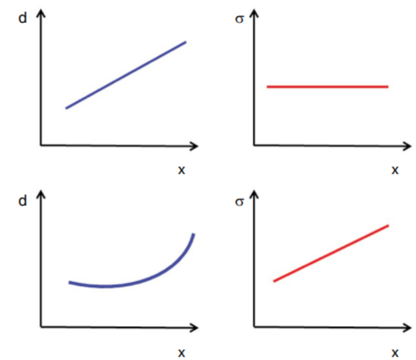




Reference: Dominique Madier. Practical Finite Element Analysis for Mechanical Engineers. FEA Academy, 2020.

Element order

Element order	3D elements			2D elements
	Solid	Shell	Beam	Plane stress Plane strain Axisymmetric
First order				
Second order				



The first order element models **linear displacements** and **constant stress**

The second order element models the **second order displacements** and **linear stress**

Reference: Paul M. Kurowski. Finite Element Analysis for Design Engineers. 3rd Edition. SAE International, 2023.

Structural Model

General Equilibrium Equation

$$[M]\{\ddot{u}\}+[B]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=P(t)$$

Static Analysis

$$[K]\{u\} = P$$

Buckling Analysis

$$([K]+\lambda[K_d])\{\phi\} = \lambda P$$

Vibration Analysis

$$([K]-\lambda[M])\{\phi\} = 0$$

Transient and Frequency Response Analysis

$$[M]\{\ddot{u}\}+[B]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=P(t)$$

λ is the i^{th} eigenvalue.
{ϕ} is the i^{th} eigenvector.
$[K_d]$ is the differential stiffness matrix (also called geometric stiffness).

The **displacement method** will be employed to solve structural problems.

Reference: Dominique Madier. Practical Finite Element Analysis for Mechanical Engineers. FEA Academy, 2020.

The displacement method (also called the **stiffness method**) assumes displacements $\{u\}$ at the nodes as the unknowns of the problem.

Applied forces are transferred from element to element via nodes.

The compatibility of deformations (also called strain-displacement relations) requires that the **displacements are continuous across the body**.

In the displacement method, the key step is the formulation of the stiffness matrix [K]

$\{F\}$ are the forces acting on the structure
$\{u\}$ are the displacements resulting from $\{F\}$

$$\{\boldsymbol{F}\} = [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{u}\}$$

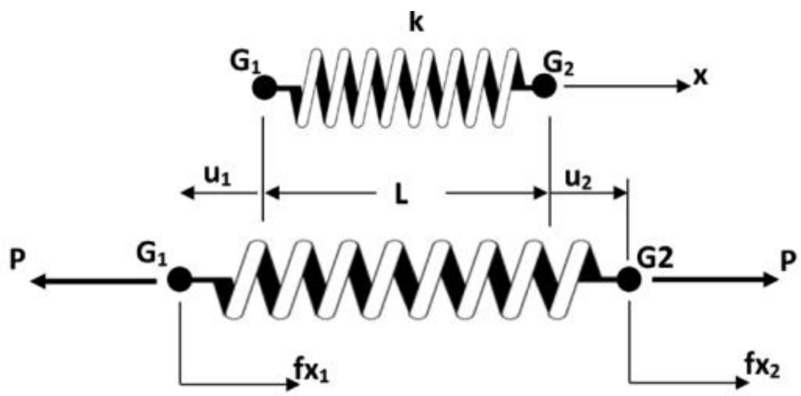
In FEM, each element is represented by its own stiffness matrix $[\mathrm{K}]_{\mathrm{element}}$.

$$\{F\} = [K]\{u\} \quad \Rightarrow \quad \{u\} = [K]^{-1}\{F\}$$

K : property
u : behaviour
F : action

	Property	Behaviour	Action
Structural	Stiffness	Displacement	Loads
Thermal	Conductivity	Temperature	Therma l source
Fluid-dynamics	Viscosity	Speed	Volume force

Linear spring model



The spring deformation $\delta = \mathrm{u}_2 - \mathrm{u}_1$

Hooke's law: $P = k(\mathrm{u}_2 - \mathrm{u}_1)$

The equilibrium condition implies: $f\mathrm{x}_1 = -P$ and $f\mathrm{x}_2 = P$

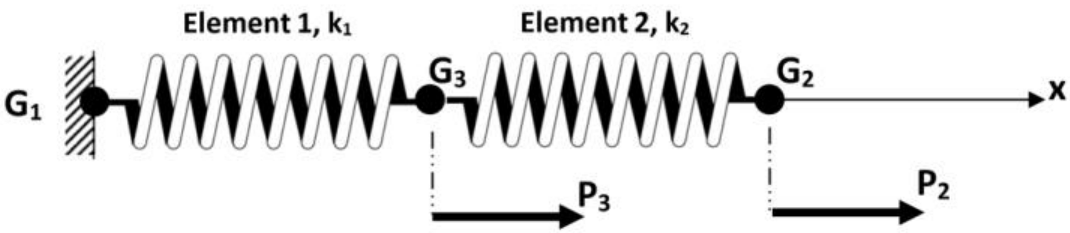
$$f x_1 = -k(\mathrm{u}_2 - \mathrm{u}_1) = k(u_1 - u_2)$$
$$f x_2 = k(\mathrm{u}_2 - \mathrm{u}_1) = k(-u_1 + u_2)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f x_1} \\ \boldsymbol{f x_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k} & \boldsymbol{-k} \\ \boldsymbol{-k} & \boldsymbol{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \end{Bmatrix}$$

Reference: Dominique Madier. Practical Finite Element Analysis for Mechanical Engineers. FEA Academy, 2020.

Linear spring model

Let’s apply the linear spring model result to a 2-spring system



For element 1
$$\begin{Bmatrix} fx_1 \\ fx_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

For element 2
$$\begin{Bmatrix} fx_3 \\ fx_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Compatibility of displacements: $u_3^{elemant1} = u_3^{elemant2}$

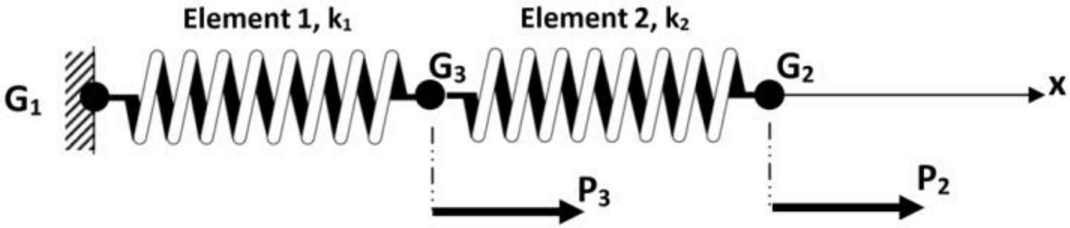
Equilibrium at each node:
$$P1 = fx_1^{element1} = k_1 u_1 - k_1 u_3$$
$$P2 = fx_2^{element2} = -k_2 u_3 + k_2 u_2$$
$$P3 = fx_3^{element1} + fx_3^{element2} = (-k_1 u_1 + k_1 u_3) + (k_2 u_3 - k_2 u_2)$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Reference: Dominique Madier. Practical Finite Element Analysis for Mechanical Engineers. FEA Academy, 2020.

Linear spring model

The global stiffness matrix can also be assembled by elemental stiffness matrix



For element 1 $\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix}$ $\quad [K]_1 = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix}$

For element 2 $\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ $\quad [K]_2 = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$

We have to assemble contributions at each node. The whole system is composed of three nodes:

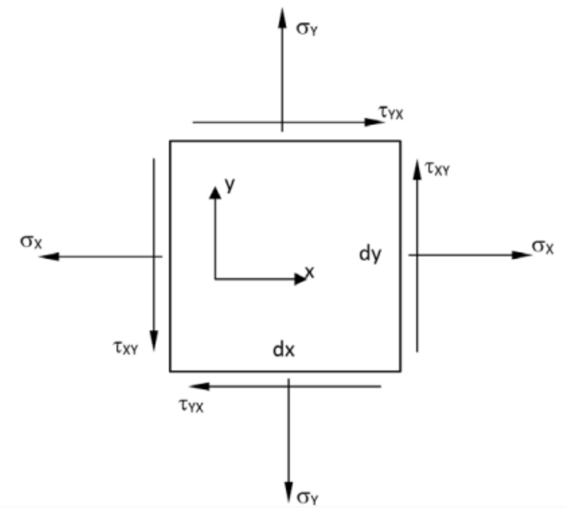
$$[K]_1 = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

Reference: Dominique Madier. Practical Finite Element Analysis for Mechanical Engineers. FEA Academy, 2020.

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$



2D state of stress

For the equilibrium of the element $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E}$$

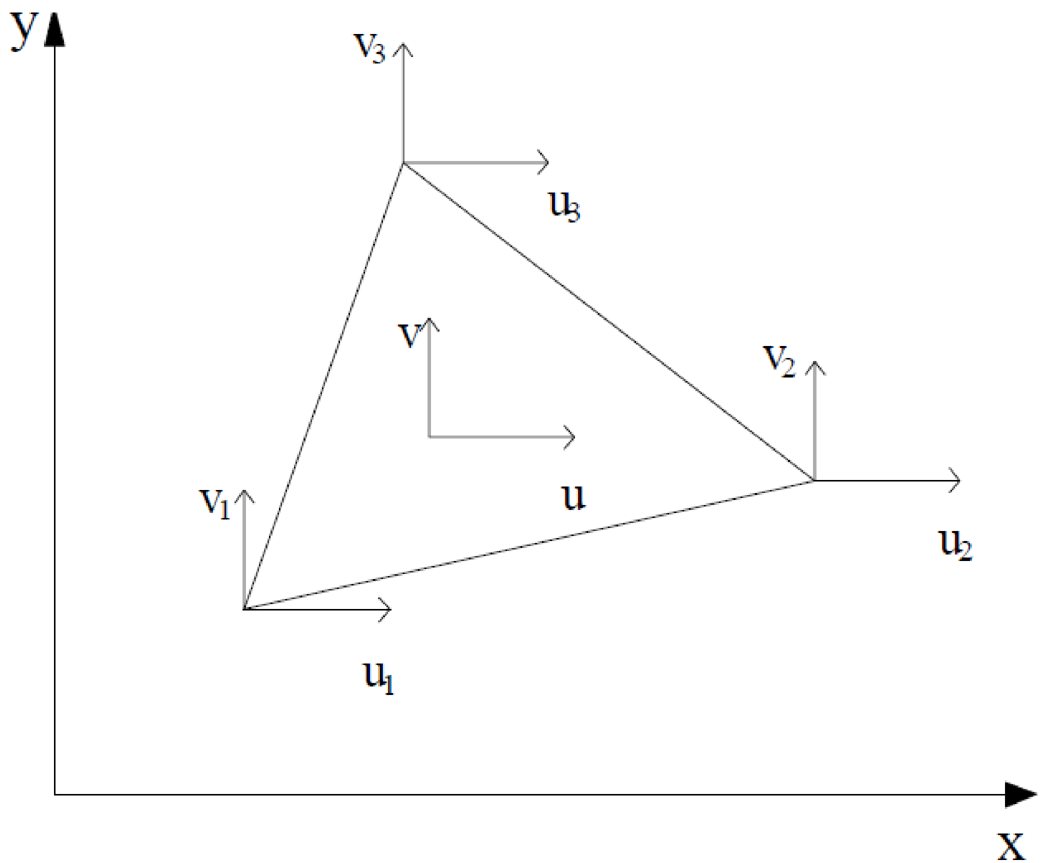
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E}$$

$$\Rightarrow \quad [D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Nel metodo agli elementi finiti si discretizza il continuo, che ha infiniti gradi di libertà, con un insieme di elementi di dimensioni finite, tra loro interconnessi in punti predefiniti (nodi).

Elemento piano per problemi 2D



Funzioni di Forma

Le FUNZIONI DI FORMA legano gli spostamenti nel generico punto dell'elemento finto agli spostamenti nodali

Le funzioni di forma possono essere lineari o di grado superiore al primo

Funzioni di forma lineari:

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y$$

$$v = a_4 + a_5 x + a_6 y$$

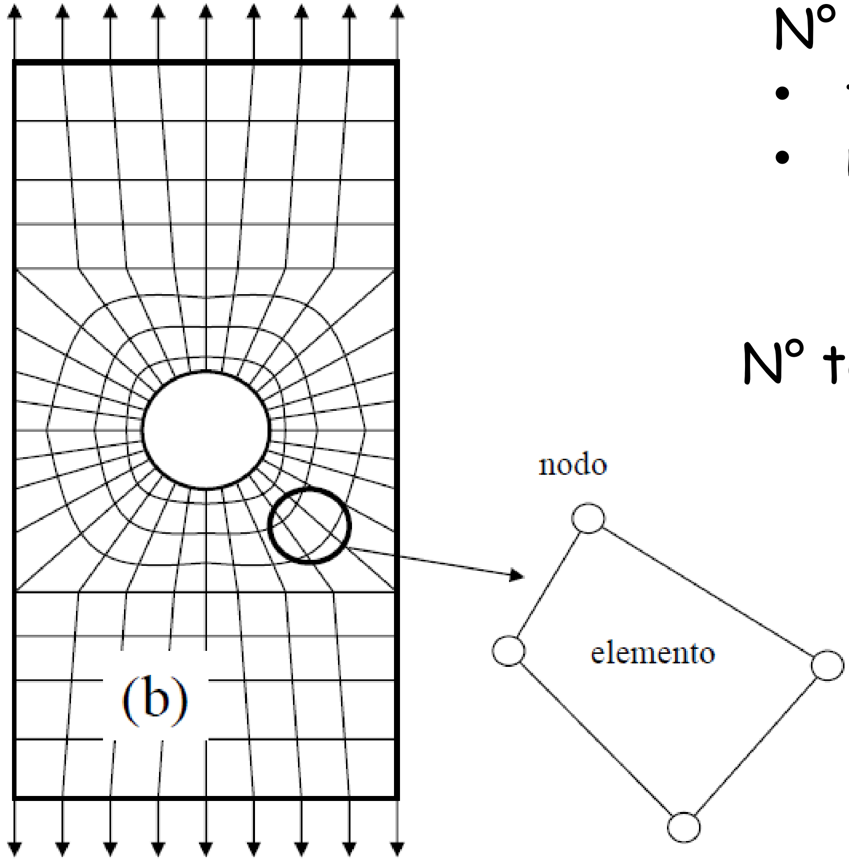
$a_1, \ldots, a_5, a_6,$ sono coefficienti costanti

L'utilizzo di elementi finiti con funzioni di forma lineari permette di modellare l'andamento degli spostamenti all'interno dei singoli elementi finiti attraverso funzioni lineari e richiede suddivisioni molto fitte in corrispondenza delle zone del componente in analisi in cui si prevede vi sia un elevato gradiente degli sforzi

Funzioni di forma

L'introduzione di elementi finiti che prevedano l'utilizzo di funzioni di forma di grado superiore al primo, permette di "adeguare" il grado della funzione di forma alla particolare applicazione (si passa da polinomi interpolanti semplici a polinomi più complessi).

E' il programma di calcolo che, fissato il tipo di suddivisione in elementi finiti, utilizza funzioni di forma di grado adeguato (in maniera "gerarchica", partendo da polinomi di grado inferiore).

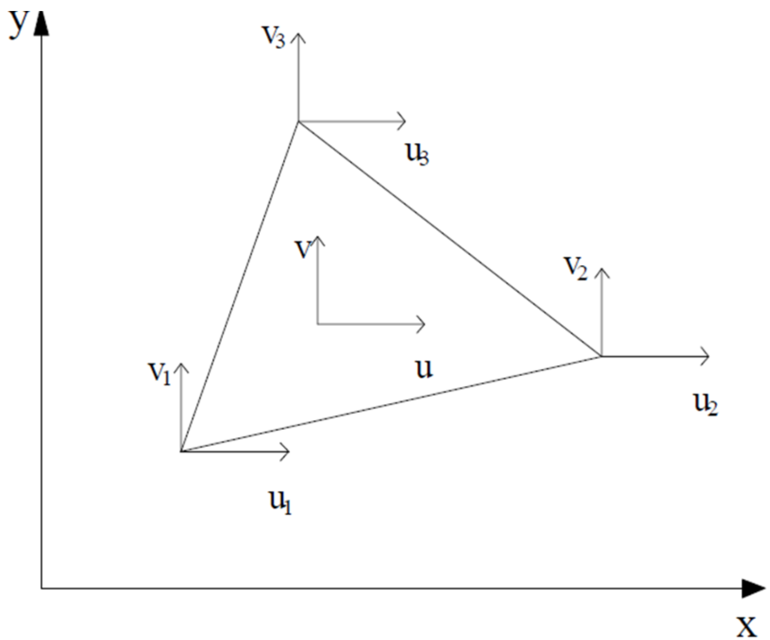


Modello ("mesh")

N° g.d.l./nodo varia da 2 a 6 secondo:
- tipo di elemento
- natura problema

N° totale g.d.l. = N° g.d.l./nodo * N° nodi

Comportamento meccanico elemento piano



Spostamenti per i tre vertici di un elemento triangolare

$$u_1 = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1$$
$$u_2 = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2$$
$$u_3 = a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3$$
$$v_1 = a_4 + a_5 x_1 + a_6 y_1$$
$$v_2 = a_4 + a_5 x_2 + a_6 y_2$$
$$v_3 = a_4 + a_5 x_3 + a_6 y_3$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

$$\{f_n\} = [C]\{a\}$$

$$\{a\} = [C]^{-1}\{f_n\}$$

Comportamento meccanico elemento piano

Lo spostamento generico dei punti interni all'elemento si scriverà in funzione degli spostamenti dei nodi, attraverso la **matrice delle funzioni di forma**

$$\{f\} = [A]\{a\}$$

$$\{f\} = [A][C]^{-1}\{f_n\} = [\Phi]\{f_n\}$$

Noti i generici spostamenti si passa alle deformazioni, definite come le derivate degli spostamenti secondo x e y

$$\boxed{\text{Spostamenti}} \xrightarrow{\textit{congruenza}} \boxed{\text{Deformazioni}}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x};\quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};\quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \{\varepsilon\} = [B]\{f_n\}$$

Possiamo quindi ricavare lo stato di sforzo, che per **stato piano di tensione e materiale isotropo** sarà:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\nu\sigma_x}{E} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$\Downarrow$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{f_n\}$$

L' equazione che leghi le forze agli spostamenti nodali si ricava dal principio dei lavori virtuali

$$L_{est} = L_{int}$$

*Carichi nodali veri * spost.nodali virtuali*

*Tensioni vere * deformazioni virtuali*

$$Ff_n = \int_V \sigma\varepsilon dV$$

$$\{F\} = [K]\{f_n\}$$

[K] è una matrice di nGDLxnGDL costanti definita **Matrice di rigidezza dell'elemento**

$$\{F\} = [K]\{f_n\}$$

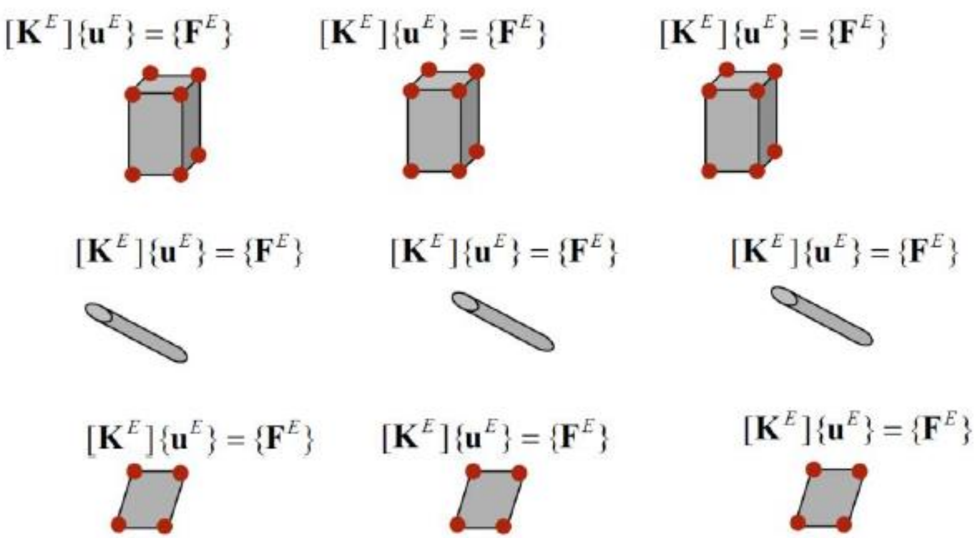
$$\{f_n\} = [K]^{-1}\{F\}$$

Det[K]≠0

Struttura non labile

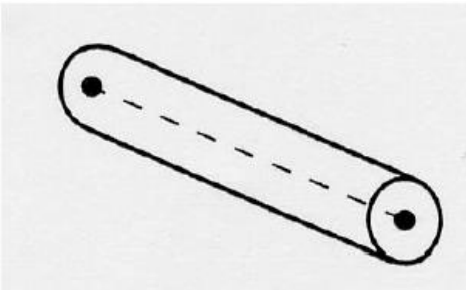
Applicare un vincolo vuol dire anche assegnare "a priori" il valore di una delle componenti di spostamento (g.d.l.) e, di conseguenza, ridurre di 1 il numero di incognite ed equazioni.

PRINCIPALI TIPI DI ELEMENTO E LORO IMPIEGO



$$\{u\} = [K]^{-1}\{F\}$$

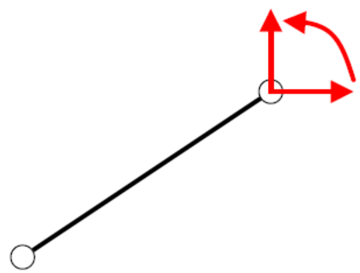
Elementi monodimensionali



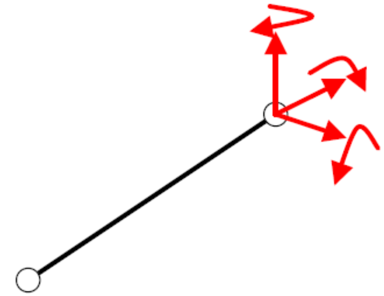
Elemento tipo trave
a 2 nodi

TRAVE

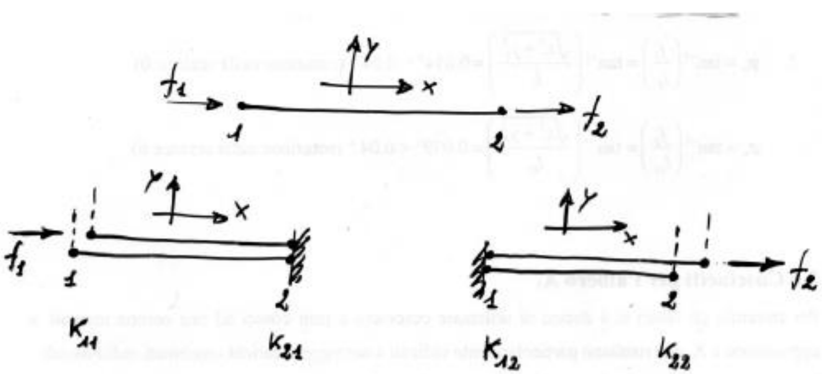
2D



3D



SFORZO NORMALE



$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

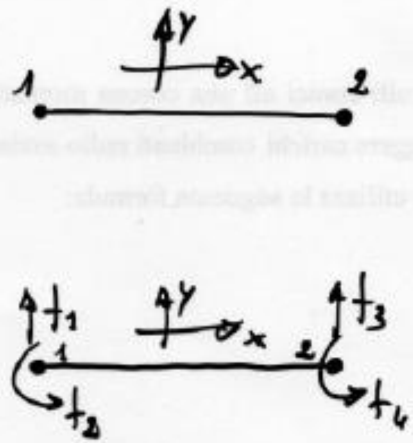
Ordine della matrice =

Numero di punti × gradi di libertà per punto

$$f = \frac{F\ell}{EA} \qquad \frac{F}{f} = k = \frac{EA}{\ell}$$

$$K_{11} = \frac{EA}{\ell} \qquad K_{12} = -\frac{EA}{\ell} \qquad K_{21} = -\frac{EA}{\ell} \qquad K_{22} = \frac{EA}{\ell}$$

SFORZO DI FLESSIONE



$$\frac{EJ_z}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & & & \\ 6l & 4l^2 & & \\ -12 & -6l & 12 & \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} = [k]$$

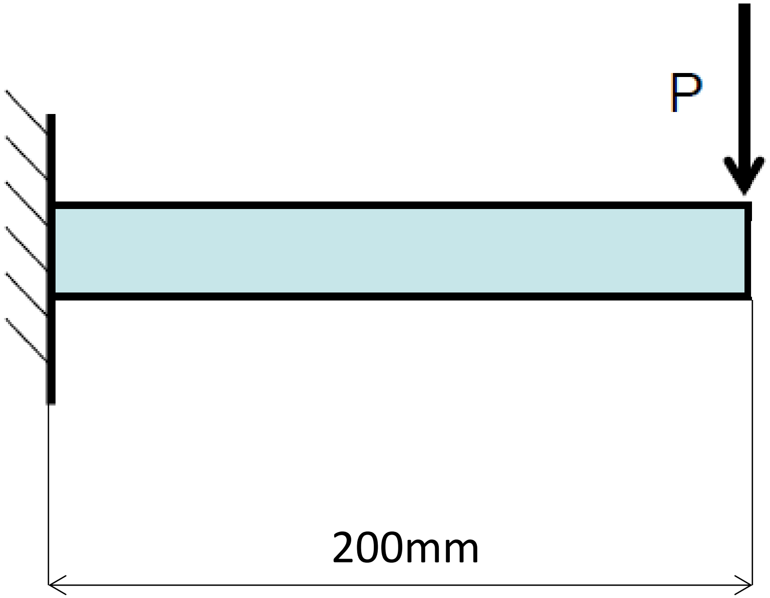
Elementi monodimensionali

Nel FEM vengono utilizzati elementi «beam» per la simulazione di strutture reticolari, elementi articolati (es: manipolatori robotici,…) e tutte le applicazioni riconducibili a tale tipo di elemento.

Ad una geometria di tipo «linea», viene innanzitutto associato un tipo di sezione, ne vengono definite le dimensioni e i materiali.

A questo punto la struttura viene discretizzata utilizzando elementi «beam» e vengono applicati i vincoli e i carichi.

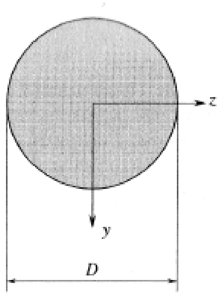
Esempio n.1: Valutare lo stato tensionale di una trave incastrata soggetta a momento flettente per effetto della forza P=100kN



Considerare le seguenti sezioni:

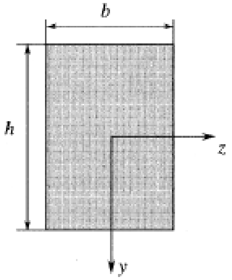
1) Sezione circolare

D= 20mm

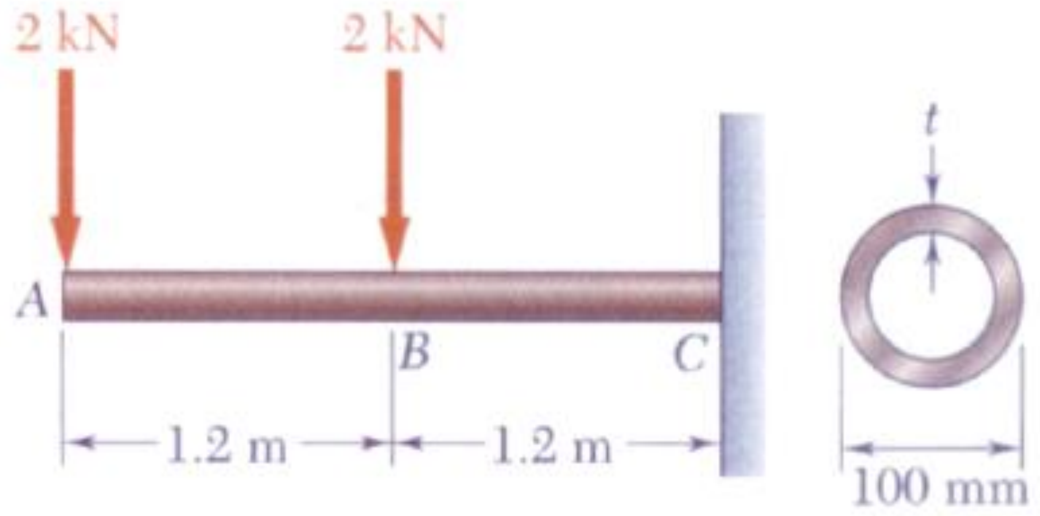


2) Sezione rettangolare

h= 20mm
b= 15mm



Esempio n.2: Un tubo in acciaio, incastrato ad una estremità e avente diametro esterno pari a 100 mm, deve sostenere i carichi mostrati in figura. Sapendo che le serie commerciali hanno spessori t compresi tra 6 e 24 mm, con incrementi di 3 mm, e che la tensione ammissibile per l'acciaio è di 168 MPa, determinare il tubo di minimo spessore utilizzabile

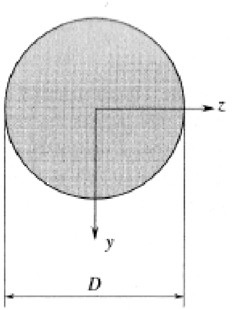


Sforzi massimi originati dalla presenza di momento flettente

1) SEZIONE CIRCOLARE PIENA

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{J}$$ Il momento di inerzia vale: $$J = \frac{\pi}{64} \cdot D^4$$ Mentre y_{max} vale D/2

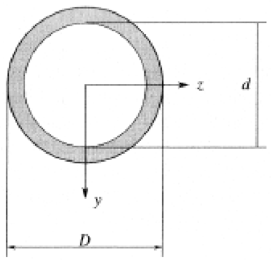
$$\sigma_x = \frac{M \cdot \frac{D}{2}}{\frac{\pi}{64} \cdot D^4} = \frac{64 \cdot M \cdot D}{2 \cdot \pi \cdot D^4} = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot D^3}$$



2) SEZIONE CIRCOLARE CAVA

Il momento di inerzia vale: $$J = \frac{\pi}{64} \cdot D^4 - \frac{\pi}{64} \cdot d^4 = \frac{\pi}{64} \cdot \left(D^4 - d^4\right)$$ Mentre y_{max} vale D/2

$$\sigma_x = \frac{M \cdot \frac{D}{2}}{\frac{\pi}{64} \cdot \left(D^4 - d^4\right)} = \frac{64 \cdot M \cdot D}{2 \cdot \pi \cdot \left(D^4 - d^4\right)} = \frac{32 \cdot M \cdot D}{\pi \cdot \left(D^4 - d^4\right)}$$

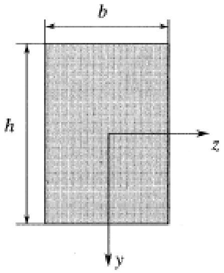


Sforzi massimi originati dalla presenza di momento flettente

1) SEZIONE RETTANGOLARE PIENA

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{J}$$ Il momento di inerzia vale: $$J = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$$ Mentre y_{max} vale h/2

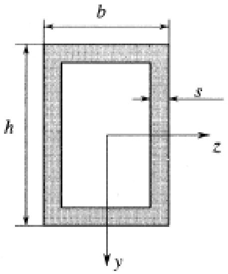
$$\sigma_x = \frac{M \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3} = \frac{12 \cdot M \cdot h}{2 \cdot b \cdot h^3} = \frac{6 \cdot M}{b \cdot h^2}$$



2) SEZIONE RETTANGOLARE CAVA (di spessore s)

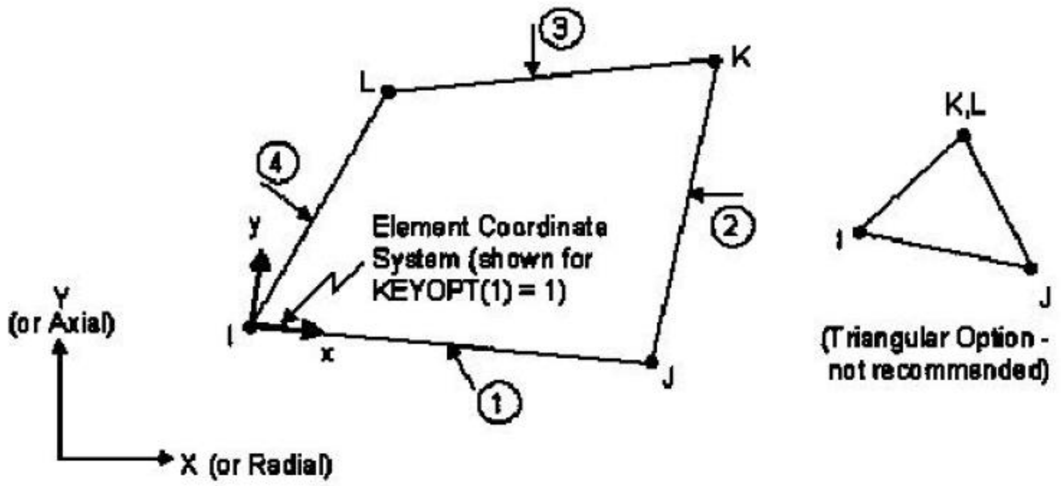
Il momento di inerzia vale: $$J = J_{pieno} - J_{vuoto} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 - \frac{1}{12}(b - 2s) \cdot (h - 2s)^3$$ y_{max} vale h/2

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot \frac{h}{2}}{J} = \frac{6 \cdot M \cdot h}{b \cdot h^3 - (b - 2s) \cdot (h - 2s)^3}$$



Elementi piani

Figure 1. PLANE42 2-D Structural Solid

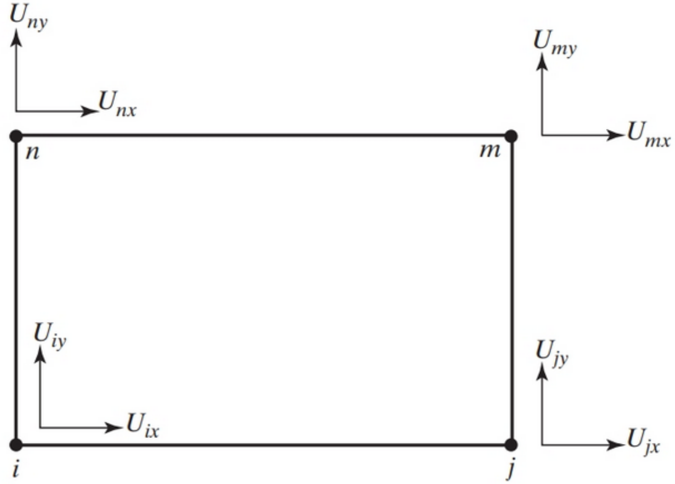


Problemi di elasticità piana

- *4 (3) nodi*
- *2 g.d.l /nodo*
- *tre "classi" di problemi:*
- *stati piani di tensione ("plane stress")*
- *stati piani di deformazione ("plane strain")*
- *stati assialsimmetrici ("axi-symmetric stress/strain")*

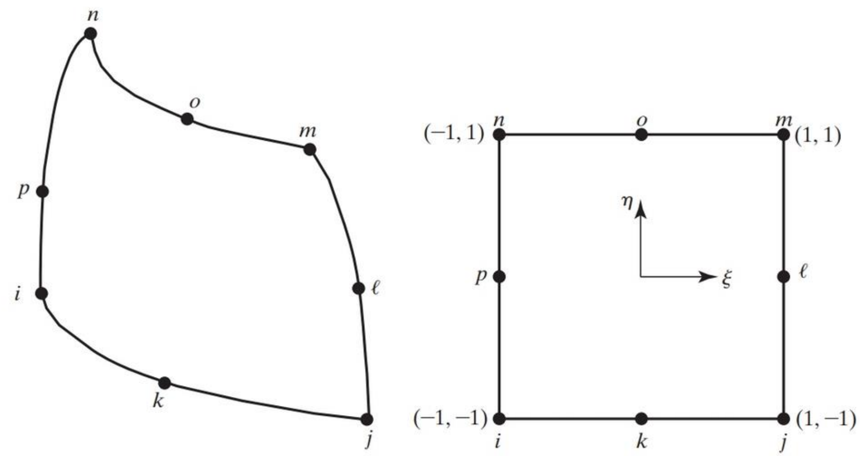
Elementi piani

linear rectangular element used in formulating plane-stress problems.

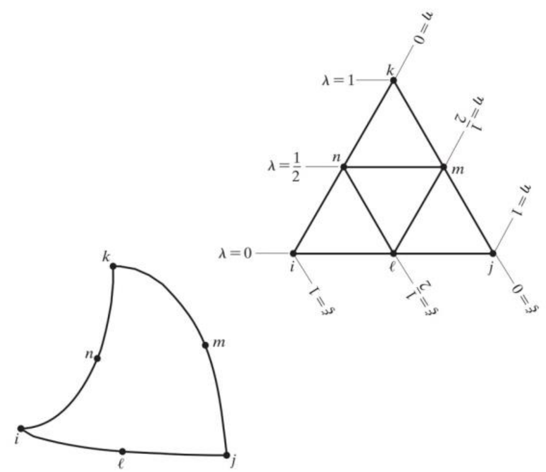


$$u^{(e)} = S_i U_{ix} + S_j U_{jx} + S_m U_{mx} + S_n U_{nx}$$
$$v^{(e)} = S_i U_{iy} + S_j U_{jy} + S_m U_{my} + S_n U_{ny}$$

Quadratic rectangular element used in formulating plane-stress problems.



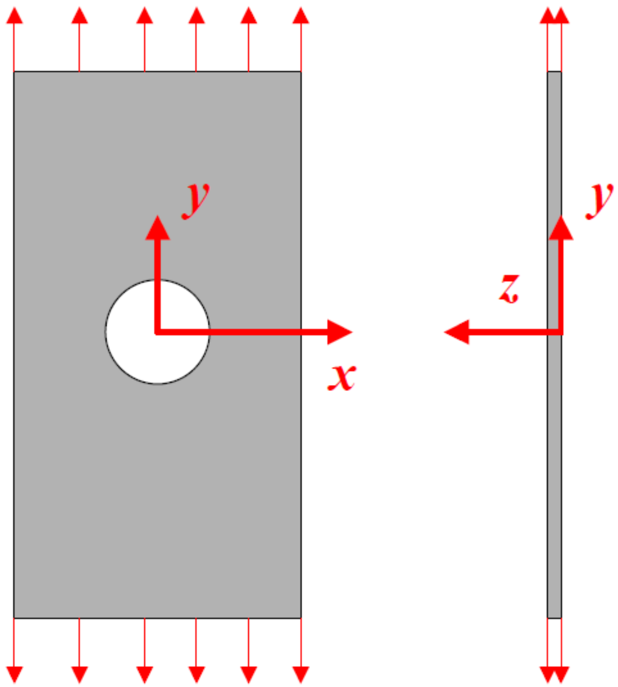
Quadratic triangular element used in formulating plane-stress problems.



Stati piani di tensione:

• sono caratterizzati dall'avere una delle componenti principali di tensione identicamente nulla

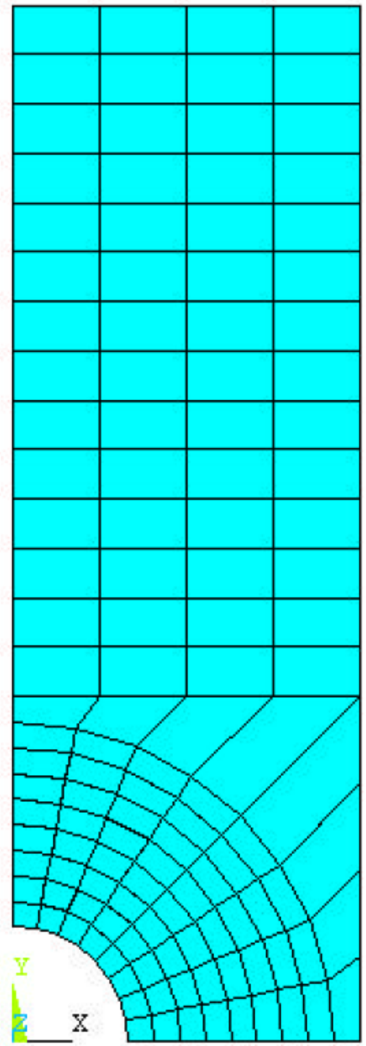
• si verificano tipicamente in corpi piani, di spessore piccolo rispetto alle altre dimensioni caratteristiche del problema, caricati nel loro piano medio.

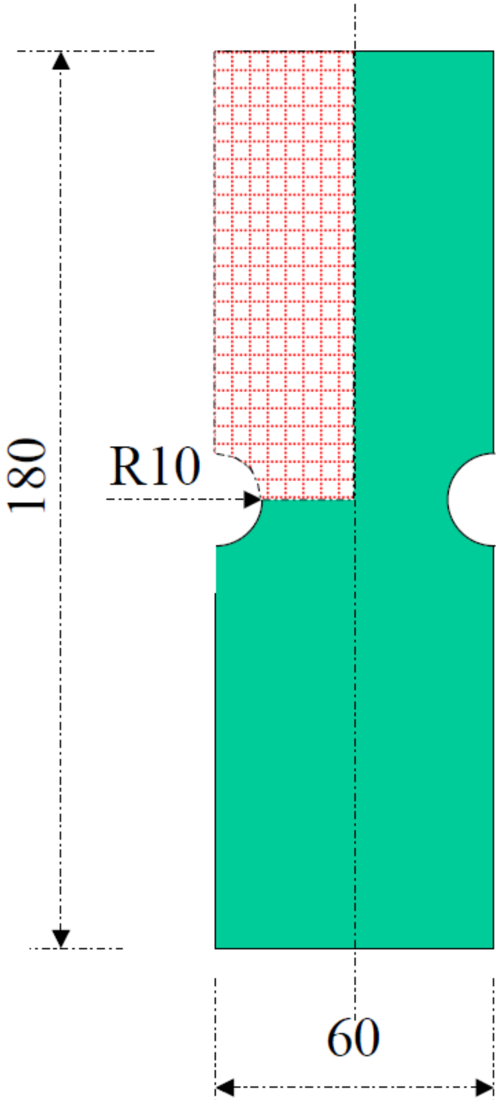


$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \neq 0$$

Il modello giace sul piano "x-y" e rappresenta il piano medio (a metà spessore) della struttura.
I carichi possono essere sull'intero spessore o per unità di spessore.





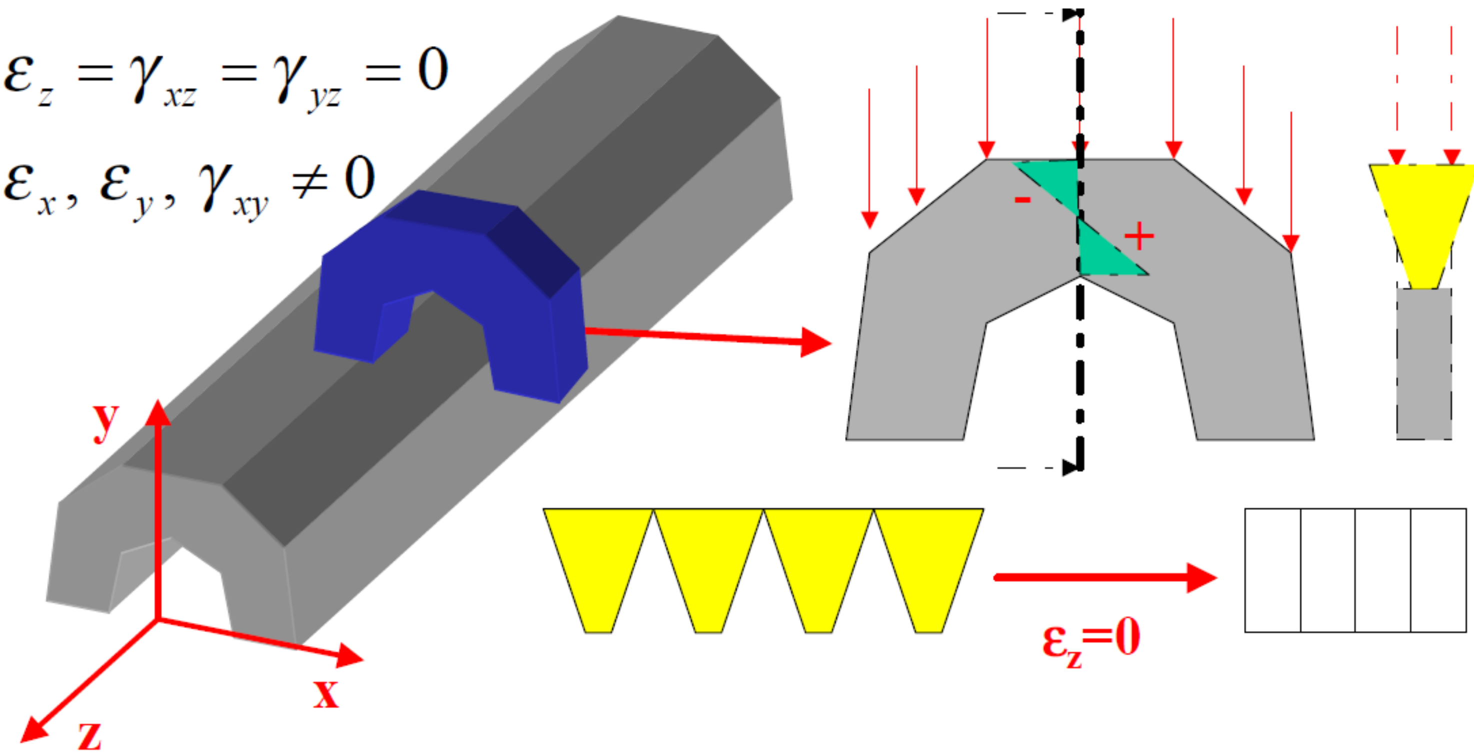
Elementi piani - Stati piani di deformazione

Stati piani di deformazione:

- sono caratterizzati dall'avere una delle componenti principali di deformazione identicamente nulla
- si verificano tipicamente in corpi di spessore grande rispetto alle altre dimensioni caratteristiche del problema.

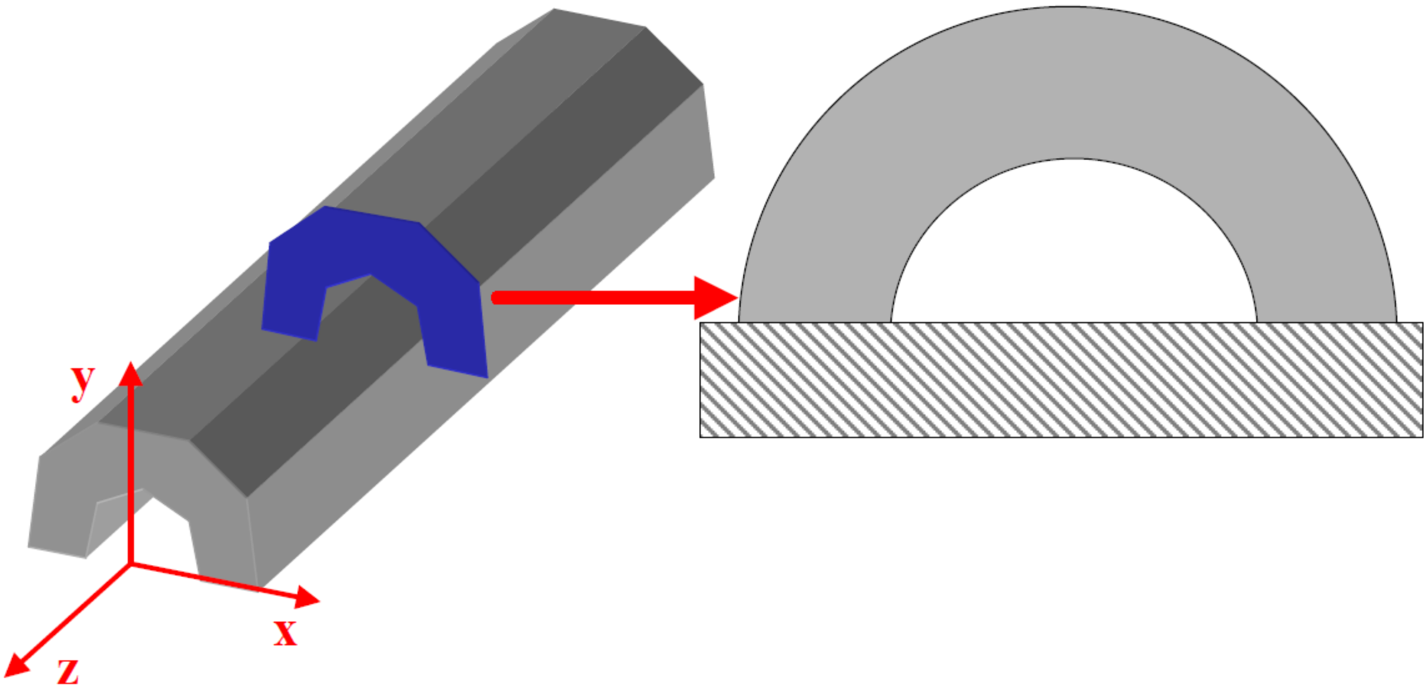
$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \neq 0$$



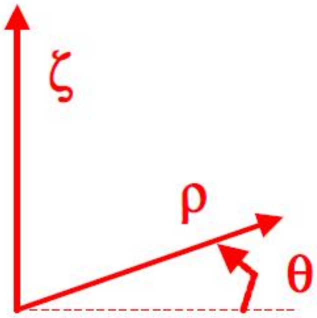
Elementi piani - Stati piani di deformazione

Il modello giace sul piano “x-y” e rappresenta una sezione, eseguita con un piano ortogonale all’asse z, della struttura.
I carichi sono per unità di spessore.

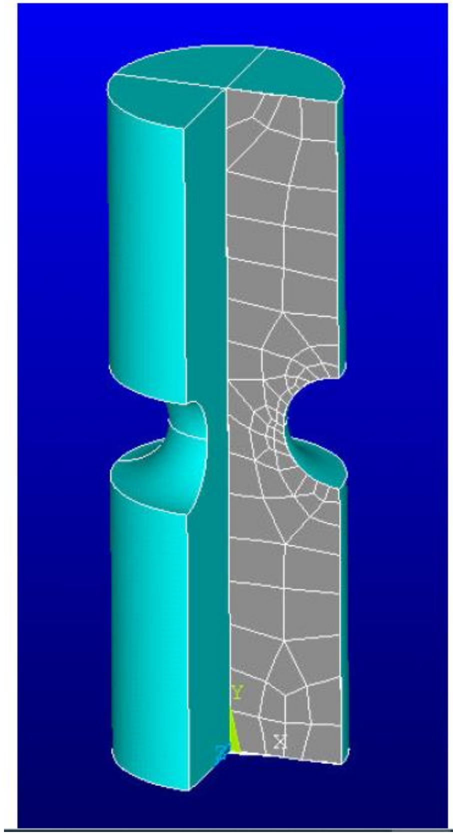


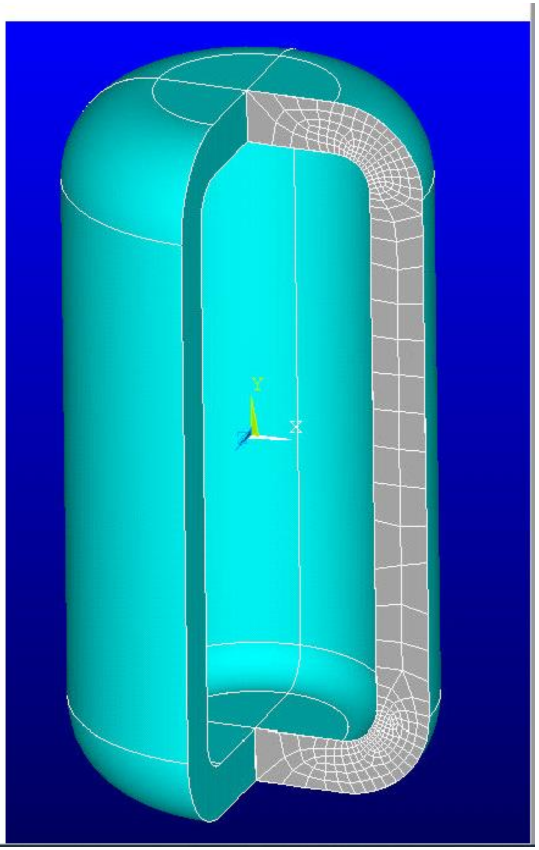
Elementi piani - Stati assial-simmetrici

- si verificano in corpi di geometria assial-simmetrica (ottenibile per rotazione di una sezione attorno ad un asse fisso z) caricati con carichi che presentano lo stesso tipo di simmetria.
- fissato un SR cilindrico "ρ, ϑ, ζ", per simmetria lo stato di tensione/deformazione risulta indipendente da ϑ e le componenti di spostamento in direzione circonferenziale (ϑ) risultano nulle: il problema può di conseguenza essere studiato come piano.

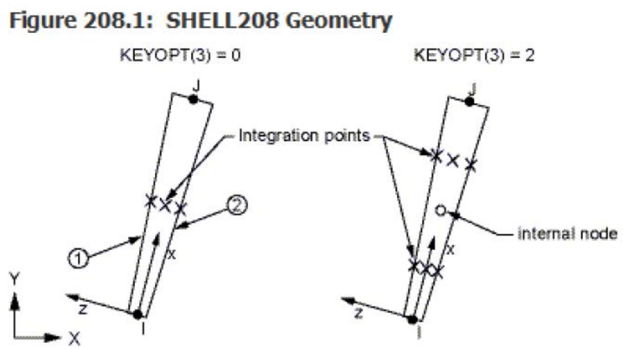


Il modello deve rappresentare una sezione del corpo fatta con un piano passante per l'asse di simmetria (in ANSYS, l'asse di simmetria e la direzione radiale devono coincidere rispettivamente con l'asse "Y" e l'asse "X" del SR cartesiano globale).





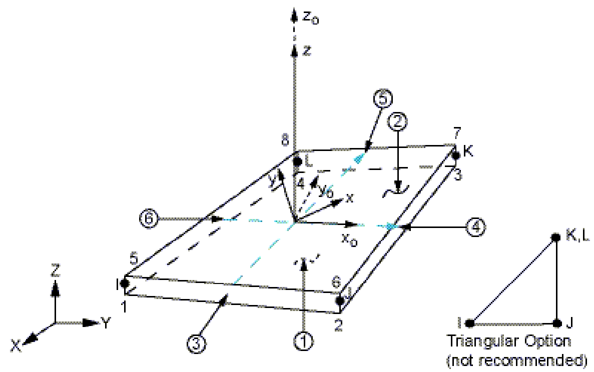
ELEMENTO GUSCIO ASSIALSIMMETRICO



Gusci aventi geometria assialsimmetrica, soggetti a carichi assialsimmetrici (SHELL208)

- 2 nodi
- 3 g.d.l /nodo(ux, uy e θz)

ELEMENTO GUSCIO ASSIALSIMMETRICO



Gusci e piastre aventi geometrie qualsiasi

- 4 nodi
- 6 g.d.l /nodo

Problemi assialsimmetrici dovrebbero essere modellati con elementi assialsimmetrici per ridurre i tempi di calcolo rispetto ai modelli 3D

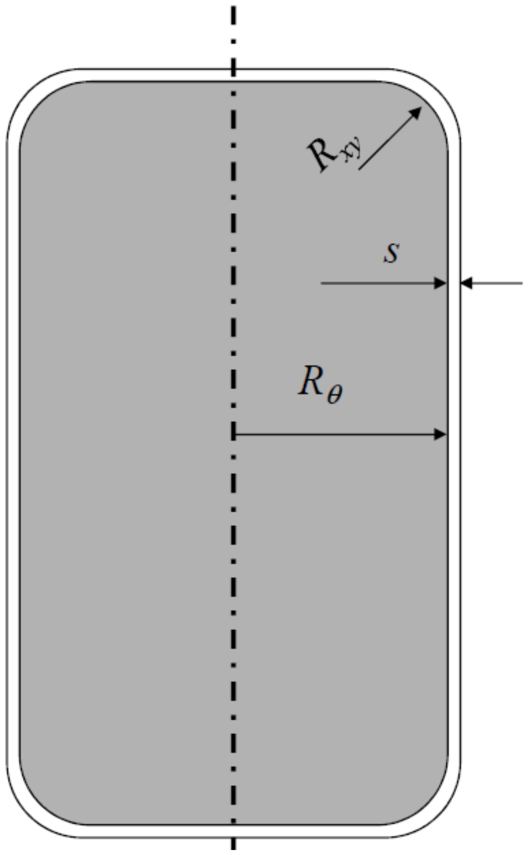
Elementi guscio

Le funzioni di forma di entrambi gli elementi si basano sull'ipotesi di Kirchoff-Love: "una linea retta normale al piano medio tracciata sul corpo prima della deformazione, risulta ancora rettilinea ed ortogonale al piano medio deformato dopo la deformazione"

Possibile ricostruire lo spostamento di ogni punto dello spessore in base a spostamenti e rotazioni del piano medio.

Limiti di validita ipotesi Kirchoff-Love: spessore << altri parametri geometrici

Componenti strutturali che possano essere assimilati a "gusci" o "piastre" sottili di geometria assialsimmetrica

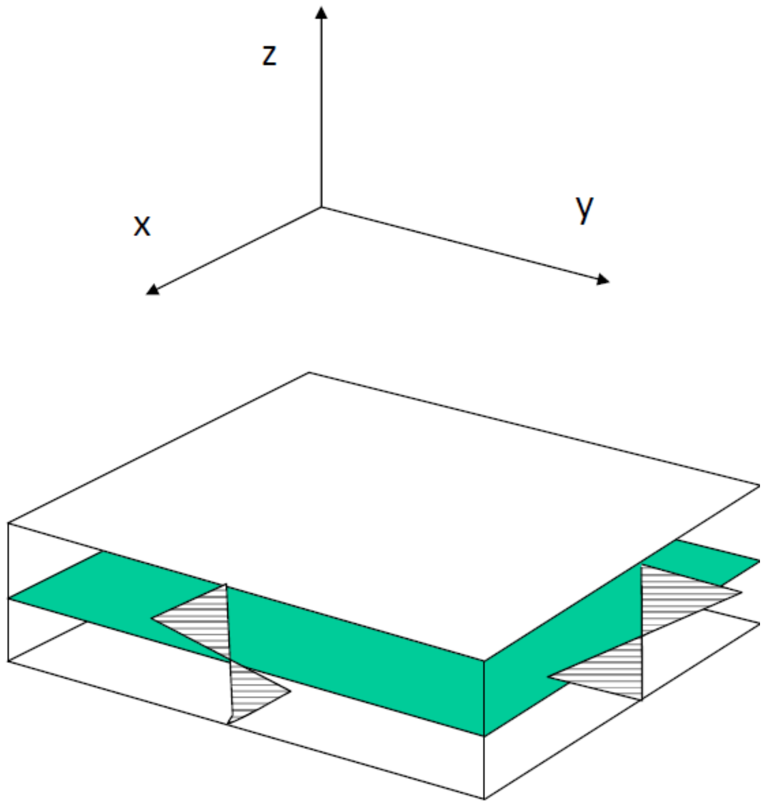


$S << R_\theta$

$S << R_{xy}$

Elementi guscio

- Componenti di tensione: σx, σy, τxy, τxz, τyz
- Andamento lineare nello spessore



Elementi guscio

1. Componenti di tensione: σx, σy, τxy, τxz, τyz
2. Andamento lineare nello spessore

Viene simulato:

1. Comportamento membranale : u_x, u_y, u_z
2. Comportamento membranale+flessionale: $u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$

Teoria «membranale» dei gusci sottili

Escluse particolari zone, solitamente di limitata estensione, lo stato di tensione dei gusci sottili può essere analizzato ipotizzando che lo **stato di tensione sia costante nello spessore** (Teoria membranale dei gusci sottili)

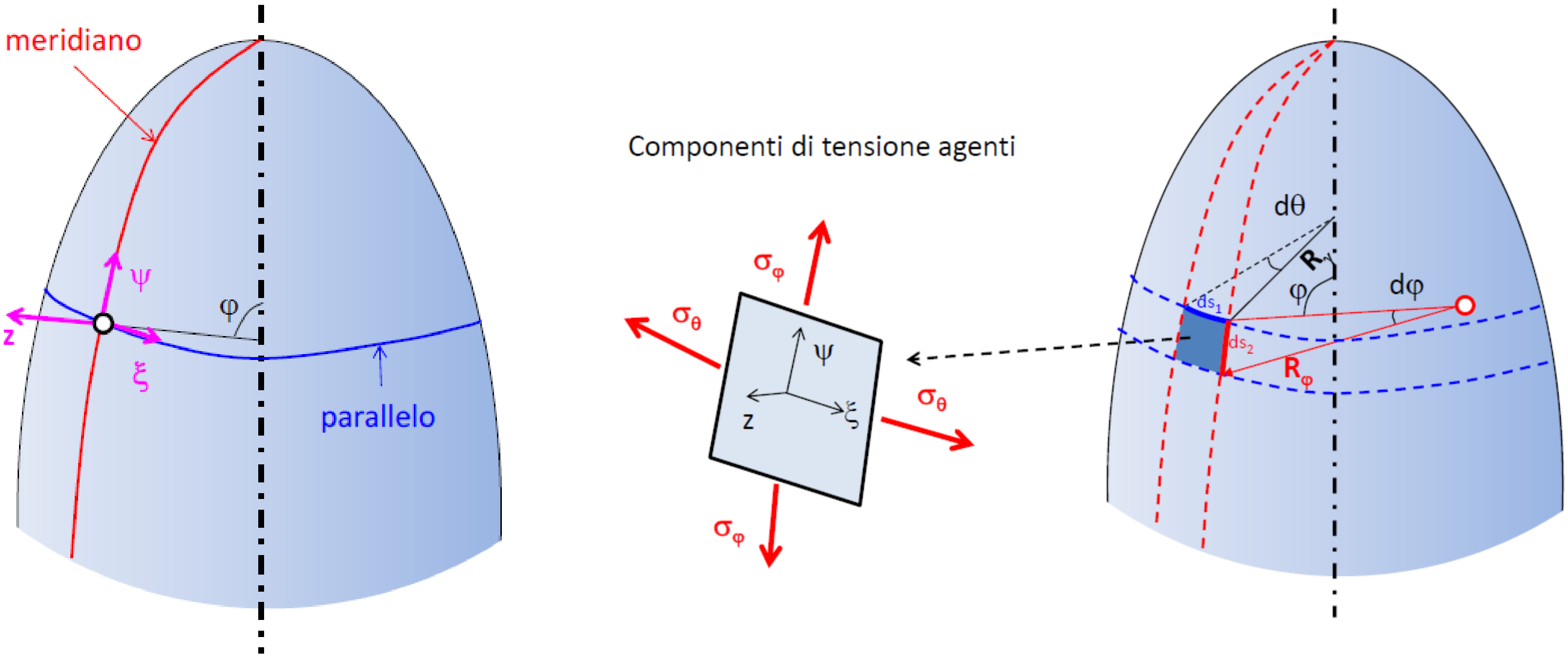
Ipotesi preliminari della teoria dei gusci sottili

- spostamenti sotto carico molto minori dello spessore
- punti dello spessore che, prima della deformazione, giacevano su di una retta ortogonale alla superficie media, dopo la deformazione continuano a formare una retta ortogonale alla superficie media deformata (ipotesi di Kirchoff).
- le tensioni normali agenti ortogonalmente al piano medio della piastra siano trascurabili (stato piano di tensione)

Elementi guscio

In base alle ipotesi generali fatte, per i gusci sottili assialsimmetrici possono essere introdotte le seguenti ulteriori semplificazioni:

- la componente di spostamento in direzione circonferenziale è nulla per simmetria
- le componenti di spostamento, tensione e deformazione sono costanti in direzione circonferenziale e cambiano solo nella direzione meridiana



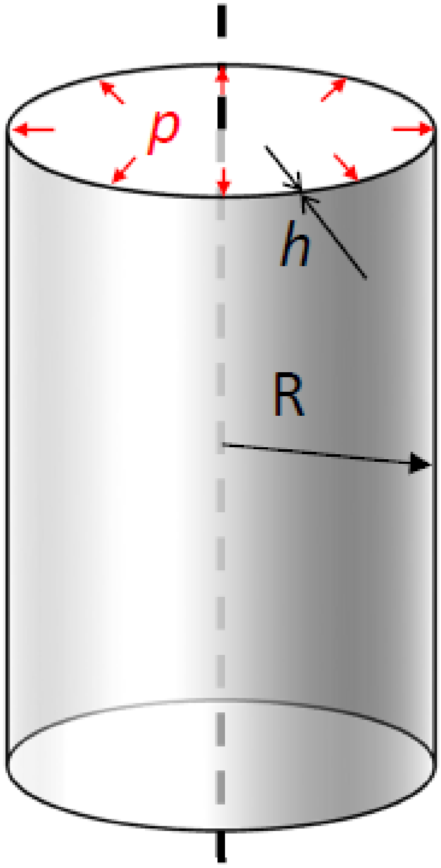
Elementi guscio

Recipienti in parete sottile

- ***guscio cilindrico soggetto a pressione interna e aperto alle estremità***

$$\sigma_\varphi = 0 \qquad \sigma_\theta = \frac{p \cdot R}{h}$$

Formula di Boyle e Mariotte



- ***guscio cilindrico in pressione chiuso alle estremità (per il quale risulta invece dall'equilibrio assiale)***

$$\sigma_\varphi = \frac{p \cdot R}{2h} \qquad \sigma_\theta = \frac{p \cdot R}{h} \qquad \Delta R = \varepsilon_\theta R = \frac{\sigma_\theta - \nu\sigma_\varphi}{E} R = \frac{p \cdot R^2 (2-\nu)}{2hE}$$

- ***guscio sferico in pressione***

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{p \cdot R}{2h} \qquad \Delta R = \varepsilon_\theta R = \frac{\sigma_\theta - \nu\sigma_\varphi}{E} = \frac{p \cdot R^2 (1-\nu)}{2hE}$$

Caso più comune $p_e = 0$ -> Le tensioni nel punto più sollecitato, cioè a $r = r_i$ valgono

$$\sigma_t = p\frac{r_i^2 + r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}$$

$$\sigma_r = -p$$

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & \text{per fondi con tiranti} \\ p\frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} & \text{per fondi di pezzo} \end{cases}$$