

6 Novembre

$$f(x) = ([x]^3 - [x]) e^{-[x]^2}$$

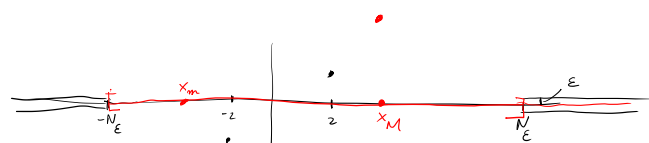
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x]^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] \cdot [x] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x]^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] \cdot [x] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ([x]^3 - [x]) e^{-[x]^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]^3 - [x]}{e^{[x]^2}} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |x| > N_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

$$f(x) = ([x]^3 - [x]) e^{-[x]^2} = [x] ([x]^2 - 1) e^{-[x]^2}$$



$$f(2) = 2(4 - 1) e^{-4} = 6 e^{-4} > 0$$

$$f(-2) = -6 e^{-4} < 0$$

$$\text{Scelgo } 0 < \varepsilon_0 < 6 e^{-4} \text{ ad esempio } \varepsilon_0 = 3 e^{-4}$$

$$\text{e considero il corrispondente } N_{\varepsilon_0} \in \mathbb{N}$$

$$\text{In } x \in [-N_{\varepsilon_0}, N_{\varepsilon_0}] \text{ allora la funzione}$$

$$[x] \text{ assume } 2N_{\varepsilon_0} + 1 \text{ valori e}$$

$$f(x) = ([x]^3 - [x]) e^{-[x]^2} \text{ al massimo assume } 2N_{\varepsilon_0} + 1$$

valori. Tra questi valori ce n'è uno massimo y_M ed uno minimo y_m . Esistono

$$\text{punti } x_M, x_m \in [-N_{\varepsilon_0}, N_{\varepsilon_0}] \text{ t.c. } f(x_M) = y_M$$

$$\text{e } f(x_m) = y_m$$

Ora dimostro che x_M è un punto di massimo su $\mathbb{R}$ e che cioè $f(x) \leq f(x_M) = y_M \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Per $x \in [-N_{\varepsilon_0}, N_{\varepsilon_0}]$ risulta che $f(x) \leq y_M$ per il modo in cui abbiamo scelto y_M e x_M .

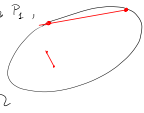
$$\text{Se } x \notin [-N_{\varepsilon_0}, N_{\varepsilon_0}] \Leftrightarrow |x| > N_{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$|f(x)| < \varepsilon_0 < f(2) \text{ dove } 2 \in [-N_{\varepsilon_0}, N_{\varepsilon_0}] \leq f(x_M)$$

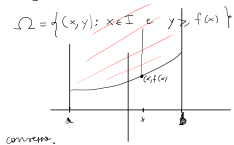
$$f(x) \leq |f(x)| \leq f(x_M) \quad \forall |x| > N_{\varepsilon_0}$$

Conclusione $f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

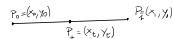
F è un'insieme convesso
 Sia Ω un sottoinsieme del piano $\mathbb{R}^2$
 Ω si dice convesso se, presi due suoi punti
 qualsiasi P_0 e P_1 ,
 il segmento
 di estremi
 questi due
 punti è
 contenuto in Ω



Def 1 Una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se la regione del piano sopra il grafico di f



è convessa.

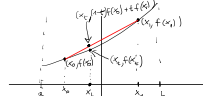


$$P_t = (1-t)P_0 + tP_1 \quad t \in [0, 1]$$

Questa è il segmento rappresentato in forma parametrica

$$\begin{aligned}
 (x_t, y_t) &= (1-t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1) \\
 &= ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1) \\
 &= ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_t = (1-t)x_0 + tx_1 \\ y_t = (1-t)y_0 + ty_1 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$



$$x_t = (1-t)x_0 + tx_1 \quad t \in [0, 1]$$

Nel diagramma $f(x_t) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1)$

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Def 2 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice
 convessa se

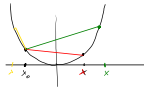
$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \quad \forall t \in [0, 1]$$

o in ogni $x_0, x_1 \in I$.

Def $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se

$\forall x_0 \in I$ la funzione

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ definita in } I \setminus \{x_0\} \text{ è crescente}$$



Lemma Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convessa e sia $x_0 \in I$

Allora esistono $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$.

$$\text{Dim} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \inf_{x < x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\}$$

Fisso $x_1 \in I$ con $x_1 < x_0$.

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\Rightarrow f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

Fisso $x_2 \in I$ con $x_0 < x_2$

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

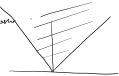
$$\sup_{x < x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

$$\Rightarrow f'_-(x_0) \text{ esiste}$$

$$\text{Nota che } f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$$

$$\sup_{x < x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\} = f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) = \inf_{x > x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\}$$

Es $|x|$ è convessa



Esempio Dimostrare che se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è tale
 che $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ esistono in un punto
 $x_0 \in I$ allora f è continua in x_0 .

Corollario Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa in I
 allora $f \in C^1(I)$.

Esempio Se E^1 ma con x_0 che $f \in C^1(I)$?

Se si dimostrasse, ottenendo due possibili controesempi.

Teorema Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $f'(x)$ sia definito $\forall x \in (a, b)$. Allora, sono equivalenti

1) f è convessa in (a, b)

2) $f'(x)$ è una funzione crescente in (a, b) .

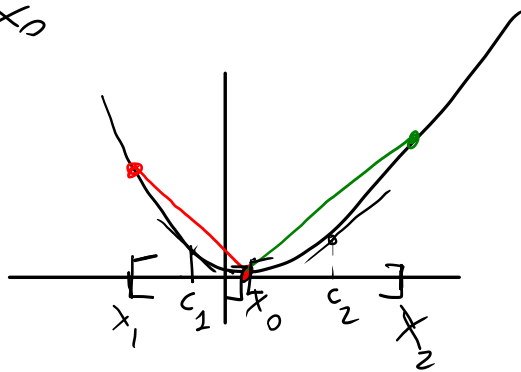
Dim 2) $\Rightarrow$ 1)

Mi limiterò a dimostrare che $\forall x_0 \in (a, b)$
e per ogni coppia $x_1 < x_0 < x_2$ si ha

$$(1) \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

Usa Lagrange in entrambi
i due intervalli

$[x_1, x_0]$ e $[x_0, x_2]$



Per Lagrange $\exists c_1 \in (x_1, x_0)$ e $c_2 \in (x_0, x_2)$

$$\text{t.c.} \quad f'(c_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

Ma $c_1 < x_0 < c_2 \Rightarrow f'(c_1) \leq f'(c_2)$.

Resta dimostrato la (1).

Corollario Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Allora sono equivalenti

1) f è convessa in (a,b)

2) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Dim $2) \Rightarrow 1)$

$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f'(x)$ è una funzione
crescente in $(a,b) \Rightarrow f$ è convessa in (a,b) .

Esempio 1) $f(x) = x^2$ è convessa in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = (2x)' = 2(x)' = 2 > 0$$

$$2) \quad f(x) = x^2 - x - 2$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow f \text{ è convessa}$$

3) e^x è convessa

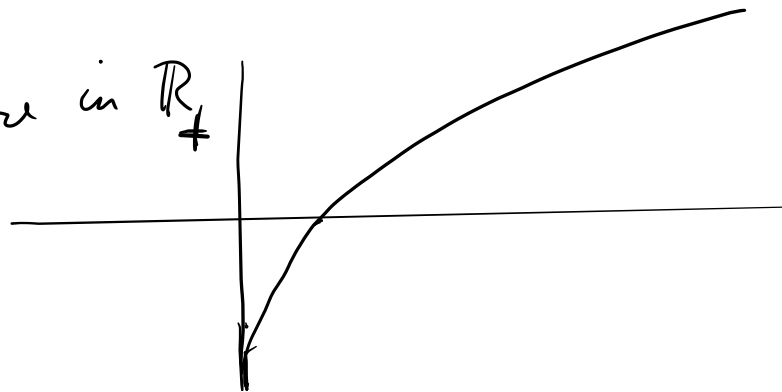
$$(e^x)'' = e^x > 0 \quad \forall x$$

Def f è concava se $-f$ è convessa

Teorema Se $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $f''(x) \exists \forall x \in (a,b)$
sono equivalenti

- 1) f è concavo in (a,b)
- 2) $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

E.s. $\lg x$ concavo in $\mathbb{R}_+$



$$(\lg x)'' = ((\lg x)')' = (x^{-1})' = -1 x^{-2} = -x^{-2} < 0$$

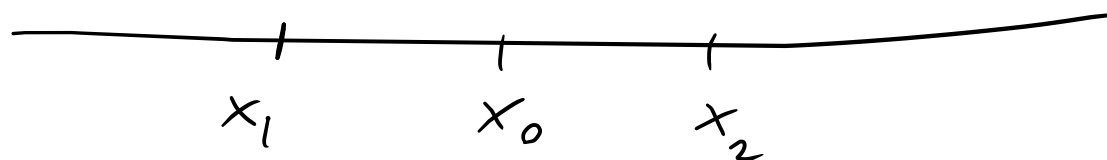
$\forall x > 0$.

$-x^2$ è concavo in $\mathbb{R}$

$$(-x^2)'' = -(x^2)'' = -2 < 0 \quad \forall x$$

In generale se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, f non è né concavo né convesso in I .

Se $x_1 < x_0 < x_2$ sono tre punti in I



e se se

f è ^(convesso) concavo in (x_1, x_0) e
convesso ^(concavo) in (x_0, x_2)

x_0 viene detto un punto di flesso.

Teorema Se $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e se $x_0 \in (a, b)$ è un punto di flesso e $f''(x_0)$ è definita, allora

$$f''(x_0) = 0.$$