CORSO DI MATEMATICA E STATISTICA
SIMULAZIONE PROVA SCRITTA 5 NOVEMBRE 2024

Cognome	Nome
BEORCHIA	VALENTINA
Corso di Laurea	Matricola

(1) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 3x - 5$, dire se:
 (a) f è biiettiva, motivando la risposta;
 (b) in caso affermativo, determinare la funzione inversa di f.

(a) f iniettiva: per definizione $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$3x_1 - 5 = 3x_2 - 5 \quad /+5$

$3x_1 = 3x_2 \quad /:3$

$x_1 = x_2$: quindi è iniettiva

f suriettiva: per definizione, per ogni $r \in \mathbb{R}$, cerco $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $f(\bar{x}) = r$; cioè: $\bar{x}$ tale che $3\bar{x} - 5 = r$;
se pongo $\bar{x} = \frac{r+5}{3}$, si ha $3 \cdot \left(\frac{r+5}{3}\right) - 5 = r$, quindi f è anche suriettiva.

(b) f^{-1} è la funzione che $f^{-1}(y) = x$, dove x è l'unico elemento tale che $f(x) = y$,
cioè $3x - 5 = y \quad /+5$

$3x = y + 5 \quad /:3$

$x = \frac{y+5}{3} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+5}{3}$.

(2) Siano $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ i termini di una progressione aritmetica. La somma dei primi n termini è

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = 4n - n^2.$$

 (a) Quanto vale a_0? Quanto vale a_1?
 (b) Qual'è la ragione della progressione aritmetica? Calcolare il termine a_9.

(a) $n = 1$: somma dei primi 1 termine : $a_0 = 4 \cdot 1 - 1^2 = 3$

$n = 2$ somma dei primi 2 termini : $a_0 + a_1 = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$

$a_1 = 4 - a_0 = 1$

(b) in generale per una progress. aritmetica si ha
$a_1 = a_0 + d$, $a_2 = a_0 + 2d$, ..., $a_k = a_0 + k \cdot d$

In particolare: $d = a_1 - a_0 = 1 - 3 = -2$

$k = 9$: $a_9 = a_0 + 9 \cdot d = 3 + 9 \cdot (-2) = -15$.

(3) Si stabilisca, motivando la risposta, se la funzione $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ammette punti di massimo e minimo relativi, e in tal caso determinarli.

$\neq 0$

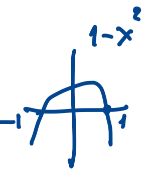
$\boxed{\geq 0}$

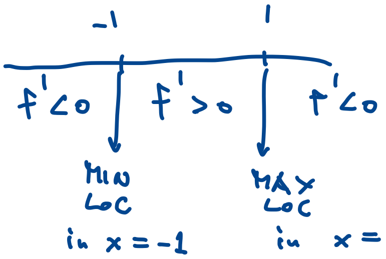
> 0

$D_f = \mathbb{R}$

Cerco i punti critici: $f'(x) = \dfrac{x' \cdot (x^2+1) - x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) \begin{cases} > 0 & : -1 < x < 1 \\ = 0 & : x = 1 \text{ opp. } x = -1 \\ < 0 & : x < -1, \text{ opp. } x > 1 \end{cases}$





Quindi: $x = -1$ è un MINIMO LOCALE, $x = 1$ è un MASSIMO LOCALE. Osservo, infine, che f' è definita su tutto D_f, quindi non ci sono altri estremi locali.

(4) Usando la derivata seconda, si determinino intervalli di convessità e concavità, nonchè eventuali punti di flesso, della funzione $f(x) = x \ln x$.

Si scriva, inoltre, il polinomio $P_3(x)$ al terzo ordine di $f(x)$ nel punto $x_0 = 1$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty)$

$f'(x) = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

$f''(x) = (\ln x)' + (1)' = \dfrac{1}{x} + 0 = \dfrac{1}{x} \begin{cases} > 0 & : x > 0 \\ < 0 & : x < 0 : \text{ tali } x \text{ non appartengono a } D_f \end{cases}$

$\Rightarrow$ su D_f la funzione è CONVESSA

POLINOMIO DI TAYLOR in $x_0 = 1$:

$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \dfrac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3$

$f'''(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{(1)' \cdot x - 1 \cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$

$x_0 = 1$

$P_3(x) = 1 \cdot 0 + (0+1) \cdot (x-1) + \dfrac{1}{2} (x-1)^2 + \dfrac{(-1)}{6} (x-1)^3$

$= (x-1) + \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - \dfrac{1}{6}(x-1)^3$