Esercizi di Inferenza Statistica
Blocco II
a.a. 2024 – 2025

1. Siano X e Y le produzioni (in quintali) per ettaro del noccioleto A e B, rispettivamente. Si assume che il vettore aleatorio (X, Y) si distribuisca secondo una normale bivariata: X ha media 25 e varianza 1; Y ha media 30 e varianza 4; inoltre $\text{cor}(X, Y) = 0.5$. Si determini la probabilità che la produzione totale relativa a un ettaro del noccioleto A e 1.5 ettari del noccioleto B sia compresa tra 68 e 72 quintali.

2. Il peso X (in gr) di una mela in un frutteto è descritto da una variabile aleatoria normale ed è noto che $P(X > 155) = 0.3085$ e $P(X \leq 135) = 0.0668$.

   a. Determinare media e varianza di X;

   b. Una mela non è commercializzata se il suo peso risulta inferiore a 140 gr. Considerando un insieme di 1000 mele, qual è in media il numero di mele non commercializzate?

   c. Qual è la probabilità che, su 1000 mele, ne siano scartate più di 180?

3. Sia X_i, $i = 1, \ldots, 40$, il numero di acquisti all' i-esima ora lavorativa di una settimana in un negozio. Si assume che le X_i siano i.i.d. secondo Poisson$(\lambda = 2)$. Si calcoli la probabilità

   a. che nelle prime due ore del lunedì un solo cliente abbia effettuato spese in queste negozio.

   b. che in una settimana (40 ore lavorative), il numero totale di acquisti sia superiore a 100.

4. Una componente di un'apparecchiatura elettronica ha tempo di rottura (in giorni), X, assimilabile con una v.a. esponenziale di media λ (cioè $X \sim \text{Esp}(1/\lambda)$. Quando si verifica una rottura, il componente viene sostituito. In magazzino sono presenti 19 componenti di riserva.

   a. Supponendo $\lambda = 20$, determinare la probabilità che la componente duri oltre 25 giorni;

   b. Calcolare la probabilità che l'apparecchiatura venga mantenuta in funzione per oltre 1 anno (utilizzando, quando necessario, le componenti di ricambio disponibili);

   c. Determinare il numero di componenti da tenere in magazzino se si vuole che la probabilità che l'apparecchiatura funzioni per almeno un anno sia non inferiore a 0.8.

5. Un giocatore di basket ha una probabilità costante e ignota p di fare canestro con un tiro libero e si assuma che i suoi tentativi siano indipendenti. Quanti tiri dovrebbe effettuare il giocatore affinché sia almeno pari a 0.9 la probabilità che la proporzione di canestri differisca dal valore incognito p per non più di 0.05.

6. Un'azienda produce un nuovo modello di lavatrice. Per fornire informazioni sulla sua durata calcola la media delle durate per un campione di lavatrici. È noto che nella popolazione di lavatrici la deviazione standard della durata è pari a 100 ore. Quante lavatrici deve esaminare affinché la probabilità di osservare scostamenti inferiori a 10 ore (della media del campione dalla vera media) sia almeno pari a 0.95?

   a. Si risponda al quesito sfruttando la disuguaglianza di Chebychev.

   b. Come cambia il risultato se si ricorre al teorema del limite centrale?

7. Un esercizio si articola in due richieste. Si denoti con X_1 e X_2 il tempo per risolvere la prima richiesta e la seconda richiesta, rispettivamente. Si assuma che X_1 e X_2 siano v.a. indipendenti e che entrambe seguano una distribuzione esponenziale di media 0.1 ore.

   a. Quanto valgono media e varianza del tempo necessario per la risoluzione di un esercizio?

   b. Si determini la distribuzione della variabile aleatoria $Y = \min\{X_1, X_2\}$.

   c. Quanto vale la probabilità approssimata che il tempo di risoluzione di un blocco di 25 esercizi superi le 5 ore?

8. Un tiratore scelto si allena al tiro al bersaglio. Si immagini un sistema di coordinate cartesiano (X, Y) posizionato sul centro del bersaglio. Si assuma che sia X la distanza orizzontale dal centro del bersaglio di un colpo sparato, e Y la distanza verticale del colpo dal centro. Si assuma che X e Y siano distribuite secondo leggi Gaussiane identiche e indipendenti con media pari a 0 e varianza pari a 2.

   a. Si determinino la funzione di ripartizione e la densità della variabile $W = (X/\sigma)^2 + (Y/\sigma)^2$; quindi, si ottengano la $P(W < 4.605)$ e il quantile di ordine 0.05 di W;
   b. Si calcoli la probabilità $P(R > 0.65)$, con R la distanza radiale di un colpo sparato dal centro del bersaglio, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$
   c. Determinare la distanza r dal centro del bersaglio in $(0, 0)$ per cui risulti pari a 0.5 la probabilità che un colpo sia a distanza inferiore di r dal centro.

9. La temperatura Y registrata da un termostato ha distribuzione normale con media μ e varianza σ^2. Siano $\overline{Y}$ la media campionaria e S^2 la varianza campionaria. Supponendo di analizzare la temperatura rilevata per un campione di $n = 5$ termostati presenti in un condominio, si calcoli:

   a. $P(S^2/\sigma^2 \leq 2.66)$;
   b. $P\left(\left|\overline{Y} - \mu\right| > 1.15S\right)$.

10. Sia $(Y_1, \ldots, Y_{20})$ un campione casuale proveniente da Y distribuita secondo una normale con media 0 e varianza σ^2. Siano $\overline{Y}$ la media campionaria e S^2 la varianza campionaria.

    a. Si determini la distribuzione di probabilità della v.a. $20\overline{Y}^2/S^2$;
    b. Si determini la costante c per la quale $P(-c < S/\overline{Y} < c) = 0.05$.

11. Una macchina per l'imbottigliamento dell'olio è calibrata in modo tale che la quantità effettiva di olio in ogni bottiglia, X, è una variabile aleatoria normale con media $0.95l$. Si consideri un campione di 20 bottiglie e siano $\overline{X}$ la media campionaria, S^2 la varianza campionari e $D^2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i - 0.95)^2$. Si determinino i valori h, k, m in modo che

    a. $P(|\overline{X} - 0.95| > hD) = 0.05$;
    b. $P(|\overline{X} - 0.95| < kS) = 0.99$;
    c. $P(S^2 < m\sigma^2) = 0.95$.

12. Si vuole valutare la differenza in termini di percorrenza tra due modelli di macchine elettriche. La percorrenze (in km) Y_1 e Y_2 percorsi dalle due auto si distribuiscono normalmente con medie $\mu_1 = 600$ e $\mu_2 = 675$, e deviazioni standard $\sigma_1 = 30$ e $\sigma_2 = 40$. Si consideri un campione di ampiezza $n_1 = 12$ da Y_1, e un campione di ampiezza $n_2 = 14$ da Y_2.

    a. Si calcoli la probabilità $P(\overline{Y}_2 > 50 + \overline{Y}_1)$.
    b. Si calcoli la probabilità $P(S_2^2 > 3.67S_1^2)$.