FISICA DELL'AMBIENTE

Testi:

Elementi di fisica: Elettromagnetismo & Onde
Mazzoldi, Nigro, Voci (3ª edizione)

Fondamenti di fisica: Halliday Resnick
(elettromagnetismo & onde)

Fenomeni Ondulatori:

- Onde elastiche o di pressione: Hanno bisogno di un mezzo materiale per propagarsi, e la loro propagazione e' dovuta all'interazione tra gli atomi o le molecole del mezzo (e.g. onda sonora, o onda su una corda tesa)

Possono essere trasversali o longitudinali

oscillano lungo l'asse di propagazione

⇓

Ma non c'e' trasporto di materia (atomi o mol. oscillano attorno a posizione di eq.io)

⇒ Vengono trasportate energia e quantita' di moto

In generale: Onda una qualsiasi perturbazione, impulsiva o periodica, che si propaga ad una velocita' ben definita.

- Onde elettromagnetiche: Non hanno bisogno di un mezzo per propagarsi (e.g. luce del sole) ma posso propagarsi anche nei materiali. Esse hanno origine da una perturbazione del campo elettrico e/o magnetico, prodotto da cariche in moto.

Sono solo trasversali (ovvero oscilla in un piano ⊥ a quello di propagazione)

Formalmente è un'eq.ne differenziale alle derivate parziali del II ordine, a coefficienti costanti, lineare in ξ
omogenea (termine noto $= \emptyset$)

* Equazione delle onde di d'Alembert: $\nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ Operatore Laplaciano

Se applicato ad un campo scalare

$$\nabla^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$$ → ottengo scalare

Se applicato ad un campo vettoriale:

$$\nabla^2 \vec{F} = \left(\nabla^2 F_x ; \nabla^2 F_y ; \nabla^2 F_z\right)$$ dove $\nabla^2 F_i = \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial z^2}$

↳ ottengo vettore

$v \equiv$ Velocità propagazione dell'onda

La perturbazione di un campo che si propaga nello spazio viene rappresentata con la funzione:

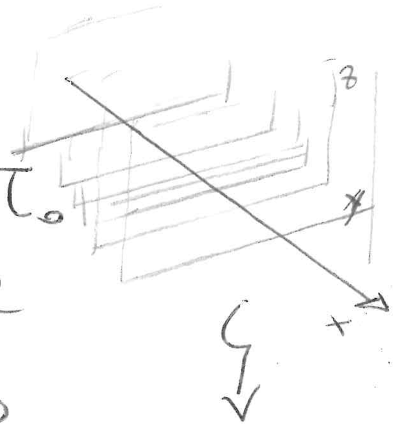
questo e' un campo generico tipo $\vec{E}, \vec{B}$

$$\xi(x, y, z, t)$$: Funzione d'onda

e soddisfa $\nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$ *

* Onda Piana Unidimensionale: $\xi(x, t)$

dipende solo dalla coordinata lungo cui si propaga, x, in quanto la perturbazione in un certo istante t_0 assume lo stesso valore $\forall$ p.to del piano ortogonale (yz). In questo caso:



Nota: Un'onda molto lontana dalla sua sorgente può essere spesso approx. con un onda piana

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$\Rightarrow$ Si dimostra che le funzioni d'onda soluzioni dell'eq.ne di d'Alembert sono quelle le cui variabili soddisfano:

$$\xi(x - vt), \quad \xi(x + vt)$$

- Segno +, propagazione verso x negative (sx)
- Segno −, propagazione verso x positive (dx)

ovvero l'argomento di ξ e' una combinazione lineare delle variabili x e t.

Sono quindi soluzioni e.g.:

$$* \quad \xi = (x - vt)^2, \quad \xi = \xi_0 \sin k(x - vt), \quad \xi = \xi_0 e^{k(x-vt)}$$

e loro combinazioni lineari, mentre NON lo sono e.g. $\xi = x \cdot v \cdot t$ o $\xi = x/vt$.

Questa é conseguenza del fatto che l'eq.ne di d'Al. é lineare in ξ.

Fisicamente $\xi(x \pm vt)$ rappresenta la propagazione della perturbazione lungo l'asse x con velocità v; il valore $\xi_0 = \xi(x_0, t_0)$ si ritrova in qualsiasi istante successivo $t > t_0$ nel p.to x che soddisfi la condizione:

$$**) \quad x \pm vt = x_0 \pm v_0 t_0 \Rightarrow \underbrace{x = x_0 \pm v(t - t_0)}_{\text{eq.ne moto rettilineo lungo } x}$$

Ovvero quando la funzione d'onda ha lo stesso argomento

Segno "+" propagazione nel verso di x, ovvero l'argomento é $x - vt$

Segno "−" propagazione verso negativo di x, ovvero l'argomento é $x + vt$

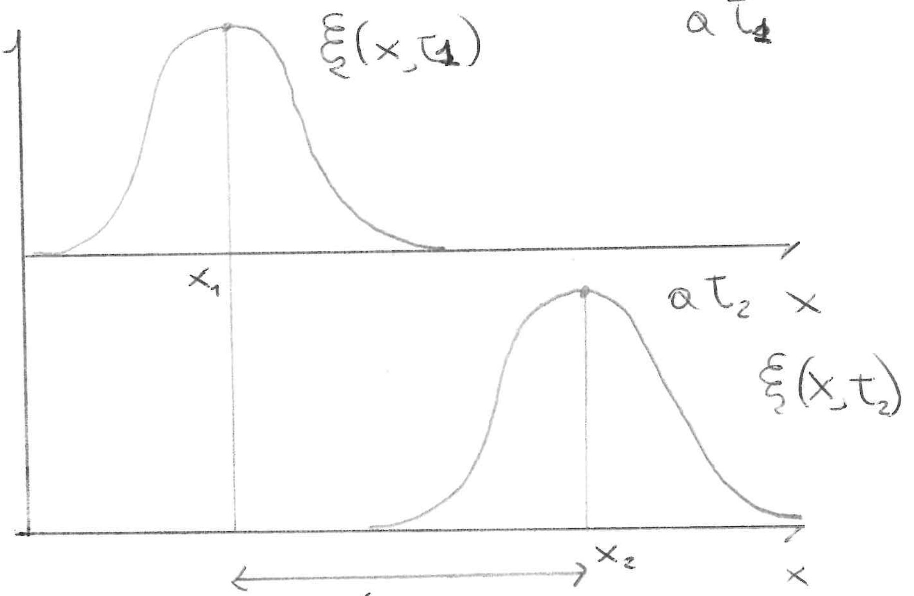
*) e.g. dimostriamolo per $\xi(x,t) = (x-vt)^2$

$\partial_x \xi = 2(x-vt)$ $\quad$ $\partial_t \xi = -2v(x-vt)$

$\partial_x^2 \xi = 2$ $\quad$ $\partial_t^2 \xi = +2v^2$ $\quad \Rightarrow \partial_x^2 \xi = \frac{\partial_t^2 \xi}{v^2} \Rightarrow 2 = \frac{2\cancel{v^2}}{\cancel{v^2}} \Rightarrow 2 = 2$

vero

**)



$\Delta x = v(t - t_0)$

Valido $\forall$ p.to

$\therefore$ $\xi(x \pm vt)$ soddisfa d'Alembert.

definiamo $u = x - vt$

per cui $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ & $\frac{\partial u}{\partial t} = -v$

derivata funzione composta

$$\frac{\partial \xi(u)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial u}\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}^{=1} = \frac{\partial \xi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f(g(x))}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \xi(u)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2_{=1} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \qquad *$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \xi}{\partial u}\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial u^2}}$$

0 poiché $u = x - vt$

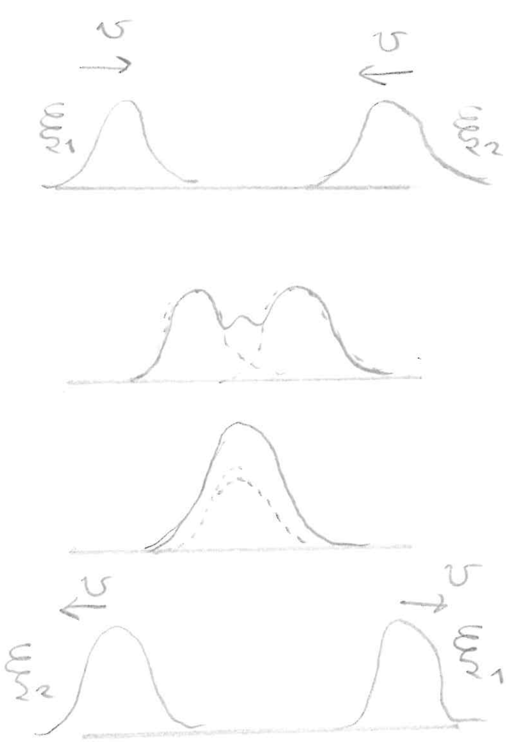
$$\frac{\partial \xi(u)}{\partial t} = \frac{\partial \xi(v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial \xi}{\partial u}$$

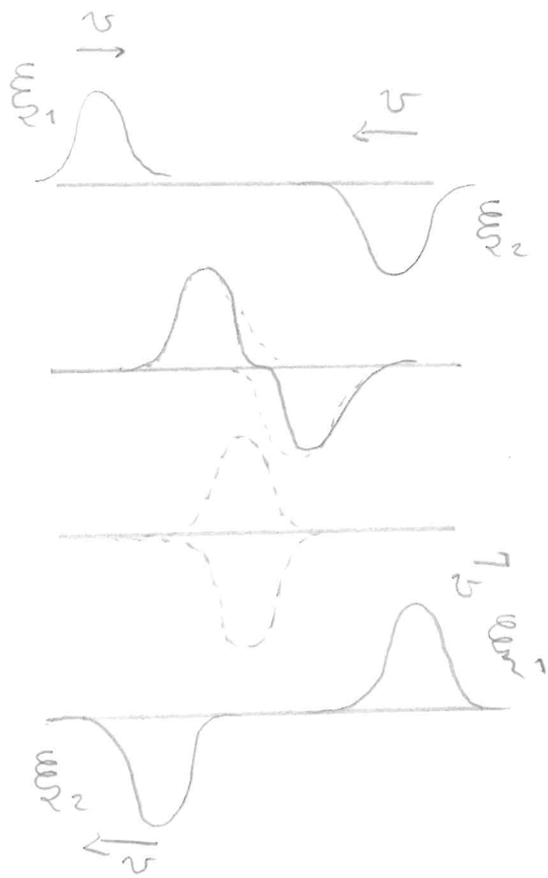
$$\frac{\partial^2 \xi(u)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi(u)}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = v^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \qquad **$$

da $*$ & $**$ si ricava che

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad \text{c.v.d.}$$

Nota: La linearità (in ξ) dell'eq.ne di d'Alembert implica che la somma di due funzioni ξ_1 & ξ_2 soluzioni dell'eq.ne, è ancora soluzione dell'eq.ne: ovvero la sovrapposizione di 2 onde è ancora un onda, che si ottiene p.to x p.to ed istante x istante sommando ξ_1 e ξ_2. Questo implica che le 2 onde restano indipendenti, anche se agiscono insieme, e non vengono modificate l'una dalla presenza dell'altra. Questo principio di sovrapposizione è all'origine del fenomeno dell'interferenza.





Onde piane Armoniche: (1D)

$$\xi(x,t) = \xi_0 \operatorname{sen}[k(x - vt)]$$

↳ Analogamente potevo usare il coseno

ξ_0 = Ampiezza Onda

k = numero d'onde

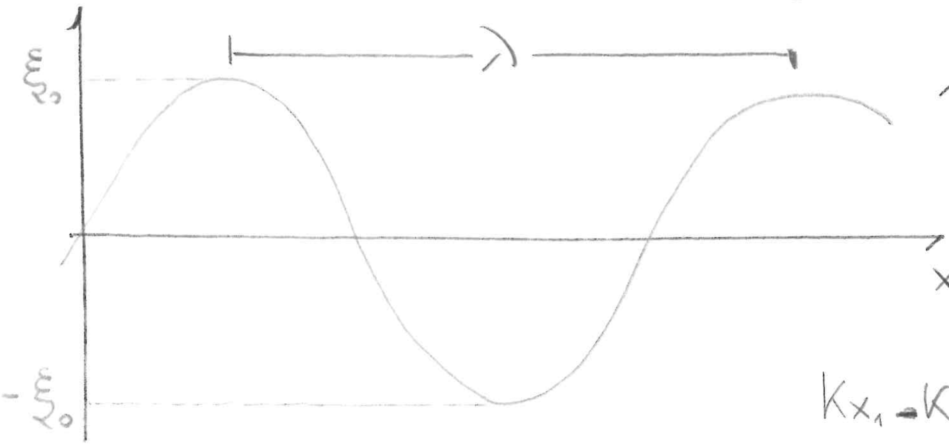
In genere si definisce la pulsazione:

$$\omega = kv$$

$$\xi(x,t) = \xi_0 \operatorname{sen}(\underbrace{kx - \omega t}_{})$$

Così definita è una quantità adimensionale come giusto per l'argomento di un seno

Ad un dato t: (come se facessi una foto)



Seno è una funzione con periodo 2π, quindi dati 2 p.ti x_1 e x_2 per cui vale la relazione

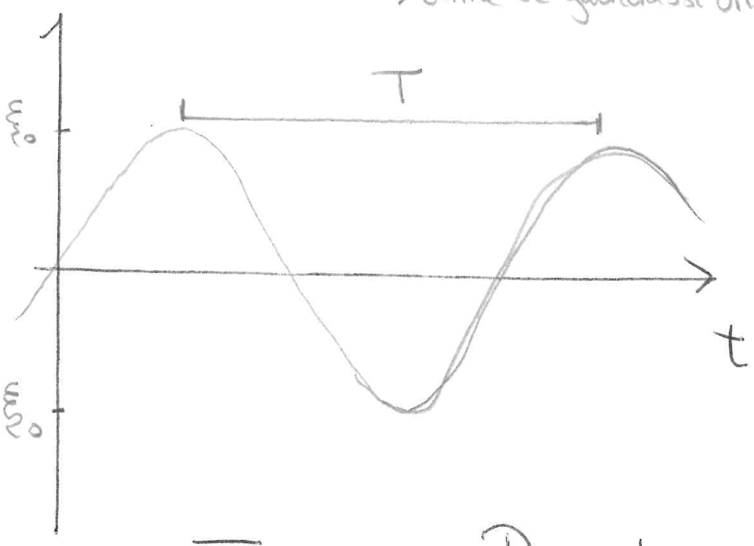
$$kx_1 - kx_2 = k\underbrace{(x_1 - x_2)}_{\lambda} = 2\pi$$

, la funzione si replica identica

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$ lunghezza d'onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow$$ # di lunghezze d'onda in 2π metri. Una sorta di pulsazione "spaziale"

per un x fissato analogamente:
↳ Come se guardassi un solo punto



⇒ l'onda si ripete identica per intervalli di tempo che soddisfano: $\omega t_1 - \omega t_2 = \omega\underbrace{(t_1 - t_2)}_{T} = 2\pi$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ Periodo dell'onda → quindi $\omega = \frac{2\pi}{T}$, # di periodi in 2π secondi

Altre due grandezze derivate sono

- $n = \frac{1}{\lambda}$ $[m^{-1}]$ # di lunghezze d'onda in un metro
- $\nu = \frac{1}{T}$ $[s^{-1}]$ frequenza, ovvero il numero di battiti in un secondo

Dalle relazioni precedenti troviamo le relazioni:

$$\underbrace{k\lambda}_{2\pi} = \underbrace{T\omega}_{2\pi} \Rightarrow k\lambda = T\underbrace{kv}_{\omega} \Rightarrow \lambda = vT \rightarrow$$

Questa relazione ci dice che in un periodo T, l'onda avanza di λ

&

$$\nu\lambda = v$$

Ovvero le tre grandezze che descrivono un'onda armonica NON sono indipendenti

Nota: Da un punto di vista fisico il periodo (e quindi ν e ω) di un'onda em è determinato solamente dalle caratteristiche della sorgente, mentre la velocità di propagazione, e quindi λ e K, dal mezzo di propagazione.

→ Fronte d'onda:

Definita la fase dell'onda:

$$\phi = Kx - \omega t \qquad \text{Fase Onda}$$

possiamo definire il fronte d'onda il luogo di p.ti dello spazio in cui, ad un dato istante, la fase è costante, ovvero la funzione d'onda ξ ha valore costante. E.g. per un'onda piana, il fronte d'onda corrisponde al piano ⊥ alla direzione di propagazione, e quest'ultimo si sposta alla velocità v.

→ Polarizzazione di un'onda:

Consideriamo un'onda piana trasversale che si propaga lungo x. La funzione d'onda può essere espressa come:

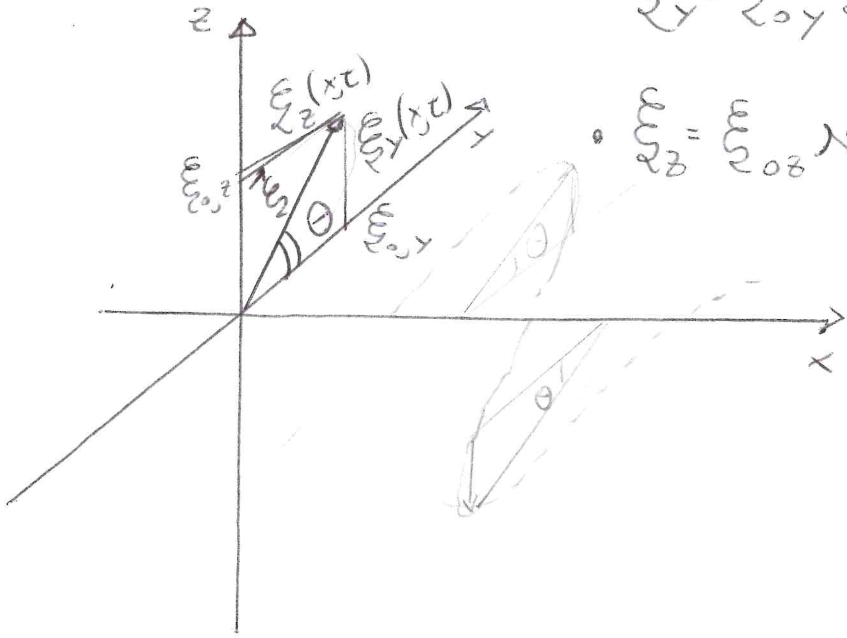
ovvero oscilla in un piano ⊥ a quello di propagazione

$$\vec{\xi}(x,t) = \left(\xi_y(x,t), \xi_z(x,t)\right)$$

Assumiamo siano 2 onde armoniche

- $\xi_y = \xi_{0y} \sin(kx - \omega t)$
- $\xi_z = \xi_{0z} \sin(kx - \omega t + \delta)$

sfasamento tra le componenti.



→ Se la direzione di $\vec{\xi}$ nel piano yz non varia casualmente l'onda si dice polarizzata → questo dipende dallo sfasamento.

Consideriamo il caso δ = costante

→ $\delta = 0$: Componenti in fase; in ogni punto dell'asse x, ed ad ogni istante $\vec{\xi}$ ha direzione fissa, formante con l'asse y l'angolo

$$\operatorname{Tg}\theta = \frac{\xi_z}{\xi_y} = \frac{\xi_{0,z}}{\xi_{0,y}} = \text{costante}$$

→ il rapporto tra le ampiezze delle due componenti rimane costante

• $\delta = \pi$: Opposizione di fase: $\vec{\xi}$ ha sempre direzione costante, ma l'angolo con x è $-\theta$ $\rightarrow \sin(x+\pi) = -\sin(x)$

$\Rightarrow$ Se $\vec{\xi}$ ha direzione fissa l'onda si dice Pol.ta Linearmente

- Detta ξ_0 l'ampiezza dell'onda, le componenti hanno ampiezza $\xi_{0,z} = \pm\, \xi_0 \sin\theta$ e $\xi_{0,y} = \xi_0 \cos\theta$:

"+" per $\delta = 0$
e "−" per $\delta = \pi$

In forma vettoriale avremo:

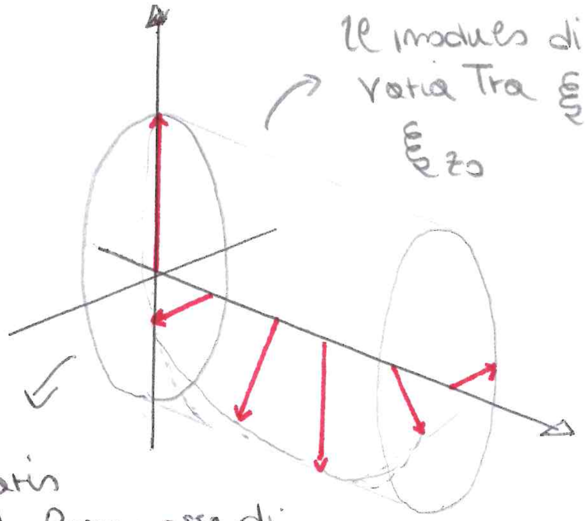
$$* \quad \vec{\xi}(x,y) = \overbrace{\xi_0 \cos\theta}^{\xi_{0,y}} \sin(kx-\omega t)\,\hat{u}_y + \underbrace{\pm\, \xi_0 \sin\theta}_{\xi_{0,z}} \sin(kx-\omega t)\,\hat{u}_z$$

Onda piana data dalla sovrapposizione di 2 onde piane polarizzate linearmente lungo y e z

• $\delta = \frac{\pi}{2}$: In questo caso, dato che $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ abbiamo $\xi_z = \xi_{0,z}\cos(kx-\omega t)$, ed in ogni istante vale la relazione:
in un p.to dell'asse x

$$** \quad \frac{\xi_y^2}{\xi_{0,y}^2} + \frac{\xi_z^2}{\xi_{0,z}^2} = 1 \quad \Rightarrow$$

Equazione di un'ellisse nel piano yz, ed assi // agli assi coordinati



le vettore $\vec{\xi}$ descrive un ellisse con periodo di rotazione $\frac{2\pi}{\omega}$, ~~che~~ ~~già~~ e passo λ. ↳ ovvero dopo T o λ compie un giro

⇓

Onda polarizza ellitticamente

Analogamente per $\delta = \frac{3}{2}\pi$ si ha una polarizzazione ellittica, ma che ruota in senso ANTIORARIO guardando la direzione di propagazione.

Nel caso $\xi_{0,y} = \xi_{0,z} = \xi_0$ l'ellisse degenera in una circonferenza e l'onda si dice polarizzata circolarmente:

$$\xi_y^2 + \xi_z^2 = \xi_0^2$$

→ In questo caso l'ampiezza dell'onda è costante in modulo.

In generale se δ = "costante generico", l'onda è polarizzata ellitticamente, ma con gli assi non // agli assi coordinati.

→ Se δ non è esprimibile con una legge l'onda si dice NON polarizzata

↓ ovvero varia casualmente