# Spazi Affini

**Def 1:** Uno **SPAZIO AFFINE $A$** è della forma $V+v$, dove $V$ è spazio vettoriale su campo $K$ (sottospazio di $K^m$ per qualche $m$) e $v$ è il vettore di traslazione ($A$ è quindi uguale ad uno spazio vettoriale ma traslato via dall'origine di un vettore $v$). $V$ si chiama la **GIACITURA** di $A$.

Un **RIFERIMENTO AFFINE per $A$** (O SISTEMA di COORDINATE AFFINI):

$$\left(A \ni \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ORIGINE DEL} \\ \text{RIFERIMENTO}}}{O}, \; B := \underset{\substack{\uparrow \\ \text{BASE DI } V}}{\{v_1, \dots, v_n\}}\right)$$

Se $P \in A \Rightarrow$ esprimiamo le coordinate di $\overrightarrow{OP}$ nella base $B$:

$\overrightarrow{OP} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ sono le **coordinate** di $P$ rispetto a $(O, B)$.

**Def 2:** Uno **SPAZIO AFFINE** è lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare. Sia $A \in M_{n\times m}(K)$, $b \in K^n$

$$\mathbb{A} := \{x \in K^m \mid A\cdot x = b\}$$
$$V := \{x \in K^m \mid A\cdot x = 0\}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{A}$ SPAZIO AFFINE con **GIACITURA** $W$, più precisamente:

DAL **TEOREMA di STRUTTURA** PER SOLUZIONI di SISTEMI LINEARI SAPPIAMO che POSSIAMO SCEGLIERE QUALSIASI $\tilde{S}$ CHE SIA SOLUZIONE DI $Ax=b$.

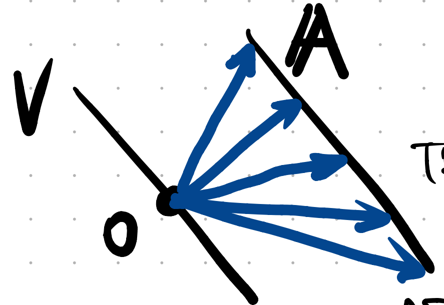
$$\boxed{\mathbb{A} = V + \tilde{S}}$$

SPAZIO VETTORIALE CHE È GIACITURA

VETTORE DI CUI È TRASLATO

TANTE TRASLAZIONI DIVERSE POSSONO PRODURRE LO STESSO SPAZIO

**Oss:** NON SOLO, MA TUTTI I SISTEMI LINEARI **EQUIVALENTI, PER DEFINIZIONE** PRODUCONO LO STESSO SPAZIO DI SOLUZIONI $\mathbb{A}$ E CE NE SONO INFINITI PERSINO RESTRINGENDOSI AI SISTEMI IN FORMA **SCALA** CE NE SONO INFINITI CHE SONO **EQUIVALENTI**




TRASLANDO $V$ DI OGNI VETTORE **BLU** PRODUCE LO STESSO SPAZIO AFFINE $\mathbb{A}$ [IL RIFERIM. PUÒ ESSERE DIVERSO PERÒ].

**Def:** Le equazioni $A\cdot x = b$ sono dette **CARTESIANE.**

**TEOREMA** Def 1 $\Leftrightarrow$ Def 2 **Dim.:** Sernesi

**Def:** Se $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale e $Q \in \mathbb{A} \Rightarrow$ il **SOTTOSPAZIO AFFINE $S$ di $\mathbb{A}$ con GIACITURA $W$** è il sottoinsieme di $\mathbb{A}$:

$$S := \{ P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} \in W \} \subseteq \mathbb{A}$$

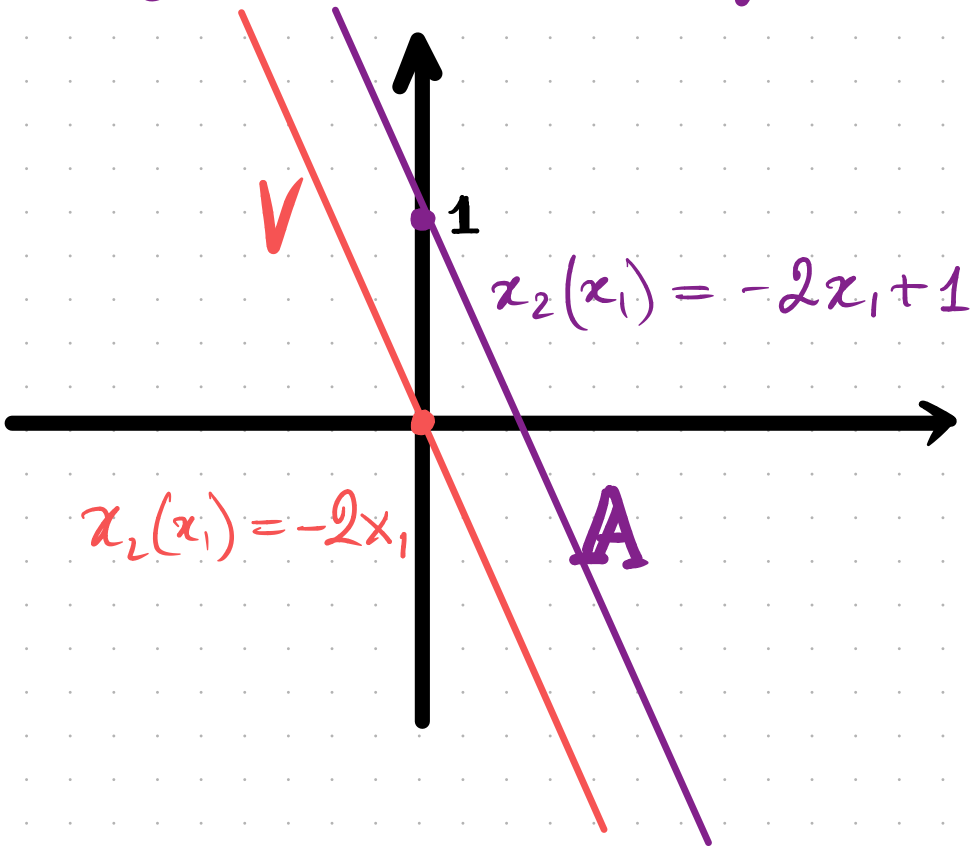
Si dice che $S$ è il sottospazio affine di $\mathbb{A}$ **PASSANTE PER $Q$ e PARALLELO a $W$.**

**Def:** $\dim(\mathbb{A}) := \dim(V)$ come abbiamo già detto.

- $\dim(\mathbb{A}) = 1 \Rightarrow \mathbb{A}$ è una **RETTA AFFINE**
- $\dim(\mathbb{A}) = 2 \Rightarrow \mathbb{A}$ è un **PIANO AFFINE**
- $\dim(\mathbb{A}) = 3 \Rightarrow \mathbb{A}$ è uno **SPAZIO AFFINE**
- $\dim(S) = \dim(\mathbb{A}) - 1 \Rightarrow S$ è un **IPERPIANO AFFINE**

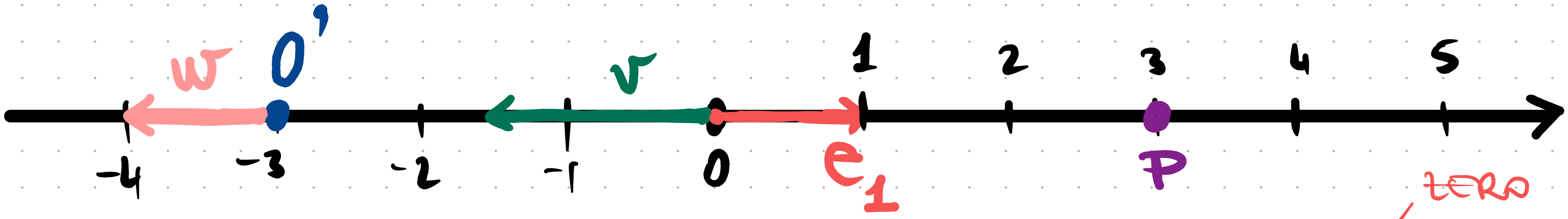
**Esempio:** $\mathbb{A} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1 + x_2 = 1 \right\} \Rightarrow V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1 + x_2 = 0 \right\}$

SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO




**Esempio/Def:** Uno spazio affine su $V = K^n$ si indica con $\mathbb{A}^n(K)$. Il RIFERIMENTO CANONICO su $\mathbb{A}^n(K)$ è dato da $(0, B = \{e_1, \dots, e_n\})$ = (ORIGINE, BASE CANONICA)

**Esempio:** $\dim(A) = 1$. Scegliamo $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^1 \rightsquigarrow \mathbb{A} = \mathbb{A}^1(\mathbb{R})$




ZERO

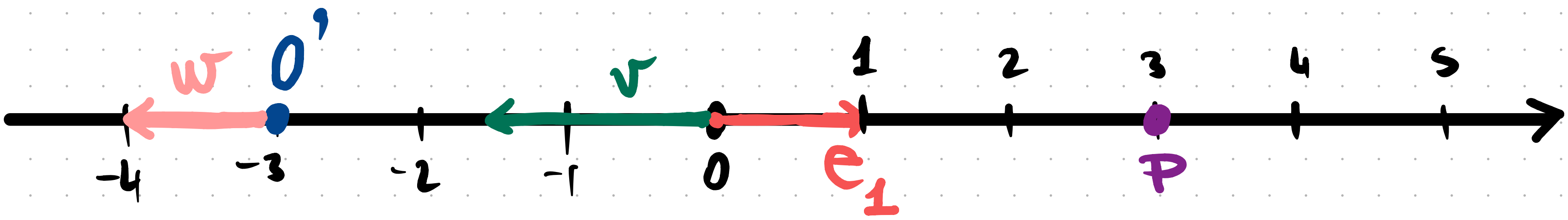
1. Se scegliamo $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ con RIFERIMENTO AFFINE $(0, \{e_1\})$ allora abbiamo scelto $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ **col suo RIFERIMENTO CANONICO**, e nel riferimento canonico il punto $P$ si esprime come $P = 3 \cdot e_1$ e quindi le coordinate di $P$ nel riferimento canonico sono date da $(3)$

VETTORE 1x1

SEMPRE ZERO

2. Se scegliamo $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ con RIFERIMENTO AFFINE $(0, \{v\})$ allora abbiamo scelto $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ **con l'ORIGINE MA RIFERIM. NON CANONICO.** Nel riferimento scelto il punto $P$ si esprime come $P = -2 \cdot v$ e quindi le coordinate di $P$ nel riferimento scelto sono date da $(-2)$

VETTORE 1x1




3. Se scegliamo $A^1(\mathbb{R})$ con RIFERIMENTO AFFINE $(O', \{w\})$ allora abbiamo scelto $A^1(\mathbb{R})$ **CON ORIGINE $O'$** [DIVERSA da QUELLA dello spazio vettor. $V$] **E BASE $\{w\}$ PER $V$ (NON CANONICA).**
Nel RIFERIMENTO SCELTO: $P = (-6) \cdot w$ e quindi le coordinate di $P$ nel riferimento scelto sono date da $(-6)$.

VETTORE $1 \times 1$

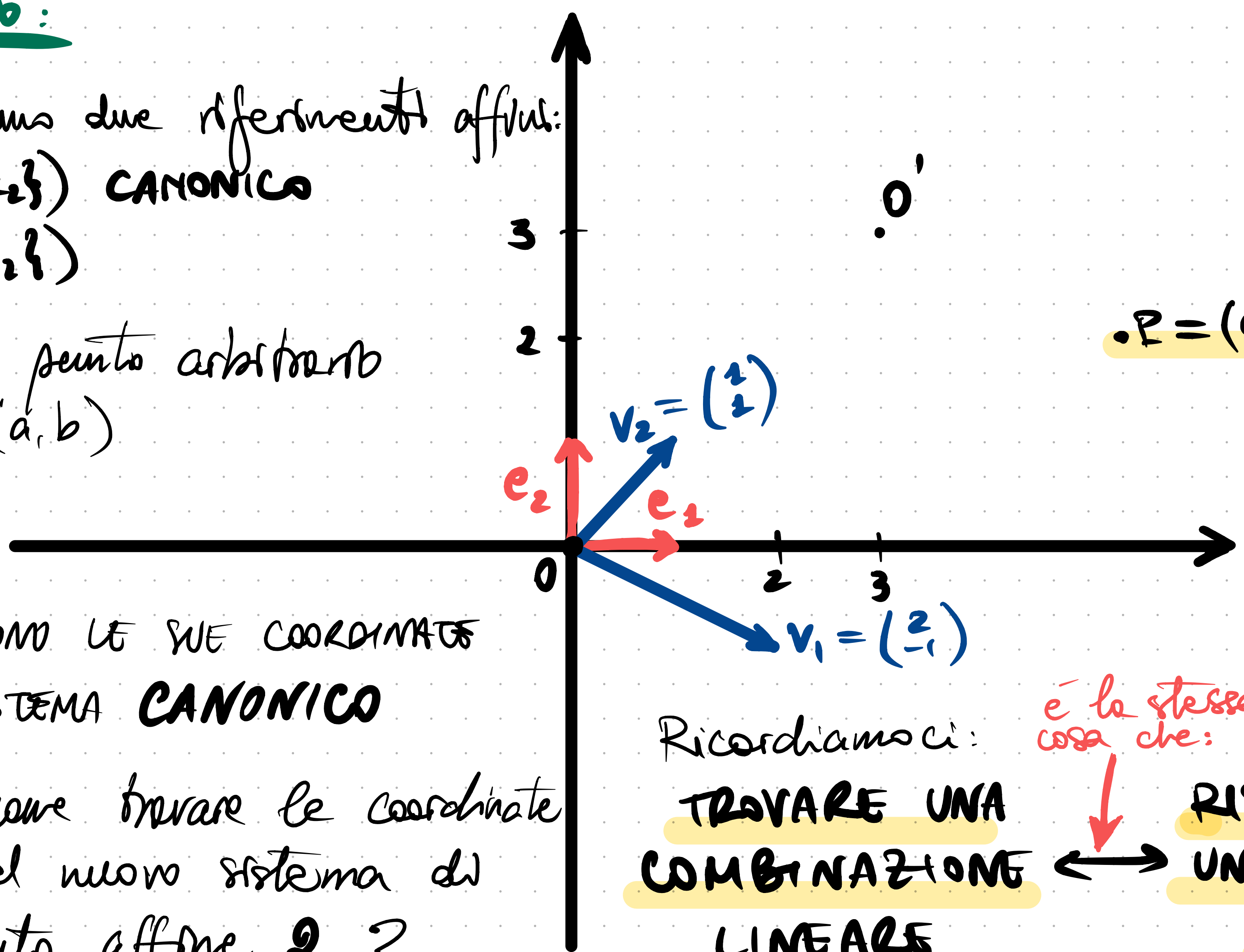
**Oss:** Dato uno spazio affine, possiamo metterci sopra più struttura scegliendo un sistema di riferimento affine e questo lo possiamo fare in infiniti modi. Sarà utile poter passare **da un riferimento all'altro.**

## Esempio:

Consideriamo due riferimenti affini:

1. $(O, \{e_1, e_2\})$ CANONICO
2. $(O', \{v_1, v_2\})$

Scelgo un punto arbitrario $P = (a, b)$




$(a, b)$ SONO LE SUE COORDINATE NEL SISTEMA **CANONICO**

D: Ma come trovare le coordinate di $P$ nel nuovo sistema di riferimento affine 2. ?

Ricordiamoci:

TROVARE UNA COMBINAZIONE LINEARE $\longleftrightarrow$ RISOLVERE UN SISTEMA LINEARE!

è la stessa cosa che:

**STEP I:** Troviamo il vettore che va dall' **ORIGINE del RIFERIMENTO O'** al punto in esame $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{O'P} := P - O' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3 \\ b-3 \end{pmatrix}$$

**STEP II:** Impostiamo il sistema lineare per trovare:

$\overrightarrow{O'P}$ = **combinaz. lineare di $e_1$ e $e_2$**

Questo sistema è trovare coefficienti $\lambda_1$ e $\lambda_2$ tali che:

$$\overrightarrow{O'P} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

Sostituendo i vettori troviamo:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3 \\ b-3 \end{pmatrix}$$

che sappiamo corrispondere usando il prodotto riga per colonna alla forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3 \\ b-3 \end{pmatrix}$$

**STEP III:** Risolviamo il sistema lineare:

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) := \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a-3 \\ 1 & -1 & b-3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 - R_1} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a-3 \\ 0 & -3 & b-a \end{array}\right)}_{\text{FORMA SCALA}}$$

tramite sostituzione all'indietro:

$$\lambda_2 = \frac{a-b}{3} \Rightarrow 1 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \underbrace{\lambda_2}_{= \frac{a-b}{3}} = a-3 \quad \text{SOSTITUENDO}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = a-3 - 2\left(\frac{a-b}{3}\right) = \frac{a+2b-9}{3}$$

e poi verifico che la soluzione è corretta: ✓

**STEP IV:** Interpretiamo il risultato:

Il punto $P := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ nel sistema di riferimento affine $(O', \{v_1, v_2\})$ ha coordinate affini:

$$\begin{pmatrix} \frac{a+2b-9}{3} \\ \frac{a-b}{3} \end{pmatrix}$$

CHIARAMENTE dal SISTEMA LIN. CI ASPETTIAMO UNA UNICA SOLUZIONE perché $\{e_1, e_2\}$ e $\{v_1, v_2\}$ sono BASI e quindi LINEARMENTE INDIPENDENTI.