Appunti del corso di Istituzioni di Matematica

Prof.ssa Rodica Toader

Università degli Studi di Trieste, CdL STAN, a.a. 2024/2025

Nota. Le sezioni 1 e 2, così come le parti scritte in blu, non saranno richieste all'esame. Ho voluto comunque inserirle perché potrebbero essere utili per la comprensione del testo seguente e come approfondimento della materia.

1 Un po' di logica

Nel linguaggio matematico abbiamo a che fare con proposizioni, che indichiamo con $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, ecc. Inoltre, siamo soliti combinare queste proposizioni in vari modi:

$$\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}, \qquad \mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}, \qquad \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}, \qquad \mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}.$$

Cercheremo ora di spiegarne meglio il significato. Iniziamo con

$$\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}.$$

Essa è vera se sono vere entrambe, sia $\mathcal{P}$ che $\mathcal{Q}$; altrimenti è falsa. Possiamo costruire una tabellina che contempli tutti i quattro casi possibili: [1]

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Vediamo ora

$$\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}.$$

[1] In queste tabelle, V indica che una proposizione è vera, mentre F indica che è falsa.

Essa è vera se almeno una delle due è vera; è falsa solo quando sono entrambe false, sia $\mathcal{P}$ che $\mathcal{Q}$. Ecco quindi la corrispondente tabellina:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Analizziamo ora

$$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}\,.$$

Essa è falsa solo se $\mathcal{P}$ è vera e $\mathcal{Q}$ è falsa; in tutti gli altri casi è vera. Ecco la sua tabellina:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Concludiamo con

$$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}\,.$$

Essa è vera se le due sono entrambe vere, oppure entrambe false. Altrimenti, è falsa. Vediamone la tabellina:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

È molto importante saper negare logicamente una proposizione. La negazione di $\mathcal{P}$ verrà indicata con $\neg\,\mathcal{P}$ (si legge "non $\mathcal{P}$"): essa è vera quando $\mathcal{P}$ è falsa, e viceversa. Ad esempio, valgono le seguenti *Regole di de Morgan*:

$$\neg\,(\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}) \quad \text{è equivalente a} \quad \neg\,\mathcal{P} \text{ o } \neg\,\mathcal{Q}\,.$$

$$\neg\,(\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}) \quad \text{è equivalente a} \quad \neg\,\mathcal{P} \text{ e } \neg\,\mathcal{Q}\,.$$

Si può inoltre verificare che

$$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q} \quad \text{è equivalente a} \quad \neg\,\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}\,.$$

Ne segue che

$$\neg(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \quad \text{è equivalente a} \quad \mathcal{P} \text{ e } \neg\,\mathcal{Q}\,.$$

Talvolta le proposizioni coinvolgono una o più variabili. Ad esempio, potremmo averne del tipo $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$, in cui compare la variabile x. In questi casi, troveremo spesso i seguenti due tipi di proposizioni. La prima, [2]

$$\forall x \in A: \ \mathcal{P}(x)\,,$$

significa

"per ogni elemento x dell'insieme A si ha che $\mathcal{P}(x)$ è vera".

La seconda,

$$\exists x \in A: \ \mathcal{P}(x)\,,$$

significa

"esiste almeno un elemento x dell'insieme A per cui si ha che $\mathcal{P}(x)$ è vera".

Vediamo come si esprimono le loro negazioni. Si ha che

$$\neg(\forall x \in A: \ \mathcal{P}(x)) \quad \text{è equivalente a} \quad \exists x \in A: \ \neg\,\mathcal{P}(x)\,,$$

mentre

$$\neg(\exists x \in A: \ \mathcal{P}(x)) \quad \text{è equivalente a} \quad \forall x \in A: \ \neg\,\mathcal{P}(x)\,.$$

2 Il linguaggio della teoria degli insiemi

2.1 I primi simboli

Ci risultano più o meno familiari alcuni insiemi numerici, quali ad esempio

$\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri naturali;
$\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri interi relativi;
$\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri razionali;
$\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri reali.

La loro natura verrà ulteriormente approfondita durante le lezioni. D'altra parte, nel corso dei nostri studi, abbiamo incontrato diversi tipi di insiemi, e molti altri ne incontreremo in seguito. Per poterli trattare in maniera corretta, abbiamo bisogno di sviluppare un linguaggio, e per questo introdurremo ora alcuni simboli, e ne spiegheremo il significato.

[2] Il simbolo $\in$ verrà introdotto nella prossima sezione.

Introduciamo il simbolo di "appartenenza". La scrittura

$$a \in A$$

significa "a appartiene all'insieme A", ossia "a è un elemento di A". La sua negazione si scrive $a \notin A$ e si legge "a non appartiene ad A", ovvero "a non è un elemento di A".

Ad esempio, sia $A = \{1, 2, 3\}$, l'insieme [3] i cui elementi sono i tre numeri naturali 1, 2 e 3. Abbiamo che

$$1 \in A\,, \qquad 2 \in A\,, \qquad 3 \in A\,,$$

mentre

$$4 \notin A\,, \qquad \tfrac{1}{2} \notin A\,, \qquad \pi \notin A\,.$$

Presentiamo ora il simbolo di "inclusione". Scriveremo

$$A \subseteq B$$

e leggeremo "A è contenuto in B" qualora ogni elemento di A sia anche un elemento di B. In simboli,

$$x \in A \quad \Longrightarrow \quad x \in B\,.$$

Ad esempio, se come sopra $A = \{1, 2, 3\}$, si ha che $A \subseteq \mathbb{N}$, ma anche $A \subseteq \mathbb{R}$.

Se $A \subseteq B$, si dice che A è un "sottoinsieme" di B, e si può scrivere anche $B \supseteq A$. La negazione di $A \subseteq B$ si scrive $A \not\subseteq B$, oppure $B \not\supseteq A$, e si legge "A non è contenuto in B", oppure "B non contiene A".

Diremo che due insiemi A e B sono "uguali" se coincidono, ossia se hanno gli stessi elementi, e in tal caso scriveremo

$$A = B\,.$$

Si ha pertanto

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq B \;\text{ e }\; B \subseteq A\,.$$

La negazione di $A = B$ si scrive $A \neq B$; in tal caso si dice che A e B sono diversi, ovvero non coincidono. Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, si dice che A è un "sottoinsieme proprio" di B.

Notiamo che sono soddisfatte le proprietà di una "relazione d'ordine":

[3] In questo esempio, l'insieme A viene definito elencandone gli elementi, che sono in numero finito.

- $A \subseteq A$;
- $A \subseteq B$ e $B \subseteq A \implies A = B$;
- $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \implies A \subseteq C$.

Concludiamo questa sezione introducendo un insieme molto particolare: si tratta dell'"insieme vuoto", un insieme che non possiede alcun elemento. Esso viene indicato con il simbolo

$$\emptyset\,.$$

Si conviene che $\emptyset$ sia sottoinsieme di qualsiasi insieme:

$$\emptyset \subseteq A\,, \quad \text{per qualsiasi } A\,.$$

2.2 Alcuni esempi di insiemi

Iniziamo con gli insiemi più semplici, quelli che hanno un unico elemento. Ad esempio,

$$A = \{3\}\,, \qquad A = \{\mathbb{N}\}\,, \qquad A = \{\emptyset\}\,.$$

Il primo è l'insieme che ha come unico elemento il numero naturale 3. Il secondo ha come unico elemento $\mathbb{N}$, il terzo ha solo l'elemento $\emptyset$. Osserviamo quindi che gli elementi di un insieme possono essere a loro volta degli insiemi. Potremmo avere insiemi del tipo

$$A = \{\mathbb{N}, \mathbb{Q}\}\,, \qquad A = \{\emptyset, \mathbb{Z}, \mathbb{R}\}\,, \qquad A = \{\{\pi\}, \{1,2,3\}, \mathbb{N}\}\,,$$

oppure anche del tipo

$$A = \{3, \{3\}, \mathbb{N}, \{\mathbb{N}, \mathbb{Q}\}\}\,.$$

In questo caso bisogna fare attenzione con i simboli: si ha che $3 \in A$, per cui $\{3\} \subseteq A$, ma anche $\{3\} \in A$, essendo $\{3\}$ un elemento di A.

Vediamo infine l'insieme

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\,.$$

Abbiamo che $\emptyset \in A$, essendo $\emptyset$ uno degli elementi di A, e pertanto $\{\emptyset\} \subseteq A$. Ma abbiamo anche $\{\emptyset\} \in A$, essendo $\{\emptyset\}$ un elemento di A, e quindi $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$. Ricordiamo inoltre che si ha pure $\emptyset \subseteq A$.

2.3 Operazioni con gli insiemi

Normalmente si preferisce scegliere un "insieme universo" in cui lavorare. Lo denoteremo con E. Tutti gli oggetti di cui parleremo in seguito faranno parte di tale insieme.

Si definisce "l'intersezione" di due insiemi A e B: è l'insieme [4]

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\},$$

i cui elementi appartengono ad entrambi gli insiemi. Si noti che l'intersezione potrebbe anche essere l'insieme vuoto: in tal caso, si dice che A e B sono "disgiunti".

Invece, "l'unione" di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\},$$

i cui elementi appartengono ad almeno uno dei due insiemi, possibilmente anche ad entrambi.

La "differenza" di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\},$$

i cui elementi appartengono al primo insieme ma non al secondo.

In particolare, l'insieme $E \setminus A$ si chiama "complementare" di A e si denota con $\mathcal{C}A$. Pertanto, si ha

$$\mathcal{C}A = \{x : x \notin A\}.$$

Sono interessanti le seguenti *Regole di De Morgan*:

$$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B, \qquad \mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B.$$

Il "prodotto" di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\},$$

i cui elementi sono le "coppie ordinate" (a, b), in cui al primo posto abbiamo un elemento di A e al secondo posto uno di B.

3 L'insieme dei numeri reali

Durante i nostri studi scolastici abbiamo incontrato l'insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

l'insieme dei numeri interi relativi

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

[4] Qui gli insiemi sono definiti specificando le proprietà che devono soddisfare i loro elementi.

e l'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\} .$$

Questo insieme possiede già tutte le proprietà algebriche di cui si ha bisogno nel calcolo numerico. Infatti, vi sono definite le operazioni di addizione $+$ e moltiplicazione $\cdot$ per le quali valgono le regole associativa, commutativa, distributiva, ecc. che ben conosciamo. Inoltre, $\mathbb{Q}$ è un insieme ordinato, ossia vi è definita una relazione d'ordine $\leq$ e valgono le seguenti proprietà:

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z \,,$$

$$[x \leq y \ \text{ e } \ z \geq 0] \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \leq y \cdot z \,.$$

Purtroppo però l'insieme $\mathbb{Q}$ risulta insoddisfacente per risolvere alcuni semplici problemi di geometria, quali ad esempio "Calcolare la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato uguale a 1". Infatti, se indichiamo con x la lunghezza cercata, il Teorema di Pitagora ci dice che dovrebbe essere $x^2 = 1^2 + 1^2$, ossia $x^2 = 2$. Ma lo stesso Pitagora si è reso conto che non esiste alcun $x \in \mathbb{Q}$ che soddisfa a questa uguaglianza.

Per nostra fortuna esiste un insieme numerico che estende l'insieme $\mathbb{Q}$ che permette di risolvere le difficoltà sopra menzionate: è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Oltre ad avere tutte le belle proprietà algebriche di $\mathbb{Q}$, è ben definita la "radice quadrata" di ogni numero $r > 0$. Infatti, l'equazione

$$x^2 = r$$

ha due soluzioni in $\mathbb{R}$: $x = \sqrt{r}$ e $x = -\sqrt{r}$, la prima positiva e la seconda negativa. Si pone inoltre $\sqrt{0} = 0$.

È interessante osservare che ogni numero reale si può approssimare con numeri razionali. Ad esempio, il numero $\sqrt{2}$, che per quanto detto sopra non è un numero razionale, si può approssimare in questo modo:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2} = 1,4\ldots \\
&\sqrt{2} = 1,41\ldots \\
&\sqrt{2} = 1,414\ldots \\
&\sqrt{2} = 1,4142\ldots \\
&\sqrt{2} = 1,41421\ldots \\
&\sqrt{2} = 1,414213\ldots \\
&\sqrt{2} = 1,4142135\ldots \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Si noti che i numeri che compaiono a destra sono tutti razionali:

$$\frac{14}{10}\,,\ \frac{141}{100}\,,\ \frac{1414}{1000}\,,\ \frac{14142}{10000}\,,\ \frac{141421}{100000}\,,\ \frac{1414213}{1000000}\,,\ \frac{14142135}{10000000}\,,\ \dots$$

Così come per la radice quadrata, è possibile definire la "radice n-esima" di un numero $r > 0$: è la soluzione positiva dell'equazione

$$x^n = r\,,$$

e si denota con $\sqrt[n]{r}$.

4 Il concetto di funzione

Una "funzione" (talvolta "applicazione") è definita assegnando tre insiemi:

- un insieme A, detto "dominio" della funzione;
- un insieme B, detto "codominio" della funzione;
- un insieme $G \subseteq A \times B$, detto "grafico" della funzione, con la seguente proprietà: per ogni $a \in A$ esiste un unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in G$.

La funzione così definita può essere indicata con $f : A \to B$ (si legge "f va da A a B"). Ad ogni elemento a del dominio viene pertanto associato un ben determinato elemento b del codominio: tale b verrà indicato con $f(a)$, e scriveremo $a \mapsto f(a)$. Abbiamo quindi

$$(a, b) \in G \quad \Longleftrightarrow \quad b = f(a)\,,$$

ossia

$$G = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} = \{(a, f(a)) : a \in A\}\,.$$

Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definita da $f(n) = n/(n + 1)$, [5] associa ad ogni $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ il corrispondente valore $n/(n + 1)$, ossia

$$n \mapsto \frac{n}{n+1}\,.$$

Pertanto, si avrà

$$0 \mapsto 0\,, \qquad 1 \mapsto \frac{1}{2}\,, \qquad 2 \mapsto \frac{2}{3}\,, \qquad 3 \mapsto \frac{3}{4}\,, \qquad \dots$$

Una funzione il cui dominio sia l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si chiama anche "successione", e si usa spesso una notazione differente: se $s : \mathbb{N} \to B$ è una tale successione, invece di $s(n)$ si usa scrivere s_n, e la successione stessa si denota con $(s_n)_n$.

[5] Si noti che i valori di questa funzione sono numeri razionali, per cui avremmo potuto definire con la stessa formula una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Una tale funzione è comunque formalmente diversa dalla precedente, in quanto le due non hanno lo stesso codominio.

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ associa ad ogni $x \in \mathbb{R}$ il suo quadrato. Si osservi che

$$f(-x) = f(x)\,, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$

Diremo che una tale funzione è "pari". Se invece, come avviene per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$, si ha che

$$f(-x) = -f(x)\,, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,,$$

diremo che una tale funzione è "dispari". Naturalmente, una funzione potrebbe non essere né pari né dispari.

5 La funzione esponenziale

Sia $a > 0$ un numero reale fissato. Se n è un numero intero positivo, si definiscono le potenze

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1 \\
a^1 &= 1 \\
a^2 &= a \cdot a \\
a^3 &= a \cdot a \cdot a \\
&\ \vdots \\
a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}\,.
\end{aligned}$$

Valgono le ben note proprietà delle potenze, quali ad esempio

$$\begin{aligned}
a^{m+n} &= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ volte}} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ volte}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}} \\
&= a^m a^n,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(a^m)^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ volte}})^n \\
&= \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ volte}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ volte}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ volte}}}_{n \text{ volte}} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{mn \text{ volte}} \\
&= a^{mn}.
\end{aligned}$$

Vedremo ora che è possibile definire a^x per ogni numero reale x, imponendo che siano preservate le suddette proprietà, ossia

$$a^{x+y} = a^x a^y\,, \qquad (a^x)^y = a^{xy}\,.$$

Teorema. *Per ogni $a > 0$ esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:*
(i) $f(x+y) = f(x)f(y)$,
(ii) $f(1) = a$.
Questa si chiama "funzione esponenziale" e si denota con $\exp_a$. *Spesso si scrive*

$$\exp_a(x) = a^x.$$

Il suo grafico è rappresentato in Figura 1.

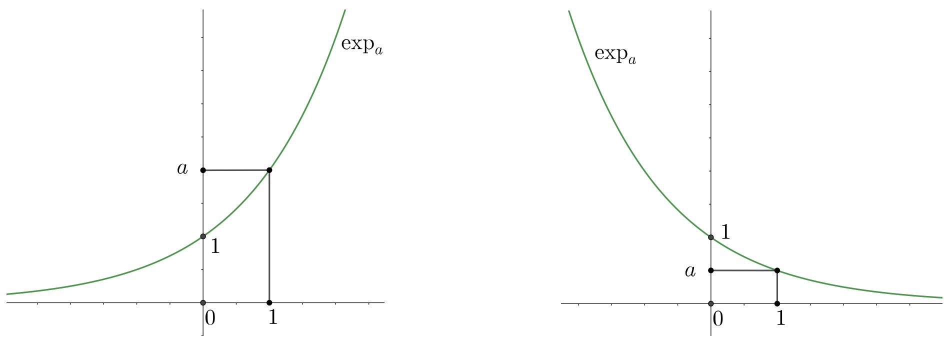


Figure 1: *La funzione* $\exp_a$ *con* $a > 1$ *e* $a < 1$*, rispettivamente.*

È interessante ricavare alcune proprietà della funzione esponenziale, che ci faranno anche capire come essa può essere definita. Iniziamo con l'osservare che, dalla

$$1 = a^0 = a^{x+(-x)} = a^x a^{-x},$$

ricaviamo che

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}\,.$$

Inoltre, dalla

$$a = a^1 = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = (a^{\frac{1}{n}})^n,$$

ricaviamo che

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\,,$$

e quindi

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m\,,$$

oppure equivalentemente

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\,.$$

Questo ci mostra come deve essere definita a^x per ogni numero razionale $x = \frac{m}{n}$.

Ma noi sappiamo che ogni numero reale si può approssimare con numeri razionali. Quindi, una volta definita la funzione esponenziale $\exp_a$ su $\mathbb{Q}$ in tal modo, si procede per approssimazione e la si estende a tutto $\mathbb{R}$. Si dimostra inoltre che

$$\exp_a(x) > 0\,, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$

6 Il logaritmo

Si dice che una funzione $f : A \to B$ è "invertibile" quando per ogni $b \in B$ esiste un $a \in A$ tale che $f(a) = b$, e tale elemento a è unico. In tal caso si può definire una funzione da B ad A, che ad ogni $b \in B$ associa quell'unico elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Si tratta della "funzione inversa" di $f : A \to B$, che viene indicata con $f^{-1} : B \to A$. Si ha quindi

$$f(a) = b \quad \Longleftrightarrow \quad a = f^{-1}(b)\,.$$

Prendiamo ora come codominio della funzione esponenziale l'insieme dei numeri reali positivi

$$\mathbb{R}_p = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}\,.$$

Si può dimostrare il seguente

Teorema. *Se $a > 0$ è un numero diverso da 1, la funzione $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_p$ è invertibile. La sua funzione inversa si chiama "logaritmo di base a" e si denota con $\log_a$. Il suo grafico è rappresentato in Figura 2.*

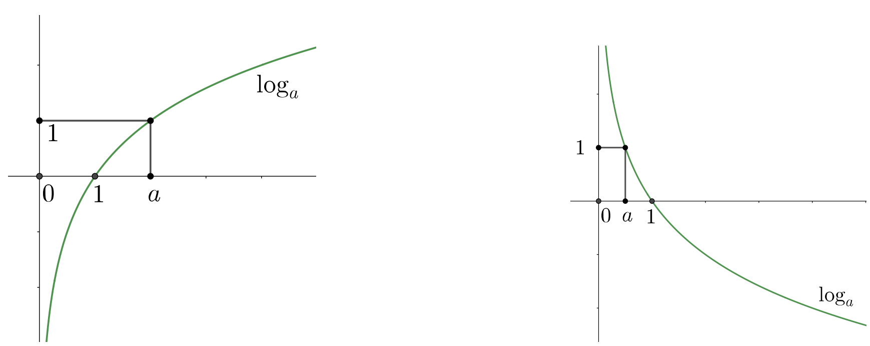


Figure 2: *La funzione $\log_a$ con $a > 1$ e $a < 1$, rispettivamente.*

Si noti che la funzione $\log_a$ è definita solo su $\mathbb{R}_p$ e assume valori in $\mathbb{R}$, sia positivi che negativi. Essa è così caratterizzata:

$$\exp_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(y)\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}_p$. Dalla proprietà dell'esponenziale

$$\exp_a(x + x') = \exp_a(x) \cdot \exp_a(x')$$

(l'esponenziale manda somme in prodotti) si ricava la proprietà opposta per il logaritmo

$$\log_a(yy') = \log_a(y) + \log_a(y')$$

(il logaritmo manda prodotti in somme).

Essendo l'esponenziale e il logaritmo l'inversa l'una dell'altra, potremo scrivere

$$\log_a(a^x) = x\,, \qquad a^{\log_a(y)} = y\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}_p$. Concludiamo con due utili proprietà del logaritmo.

La prima:

$$\log_a(y^\alpha) = \alpha \log_a(y)\,,$$

Verifichiamola: poniamo $u = \log_a(y^\alpha)$ e $v = \log_a(y)$. Allora $a^u = y^\alpha$ e $a^v = y$, da cui $a^u = (a^v)^\alpha = a^{v\alpha}$. Ne segue che $u = v\alpha$, che è quanto volevasi dimostrare.

La seconda:

$$\log_b(y) = \frac{\log_a(y)}{\log_a(b)}\,.$$

Verifichiamola: poniamo $u = \log_b(y)$, $v = \log_a(y)$ e $w = \log_a(b)$. Allora $b^u = y$, $a^v = y$ e $a^w = b$, da cui $a^v = (a^w)^u = a^{wu}$. Ne segue che $v = wu$, che è quanto volevasi dimostrare.

Verifichiamo infine che

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}\,.$$

Chiamiamo $b = \frac{1}{a}$, per cui $\log_a(b) = -1$. Ponendo $y = b^x$, abbiamo quindi

$$x = \log_b(y) = \frac{\log_a(y)}{\log_a(b)} = -\log_a(y)\,.$$

Allora $\log_a(y) = -x$, per cui $y = a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, che è quanto volevamo dimostrare.

7 Il numero di Nepero

Andiamo ad analizzare il grafico della funzione esponenziale $\exp_a$ nelle vicinanze del punto $(0, 1)$. In particolare, lo confrontiamo con la retta di equazione $y = x + 1$, che passa anch'essa per tale punto e ha coefficiente angolare (o "pendenza") uguale a 1.

Uno studio al computer ci mostra che i due grafici tendono a sovrapporsi quando, variando la base a, prendiamo un particolare valore vicino a $2,7$. Per essere più precisi, questo numero vale circa $2,7172818\ldots$ È un numero molto importante in matematica, esso si chiama "numero di Nepero", o talvolta "costante di Eulero" e si denota con il simbolo e. Esso risulta essere la "base naturale" dell'esponenziale e del logaritmo. Se si sceglie questa base, queste funzioni si denotano semplicemente con exp e ln (talvolta anche log). Si ha quindi che

$$e^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y)\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}_p$.

Quanto visto al computer si può interpretare equivalentemente in questo modo: prendendo un $x \neq 0$, quando si fa x tendere a 0 il rapporto $\frac{e^x-1}{x}$ si avvicina a 1. Diremo che il "limite" di $\frac{e^x-1}{x}$ per x che tende a 0 è uguale a 1 e scriveremo così:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

Questo è il primo esempio di quella che chiameremo "derivata".

8 La derivata in un punto x_0

Vediamo di ripetere il ragionamento fatto per la funzione esponenziale più in generale, per una qualsiasi funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fissiamo un punto x_0 e prendiamo un $x \neq x_0$. In corrispondenza abbiamo i valori $f(x_0)$ e $f(x)$ e possiamo posizionare i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ sul grafico. Tracciamo la retta che passa per questi due punti. Essa è visualizzata nella Figura 3.

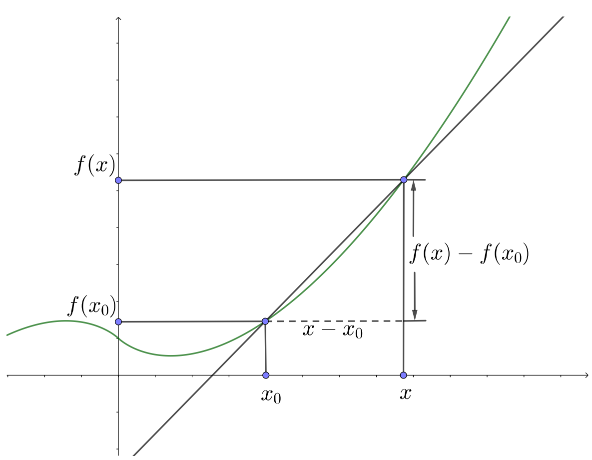


Figure 3: *La retta che passa per i punti* $(x_0, f(x_0))$ *e* $(x, f(x))$.

Il coefficiente angolare di questa retta è uguale a

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

e viene chiamato "rapporto incrementale". Se si fa tendere x a x_0, questo rapporto incrementale si avvicina a un certo numero che chiameremo "derivata di f in x_0" e denoteremo con $f'(x_0)$, oppure $Df(x_0)$ (o talvolta anche con $\frac{df}{dx}(x_0)$, seguendo la "notazione di Leibniz").

Diremo che il "limite" del rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ per x che tende a x_0 è uguale a $f'(x_0)$ e scriveremo così:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Vediamo alcuni esempi.

1) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x$. Allora

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1.$$

2) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^2$. Usando la formula

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

abbiamo che

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0.$$

3) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^3$. Usando la formula

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

abbiamo che

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^2+xx_0+x_0^2)=3x_0^2.$$

4) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^4$. Usando la formula

$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

abbiamo che

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^4-x_0^4}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^3+x^2x_0+xx_0^2+x_0^3)=4x_0^3.$$

In generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = x^n$, allora

$$f'(x_0) = nx_0^{n-1}.$$

Torniamo ora alla funzione esponenziale $f(x) = e^x$. Ponendo $\ell = x - x_0$, abbiamo che

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} e^{x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{\ell \to 0} \frac{e^\ell - 1}{\ell} = e^{x_0}.$$

Concludiamo con una semplice osservazione: la derivata di una funzione costante è sempre nulla. Infatti, se $f(x) = c$ per ogni x, allora

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0\,.$$

9 Alcune regole di derivazione

9.1 Derivata di una somma e di una sottrazione

Supponiamo di avere due funzioni, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora

$$\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)\,.}$$

Spiegazione: si vede che

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\,. \end{aligned}$$

Passando al limite, si trova la formula cercata.

Allo stesso modo si dimostra la formula

$$\boxed{(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)\,.}$$

9.2 Derivata di un prodotto

Sia ora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e $c \in \mathbb{R}$ una costante. Allora

$$\boxed{(cf)'(x_0) = cf'(x_0)\,.}$$

Spiegazione: si vede che

$$\frac{(cf)(x) - (cf)(x_0)}{x - x_0} = \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Passando al limite, si trova la formula cercata.

Esempi. 1) Abbiamo la funzione $h(x) = 4x^3 - 2e^x$. Allora

$$h'(x_0) = 4 \cdot 3x_0^2 - 2e^{x_0} = 12x_0^2 - 2e^{x_0}.$$

2) Sia ora $h(x) = 4x^3 + 7x^2 + 5x$. Iterando la formula per la somma, troviamo

$$h'(x_0) = 4 \cdot 3x_0^2 + 7 \cdot 2x + 5\,.$$

In generale, quando abbiamo la somma di più funzioni, continua a valere la stessa regola: la derivata della somma è uguale alla somma delle derivate. Un esempio si ha per le funzioni polinomiali, del tipo

$$h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\,.$$

La derivata sarà pertanto

$$h'(x_0) = n a_n x_0^n + (n-1)a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + 2a_2 x_0^2 + a_1\,.$$

Vediamo ora come si calcola la derivata del prodotto di due funzioni. Si ha:

$$\boxed{(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,.}$$

Spiegazione: si vede che

$$\begin{aligned}
\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\,.
\end{aligned}$$

Passando al limite, si trova la formula cercata.

Esempi. 1) Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = e^x x^4$. Possiamo scrivere $h = f \cdot g$, con $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^4$. Essendo $f'(x_0) = e^{x_0}$ e $g'(x_0) = 4x_0^3$, abbiamo che

$$h'(x_0) = e^{x_0} x_0^4 + e^{x_0} 4x_0^3 = e^{x_0} x_0^3 (x_0 + 4)\,.$$

2) Sia ora $h(x) = x^2(3x^2 + 1)$. Calcoliamone la derivata in x_0 in due modi diversi.
<u>I modo</u>. Sviluppando l'espressione, troviamo $h(x) = 3x^4 + x^2$, da cui

$$h'(x_0) = 3 \cdot 4x_0^3 + 2x_0 = 12x_0^3 + 2x_0\,.$$

<u>II modo</u>. Scriviamo $h = f \cdot g$, con $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x^2 + 1$. Usando la formula di derivazione di un prodotto,

$$h'(x_0) = 2x_0(3x_0^2 + 1) + x_0^2(3 \cdot 2x_0) = 12x_0^3 + 2x_0\,.$$

9.3 Derivata di un quoziente

Data una funzione g, iniziamo con il trovare la derivata di $\frac{1}{g}$. Ecco la formula:

$$\boxed{\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,.}$$

Spiegazione: si vede che

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}\,\frac{1}{x - x_0} \\
&= -\frac{g(x) - gx_0)}{x - x_0}\,\frac{1}{g(x)g(x_0)}\,.
\end{aligned}$$

Passando al limite, si trova la formula cercata.

Esempio. Vogliamo calcolare la derivata di $h(x) = x^{-n}$, dove n è un numero naturale. Si vede che $h = \frac{1}{g}$, con $g(x) = x^n$. Allora, essendo $g'(x_0) = nx_0^{n-1}$, si ha:

$$h'(x_0) = -\frac{nx_0^{n-1}}{[x_0^n]^2} = -nx_0^{-n-1}.$$

Ora siamo in grado di calcolare la derivata del quoziente di due funzioni f e g.

$$\boxed{\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,.}$$

Spiegazione: si vede che

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) &= \Big(f \cdot \frac{1}{g}\Big)'(x_0) \\
&= f'(x_0)\frac{1}{g}(x_0) + f(x_0)\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x_0) \\
&= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\Big(-\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\Big) \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,.
\end{aligned}$$

Esempi. 1) Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = \frac{x^2}{e^x}$. Possiamo scrivere $h = \frac{f}{g}$, con $f(x) = x^2$ e $g(x) = e^x$. Essendo $f'(x_0) = 2x_0$ e $g'(x_0) = e^{x_0}$, abbiamo che

$$h'(x_0) = \frac{2x_0e^{x_0} - x_0^2e^{x_0}}{[e^{x_0}]^2} = \frac{x_0(2 - x_0)}{e^{x_0}}\,.$$

Se, ad esempio, $x_0 = 1$, allora

$$h'(1) = \frac{1(2-1)}{e^1} = \frac{1}{e} = 0,367879\dots$$

2) Sia

$$h(x) = \frac{3x^5 - 7x + 1}{-2x^3 + x^2 + 3}\,.$$

Allora $h = \frac{f}{g}$, con $f(x) = 3x^5 - 7x + 1$ e $g(x) = -2x^3 + x^2 + 3$. Quindi,

$$h'(x_0) = \frac{(15x_0^4 - 7)(-2x_0^3 + x_0^2 + 3) - (3x_0^5 - 7x_0 + 1)(-6x_0^2 + 2x_0)}{[-2x_0^3 + x_0^2 + 3]^2}\,.$$

Se, ad esempio, $x_0 = 1$, allora

$$h'(1) = \frac{(15-7)(-2+1+3) - (3-7+1)(-6+2)}{[-2+1+3]^2} = 1\,.$$

Vediamo ora un esempio più complicato. Sia

$$h(x) = \frac{e^x}{x^3 + 2x^2}(-x^7 + 1)\,.$$

Vogliamo calcolarne la derivata nel punto $x_0 = 1$. Abbiamo che $h = F \cdot G$, con $F(x) = \frac{e^x}{x^3+2x^2}$ e $G(x) = -x^7 + 1$. Vediamo che

$$F'(x_0) = \frac{e^{x_0}(x_0^3 + 2x_0^2) - e^{x_0}(3x_0^2 + 2x_0)}{[x_0^3 + 2x_0^2]^2} = \frac{e^{x_0}(x_0^3 - x_0^2 - 2x_0)}{x_0^4(x_0+2)^2} = \frac{e^{x_0}(x_0^2 - x_0 - 2)}{x_0^3(x_0+2)^2}\,,$$

mentre

$$G'(x_0) = -7x_0^6\,.$$

Allora

$$\begin{aligned} h'(1) &= F'(1)G(1) + F(1)G'(1) \\ &= \frac{e(1-1-2)}{1(1+2)^2}(-1+1) + \frac{e}{1+2}(-7) = -\frac{7}{3}\,e = -6,342657\dots \end{aligned}$$

10 Le funzioni trigonometriche

Prima di definire le funzioni trigonometriche, dobbiamo capire come si può misurare l'ampiezza di un angolo.

Ci troviamo su un piano cartesiano e supponiamo che il nostro angolo sia individuato da due semirette che partono dall'origine degli assi. Per semplicità prendiamo la prima semiretta coincidente con il semiasse orizzontale a destra dell'origine, ossia $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq 0\,, y = 0\}$. L'angolo verrà misurato partendo da questa prima semiretta e procedendo in senso antiorario fino a raggiungere la seconda semiretta.

Fin da bambini ci è stato insegnato che un angolo si può misurare in *gradi sessagesimali*. Si prende una circonferenza centrata nell'origine; per semplicità sceglieremo sempre la circonferenza di raggio uguale a 1, ossia

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}\,.$$

La prima semiretta che individua il nostro angolo incrocia la circonferenza S^1 nel punto $(1, 0)$, mentre la seconda semiretta la incrocia in un punto che chiamiamo P. Ora suddividiamo la circonferenza S^1 in 360 parti uguali. La misura dell'angolo consiste nel contare quante di queste parti servono per raggiungere il punto P, partendo da $(1, 0)$ e procedendo in senso antiorario. Ad esempio, se ce ne sono 47, diremo che l'angolo misura 47 gradi, e scriveremo $47°$.

Se P non ricade esattamente su uno dei 360 punti equidistanti così ottenuti, sarà necessario considerare delle cifre decimali, ad esempio $47,2°$ o $47,23°$. In generale, per avere una buona precisione bisognerà dividere la circonferenza S^1 in n parti uguali, con n un numero molto grande, e contare quante di queste parti servono per raggiungere il punto P. Se questo numero è m, la misura dell'angolo è $m\frac{360}{n}$. Nell'esempio precedente, prendendo $n = 360$ si trova $m = 47$, prendendo $n = 3600$ si trova $m = 472$, prendendo $n = 36000$ si trova $m = 4723$, e aumentando ancora n si può ottenere un'approssimazione via via migliore.

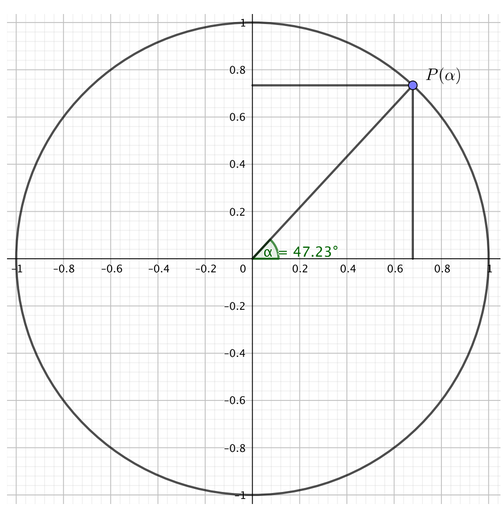


Figure 4: *La misura di un angolo di circa* $47,23°$.

La scelta del numero 360 ha origini molto antiche, sembra che risalga addirittura alle culture dei Sumeri o dei Babilonesi. Ma nessuno ci obbliga a scegliere proprio il numero 360. Ad esempio, nel diciottesimo secolo, in Francia si è diffusa l'abitudine di scegliere il numero 400 invece del vecchio 360, misurando così gli angoli in *gradi centesimali*. Questa abitudine è perdurata fino ai giorni nostri, tant'è che i teodoliti, strumenti di precisione utilizzati per la misura di angoli sul terreno terrestre, hanno l'angolo giro suddiviso in 400 parti uguali.

Viene da chiedersi allora quale sia il numero giusto, 360 o 400? Oppure un altro numero, forse 10 o 100? Oppure 2,5, o $\frac{13}{17}$ o forse $\sqrt{2}$? Nel dubbio, chiameremo T un tale numero; vedremo che la scelta più opportuna non sarà nessuno dei numeri precedenti. Questo numero $T > 0$ sarà quindi la misura dell'angolo giro. Ad esempio, $T = 360$ se vogliamo usare i gradi sessagesimali, oppure $T = 400$ per i gradi centesimali.

Una volta fissato $T > 0$, ogni angolo potrà ora essere misurato suddividendo la circonferenza S^1 in n parti uguali e contando quante di queste parti servono per raggiungere il punto P. Se questo numero è m, diremo che la misura dell'angolo è $m\frac{T}{n}$. Prendendo n molto grande, la misura sarà ottenuta con la precisione desiderata.

Come semplici esempi, l'angolo retto avrà misura $\frac{T}{4}$, che coincide con 90° quando $T = 360$. L'angolo piatto avrà misura $\frac{T}{2}$.

Fissiamo ora $T > 0$ qualunque e prendiamo un angolo di misura α. Come spiegato sopra, viene individuato un punto P sulla circonferenza S^1, che in questo caso sarà opportuno denotare con $P(\alpha)$ (vedi Figura 4). Questo punto ha due coordinate:

- la prima si chiama "coseno di α" e si denota con $\cos_T(\alpha)$,

- la seconda si chiama "seno di α" e si denota con $\sin_T(\alpha)$.

Possiamo quindi scrivere

$$P(\alpha) = (\cos_T(\alpha), \sin_T(\alpha)) .$$

Restano così definite le "funzioni trigonometriche" $\cos_T$ e $\sin_T$. È conveniente scrivere l'indice T per ricordarci il numero scelto. Ad esempio, se consideriamo l'angolo retto, abbiamo (in gradi sessagesimali)

$$\cos_{360}(90) = 0 , \qquad \sin_{360}(90) = 1 ,$$

mentre (in gradi centesimali)

$$\cos_{400}(100) = 0 , \qquad \sin_{400}(100) = 1 .$$

Siccome $P(\alpha)$ appartiene a S^1, si ha che, per ogni α,

$$\big(\cos_T(\alpha)\big)^2 + \big(\sin_T(\alpha)\big)^2 = 1 .$$

Le funzioni $\cos_T$ e $\sin_T$ vengono poi estese a tutto $\mathbb{R}$ per T-periodicità. I loro grafici sono rappresentati in Figura 5.

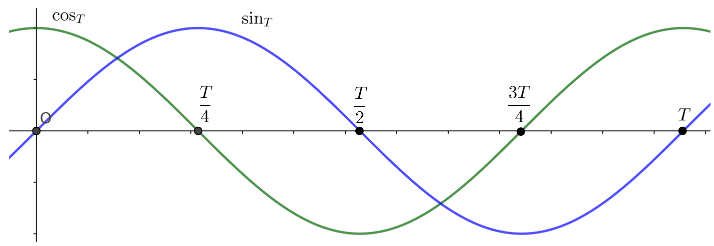


Figure 5: *Grafici di* $\cos_T$ *e* $\sin_T$.

Andiamo ad analizzare il grafico della funzione $\sin_T$ nelle vicinanze del punto $(0,0)$. In particolare, lo confrontiamo con la retta di equazione $y = x$, che passa anch'essa per tale punto e ha coefficiente angolare uguale a 1. Uno studio al computer ci mostra che i due grafici tendono a sovrapporsi quando, variando la base T, arriviamo a prendere un particolare valore vicino a $6,28$. Per essere più precisi, questo numero vale circa $6,2831853\ldots$ Dividendo T per 2 troviamo un numero molto importante in matematica, che si chiama "pi greco", e si denota con il simbolo π. Il suo valore approssimato è $3,1415926\ldots$ La scelta $T = 2\pi$ risulta essere la "base naturale" delle funzioni trigonometriche. Se si sceglie questa base, le funzioni trigonometriche si denotano semplicemente con cos e sin. Ad esempio, per quanto concerne l'angolo retto, abbiamo $\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, e pertanto

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,.$$

Si può dimostrare che il numero 2π è proprio uguale alla lunghezza della circonferenza S^1. Questa lunghezza può essere ricavata seguendo il procedimento di Archimede (circa 250 a.C.): si considera un triangolo equilatero inscritto alla circonferenza S^1 e se ne calcola il perimetro p_1. Raddoppiando il numero dei lati si ottiene un esagono regolare inscritto a S^1, di perimetro p_2. Raddoppiando ancora il numero dei lati si ha un dodecagono, di perimetro p_3. Procedendo in questo modo, si ottiene una successione

$$p_1\,, \quad p_2\,, \quad p_3\,, \quad p_4\,, \quad p_5\,, \quad p_6\,, \quad \ldots\,, \quad p_n\,, \quad \ldots$$

e si può vedere che, al crescere di n, il numero p_n si avvicina a $6,2831853\ldots$, ossia a 2π. Archimede si è fermato a p_6, il perimetro del poligono regolare di 96 lati, ottenendo una precisione nel calcolo di 2π di due cifre decimali, un risultato eccezionale per l'epoca.

Con la scelta $T = 2\pi$ si dice che la misura degli angoli avviene in “radianti”. Un radiante in gradi sessagesimali vale $\frac{360}{2\pi}$ ossia circa $57,3°$. Con questa scelta, l'arco di circonferenza che parte dal punto $(1,0)$ e arriva al punto $P(\alpha)$ in senso antiorario ha una lunghezza esattamente uguale ad α.

11 Proprietà delle funzioni trigonometriche

Per semplificare la notazione, si scrive spesso $\cos x$, $\sin x$ invece di $\cos(x)$, $\sin(x)$. Inoltre, in alternativa a $(\cos x)^2$, $(\sin x)^2$ si usa scrivere $\cos^2 x$, $\sin^2 x$. Ad esempio, avremo sempre

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,.}$$

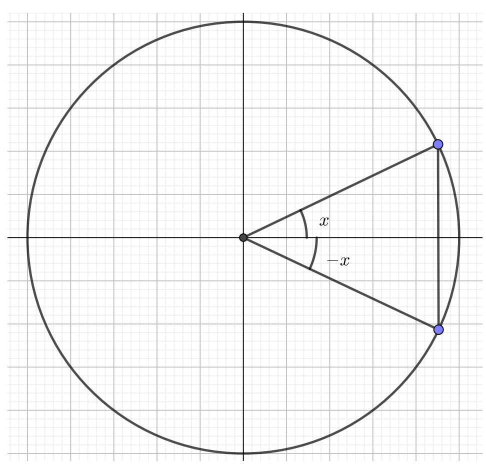
Avendo visto che la derivata della funzione sin nel punto $x_0 = 0$ vale esattamente 1, possiamo quindi scrivere

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.}$$

Graficamente si può vedere che

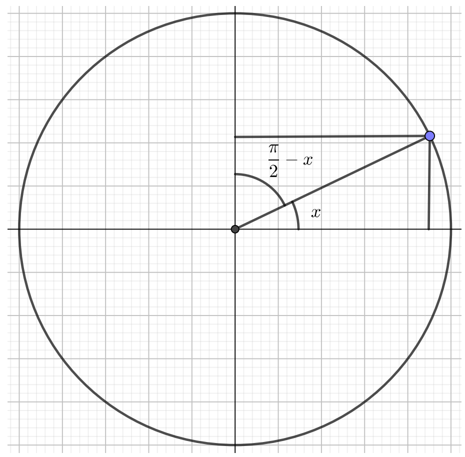
$$\boxed{\cos(-x) = \cos x\,, \qquad \sin(-x) = -\sin x\,,}$$

per cui cos è una funzione pari, mentre sin è dispari.



Inoltre,

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x\,, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x\,.}$$



Valgono le seguenti "formule di addizione":

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,,}$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,,}$$

e le corrispondenti "formule di sottrazione":

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,,}$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,.}$$

Le dimostriamo. Supponiamo che sia $\alpha > \beta$ e osserviamo che la distanza tra $P(\alpha)$ e $P(\beta)$ è uguale alla distanza tra $P(\alpha-\beta)$ e $P(0)$. [6] Essendo

$$P(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)\,, \qquad P(\beta) = (\cos\beta, \sin\beta)\,,$$

abbiamo che

$$d(P(\alpha), P(\beta)) = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}\,.$$

Inoltre, essendo

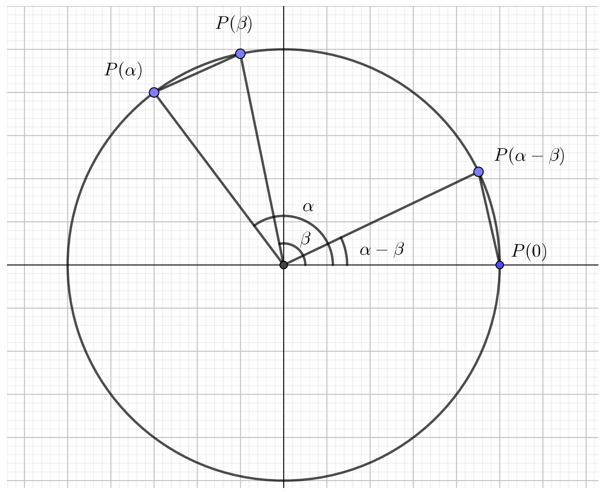
$$P(\alpha-\beta) = (\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))\,, \qquad P(0) = (1,0)\,,$$

abbiamo che

$$d(P(\alpha-\beta), P(0)) = \sqrt{(\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\sin(\alpha-\beta)-0)^2}\,.$$

[6] Ricordo che la distanza tra due punti $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ è data da

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$



Elevando al quadrato, l'uguaglianza

$$[d(P(\alpha-\beta), P(0))]^2 = [d(P(\alpha), P(\beta))]^2$$

diventa

$$\begin{aligned}&\cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta) = \\ &\qquad = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta\,.\end{aligned}$$

Semplificando,

$$2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\,,$$

da cui

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,.$$

Ora, scrivendo $\alpha+\beta = \alpha-(-\beta)$,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,.\end{aligned}$$

Inoltre abbiamo

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \beta\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,.\end{aligned}$$

Infine, scrivendo $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,.\end{aligned}$$

12 Derivata delle funzioni trigonometriche

Scriviamo il rapporto incrementale per la funzione coseno:

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}\,.$$

Ponendo $t = x - x_0$, abbiamo che $x = x_0 + t$ e quindi

$$\begin{aligned}\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} &= \frac{\cos(x_0 + t) - \cos x_0}{t} \\ &= \frac{\cos x_0 \cos t - \sin x_0 \sin t - \cos x_0}{t} \\ &= \frac{\cos t - 1}{t}\cos x_0 - \frac{\sin t}{t}\sin x_0\,.\end{aligned}$$

Ora vediamo che

$$\begin{aligned}\frac{\cos t - 1}{t} &= \frac{\cos t - 1}{t}\,\frac{\cos t + 1}{\cos t + 1} \\ &= \frac{\cos^2 t - 1}{t}\,\frac{1}{\cos t + 1} \\ &= \frac{-\sin^2 t}{t}\,\frac{1}{\cos t + 1} \\ &= -\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \frac{t}{\cos t + 1}\,.\end{aligned}$$

Quindi,

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \frac{t}{\cos t + 1}\cos x_0 - \frac{\sin t}{t}\sin x_0\,.$$

Se ora facciamo tendere x a x_0, abbiamo che t tende a 0 e pertanto

- $\dfrac{\sin t}{t}$ tende a $1\,,$
- $\dfrac{t}{\cos t + 1}$ tende a $\dfrac{0}{\cos(0) + 1} = 0\,.$

In conclusione,

$$-\Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2\frac{t}{\cos t+1}\cos x_0-\frac{\sin t}{t}\sin x_0 \quad \text{tende a} \quad -1^2{\cdot}0{\cdot}\cos x_0-1{\cdot}\sin x_0=-\sin x_0\,.$$

Concludiamo pertanto che

$$D\cos(x_0)=-\sin x_0\,.$$

Calcoliamo ora la derivata della funzione seno. Procedendo come sopra,

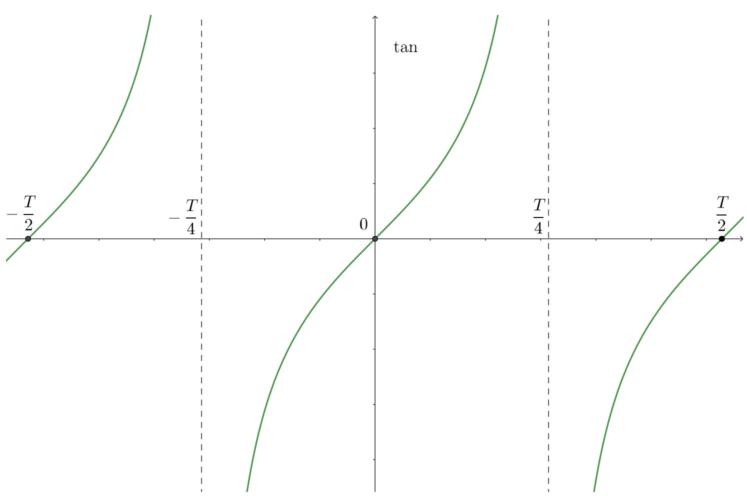
$$\begin{aligned}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}&=\frac{\sin(x_0+t)-\sin x_0}{t}\\&=\frac{\sin x_0\cos t+\cos x_0\sin t-\sin x_0}{t}\\&=\frac{\cos t-1}{t}\sin x_0-\frac{\sin t}{t}\cos x_0\\&=-\Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2\frac{t}{\cos t+1}\sin x_0+\frac{\sin t}{t}\cos x_0\,.\end{aligned}$$

Se facciamo tendere x a x_0, otteniamo che

$$D\sin(x_0)=\cos x_0\,.$$

È utile introdurre la funzione "tangente":

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\,.$$



Essa è definita solo se

$$x\notin\Big\{\frac{\pi}{2}+k\pi:k\in\mathbb{Z}\Big\}\,.$$

Si può notare che è periodica di periodo π:

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi}{\cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x\,.$$

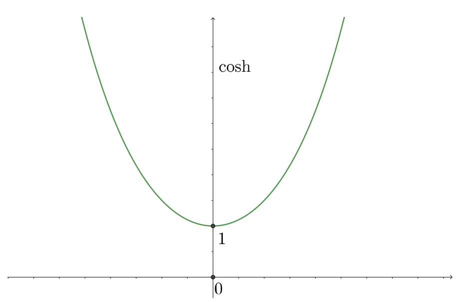
Ne calcoliamo la derivata: usando la formula della derivata del quoziente delle due funzioni $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$,

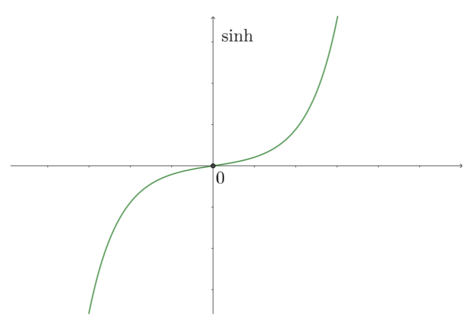
$$\begin{aligned} D\tan(x_0) &= \frac{D\sin(x_0)\cos x_0 - \sin x_0\, D\cos(x_0)}{[\cos x_0]^2} \\ &= \frac{\cos x_0\ \cos x_0 - \sin x_0\,(-\sin x_0)}{\cos^2 x_0} \\ &= \frac{\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0}{\cos^2 x_0} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x_0}\,. \end{aligned}$$

13 Le funzioni iperboliche

Definiamo il “coseno iperbolico” e il “seno iperbolico”:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,.$$





Anche qui si omettono spesso le parentesi e si scrive $\cosh^2 x$, $\sinh^2 x$ invece di $(\cosh x)^2$, $(\sinh x)^2$. Esse hanno proprietà simili a quelle delle funzioni trigonometriche. Ne evidenziamo alcune: innanzitutto

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.}$$

Si vede poi che

$$\boxed{\cosh(-x) = \cosh x\,, \qquad \sinh(-x) = -\sinh x\,,}$$

per cui cosh è una funzione pari, mentre sinh è dispari. Valgono inoltre le seguenti "formule di addizione":

$$\boxed{\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta\,,}$$
$$\boxed{\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta\,.}$$

Calcoliamo ora le derivate. Ricordando la formula della derivata di un reciproco, con $g(x) = e^x$, abbiamo che

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} = -\frac{e^{x_0}}{[e^{x_0}]^2} = -\frac{1}{e^{x_0}} = -e^{-x_0}.$$

Allora, essendo

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)$$

troviamo che

$$D\cosh(x_0) = \frac{1}{2}(e^{x_0} - e^{-x_0}) = \sinh x_0\,.$$

Inoltre, essendo

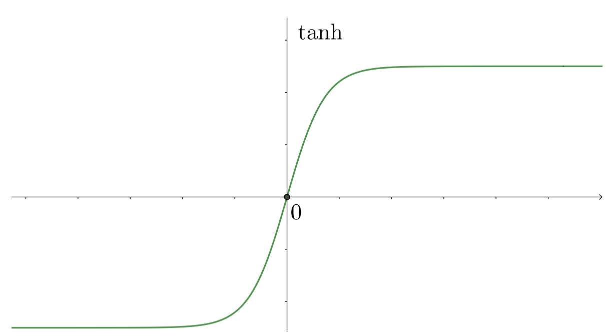
$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)$$

troviamo che

$$D\sinh(x_0) = \frac{1}{2}(e^{x_0} - (-e^{-x_0})) = \cosh x_0\,.$$

Si definisce infine la funzione "tangente iperbolica":

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}\,.$$



Ne calcoliamo la derivata: usando la formula della derivata del quoziente delle due funzioni $f(x) = \sinh x$ e $g(x) = \cosh x$:

$$\begin{aligned} D\tanh(x_0) &= \frac{D\sinh(x_0)\cosh x_0 - \sinh x_0\, D\cosh(x_0)}{[\cosh x_0]^2} \\ &= \frac{\cosh x_0\, \cosh x_0 - \sinh x_0\, \sinh x_0}{\cosh^2 x_0} \\ &= \frac{\cosh^2 x_0 - \sinh^2 x_0}{\cosh^2 x_0} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x_0}\,. \end{aligned}$$

14 Derivata della funzione inversa

Considereremo spesso funzioni definite su un intervallo, ossia un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ "tutto d'un pezzo". Per essere precisi, gli intervalli possono essere dei seguenti tipi:

$$\begin{aligned} &[a,b] = \{x : a \le x \le b\} \qquad \text{(chiuso e limitato)}\,, \\ &]a,b[= \{x : a < x < b\} \qquad \text{(aperto e limitato)}\,, \\ &[a,b[= \{x : a \le x < b\}\,, \\ &]a,b] = \{x : a < x \le b\}\,, \\ &[a,+\infty[= \{x : x \ge a\} \qquad \text{(chiuso, non limitato superiormente)}\,, \\ &]a,+\infty[= \{x : x > a\} \qquad \text{(aperto, non limitato superiormente)}\,, \\ &]-\infty,b] = \{x : x \le b\} \qquad \text{(chiuso, non limitato inferiormente)}\,, \\ &]-\infty,b[= \{x : x < b\} \qquad \text{(aperto, non limitato inferiormente)}\,, \\ &\mathbb{R}\,,\ \ \text{talvolta denotato con }\ ]-\infty,+\infty[\,. \end{aligned}$$

Nella lista si possono anche includere gli insiemi costituiti da un unico punto, cioè del tipo $[a,a]$. In tal caso, si tratta di un intervallo degenere.

Siano I e J due intervalli e supponiamo di avere una funzione $f : I \to J$ che sia invertibile. Esiste quindi la funzione inversa $f^{-1} : J \to I$, per la quale si ha che

$$f(x) = y \quad \iff \quad x = f^{-1}(y)\,.$$

Sarà conveniente usare lettere diverse per gli elementi di I, che indichiamo con x, e gli elementi di J, che indichiamo con y. Per calcolare la derivata di f^{-1} in un punto $y_0 \in J$, scriviamo il rapporto incrementale

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}\,.$$

Definiamo

$$x_0 = f^{-1}(y_0)\,, \qquad \text{per cui} \qquad f(x_0) = y_0\,,$$

e poniamo

$$x = f^{-1}(y)\,, \qquad \text{per cui} \qquad f(x) = y\,.$$

Abbiamo quindi

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}\,.$$

Se ora y tende a y_0, avremo che anche x tende a x_0, e troviamo che

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.}$$

Come esempio, sia $I = \mathbb{R}$, $J =]0, +\infty[$ e $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ la funzione esponenziale $f(x) = e^x$. La sua inversa $f^{-1} :]0, +\infty[\to R$ è il logaritmo $f^{-1}(y) = \ln y$. Calcoliamone la derivata in un punto $y_0 = f(x_0) = e^{x_0}$. sapendo che $f'(x_0) = e^{x_0}$,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0}\,.$$

Un altro esempio si ha prendendo $I =]0, +\infty[\,$, $J =]0, +\infty[$ e la funzione $f(x) = x^2$. La sua inversa è la radice quadrata: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Calcoliamone la derivata in un punto $y_0 = f(x_0) = x_0^2$. Sapendo che $f'(x_0) = 2x_0$,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}\,.$$

15 Derivata di una funzione composta

Se abbiamo due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, la funzione composta $g \circ f : A \to C$ è definita da

$$[g \circ f](x) = g(f(x))\,.$$

Supponendo che gli insiemi A, B, C siano tre intervalli, vorremmo ricavare la formula della sua derivata in un punto $x_0 \in A$. Scriviamo pertanto il rapporto incrementale

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}\,.$$

Supponiamo che sia $f(x) \neq f(x_0)$ in un intorno del punto x_0. (In caso contrario, la derivata sarà uguale a 0.) Ponendo $y_0 = f(x_0)$ e $y = f(x)$, possiamo scrivere

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Se ora x tende a x_0, avremo che anche y tende a y_0, e troviamo che

$$[g \circ f]'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)\,,$$

ossia

$$\boxed{[g \circ f]'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\,.}$$

Come primo esempio, consideriamo la funzione $h(x) = \cos(x^2)$. Si vede che $h = g \circ f$, dove $f(x) = x^2$ e $g(y) = \cos y$. Pertanto, ponendo $y_0 = f(x_0) = x_0^2$, sapendo che $f'(x_0) = 2x_0$ e $g'(y_0) = -\sin(y_0)$, otteniamo

$$h'(x_0) = -\sin(y_0) \cdot 2x_0 = -\sin(x_0^2) \cdot 2x_0\,.$$

Come secondo esempio, sia α un qualsiasi numero reale e consideriamo la funzione $h(x) = x^\alpha$, definita su $]0, +\infty[$. La scriviamo così:

$$h(x) = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln x}.$$

Vediamo quindi che $h = g \circ f$, dove $f(x) = \alpha \ln x$ e $g(y) = e^y$. Pertanto, ponendo $y_0 = f(x_0) = \alpha \ln x_0$, sapendo che $f'(x_0) = \alpha\,\frac{1}{x_0}$ e $g'(y_0) = e^{y_0}$, otteniamo

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= e^{y_0} \cdot \alpha\,\frac{1}{x_0} \\ &= e^{\alpha \ln x_0} \cdot \alpha\,\frac{1}{x_0} \\ &= x_0^\alpha \cdot \alpha\,\frac{1}{x_0} \\ &= \alpha x_0^{\alpha-1}\,. \end{aligned}$$

16 La funzione derivata

Data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$, finora abbiamo calcolato la derivata $f'(x_0)$ in un singolo punto x_0 del dominio Ω. Adesso vogliamo cambiare la notazione e invece di x_0 scrivere x. Ecco allora che a ogni elemento x del dominio della funzione f viene associato il numero $f'(x)$. Resta così definita una funzione $f' : \Omega \to \mathbb{R}$, che chiamiamo "funzione derivata", o semplicemente "derivata", della funzione f.

Abbiamo la seguente tabella:

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\dots$	$\dots$

Sarà utile ricordare le formule di derivazione ottenute finora:

$$
\begin{aligned}
&(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)\,,\\
&(f-g)'(x) = f'(x) + g'(x)\,,\\
&(cf)'(x) = c\,f'(x) \quad (\text{con } c \in \mathbb{R} \text{ costante})\,,\\
&(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,,\\
&\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}\,,\\
&\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\,,\\
&(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{se} \quad y = f(x)\,,\\
&[g\circ f]'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)\,.
\end{aligned}
$$

Una volta definita la funzione derivata $f' : \Omega \to \mathbb{R}$, si può provare a calcolare la sua derivata in un punto x_0: essa si chiama "derivata seconda" di f e si indica con con $f''(x_0)$, oppure $D^2 f(x_0)$ (o talvolta anche con $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$, seguendo la "notazione di Leibniz"). In questo modo si può definire la "funzione derivata seconda" $f'' : \Omega \to \mathbb{R}$. Procedendo in maniera analoga si possono definire la derivata terza, quarta, e così via.

Ad esempio, se $f(x) = \cos x$, allora

$$f'(x) = -\sin x\,, \qquad f''(x) = -\cos x\,, \qquad f'''(x) = -\sin x\,, \quad \dots$$

Se invece $f(x) = e^x$, tutte le derivate coincideranno con e^x.

17 Funzioni trigonometriche inverse

Le funzioni trigonometriche cos, sin e tan non sono invertibili, essendo periodiche. Se però restringiamo opportunamente i domini e i codomini, possiamo ottenere delle funzioni invertibili con le loro interessanti funzioni inverse.

Consideriamo dapprima la funzione $F : [0, \pi] \to [-1, 1]$ definita da $F(x) = \cos x$. Si può dimostrare che essa è invertibile. La sua funzione inversa $F^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ si chiama “arco coseno” e si denota con arccos. Scriveremo quindi

$$F^{-1}(y) = \arccos y\,.$$

Calcoliamone la derivata: ponendo $y = F(x)$, per $x \in\,]0, \pi[$ si ha

$$(F^{-1})'(y) = \frac{1}{F'(x)} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,,$$

Consideriamo ora la funzione $G : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ definita da $G(x) = \sin x$. Si può dimostrare che essa è invertibile. La sua funzione inversa $G^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si chiama “arco seno” e si denota con arcsin. Scriveremo quindi

$$G^{-1}(y) = \arcsin y\,.$$

Calcoliamone la derivata: ponendo $y = G(x)$, per $x \in\,] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si ha

$$(G^{-1})'(y) = \frac{1}{G'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

Consideriamo infine la funzione $H :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ definita da $H(x) = \tan x$. Si può dimostrare che essa è invertibile. La sua funzione inversa $H^{-1} : \mathbb{R} \to] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si chiama “arco tangente” e si denota con arctan. Scriveremo quindi

$$H^{-1}(y) = \arctan y\,.$$

Calcoliamone la derivata: ponendo $y = H(x)$, per $x \in\,] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si ha

$$(H^{-1})'(y) = \frac{1}{H'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}\,.$$

18 Funzioni iperboliche inverse

La funzione $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile. Si vede infatti che

$$\sinh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1}\,)\,.$$

La derivata si può calcolare direttamente, oppure usando la formula della funzione inversa: se $y = \sinh(x)$, si ha

$$D\sinh^{-1}(y) = \frac{1}{D\sinh(x)} = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,.$$

La funzione $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è invertibile. D'altra parte, la funzione $F : [0,+\infty[\, \to [1,+\infty[\,$, definita da $F(x) = \cosh x$, lo è. La sua inversa $F^{-1} : [1,+\infty[\, \to [0,+\infty[$ è data da

$$F^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}\,)\,.$$

Essa si denota spesso, impropriamente, con $\cosh^{-1}$. Calcoliamone la derivata: ponendo $y = \cosh(x)$, con $x > 0$, si ha

$$D\cosh^{-1}(y) = \frac{1}{D\cosh(x)} = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(x)-1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

La funzione $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è invertibile. D'altra parte, la funzione $H : \mathbb{R} \to\,]-1,1[\,$, definita da $H(x) = \tanh x$, lo è. La sua inversa $H^{-1} :]-1,1[\, \to \mathbb{R}$ è data da

$$H^{-1}(y) = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\,.$$

Essa si denota spesso, impropriamente, con $\tanh^{-1}$. Ne calcoliamo la derivata: ponendo $y = \tanh(x)$, si ha

$$D\tanh^{-1}(y) = \frac{1}{D\tanh(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 x}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}} = \frac{1}{1-\tanh^2(x)} = \frac{1}{1-y^2}\,.$$

Riassumiamo nella tabella sottostante le derivate delle funzioni elementari fin qui trovate.

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

19 Esercizi risolti

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$2x^3 \sin x, \quad \frac{e^x}{x+1}, \quad \cos(3x).$$

Svolgimento. La prima: pongo $h(x) = 2x^3 \sin x$, $f(x) = 2x^3$ e $g(x) = \sin x$, per cui $h(x) = f(x)g(x)$. Allora

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= 2 \cdot 3x^2 \sin x + 2x^3 \cos x \\ &= 2x^2(3 \sin x + x \cos x)\,. \end{aligned}$$

La seconda: pongo $h(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $f(x) = e^x$ e $g(x) = x+1$, per cui $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Allora

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{e^x(x+1) - e^x \cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= e^x \frac{x}{(x+1)^2}\,. \end{aligned}$$

La terza: pongo $h(x) = \cos(3x)$, $f(x) = 3x$ e $g(x) = \cos x$, per cui $h(x) = g(f(x))$. Allora
$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = -\sin(3x)3 = -3\sin(3x)\,.$$

20 Uso della derivata

Sia U un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, dominio della funzione $f : U \to \mathbb{R}$. Consideriamo un intervallo I contenuto in U. Diremo che la funzione è:

- *crescente* su I se $[x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \leq f(x_2)]$ per ogni scelta di x_1, x_2 in I;
- *strettamente crescente* su I se $[x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)]$ per ogni x_1, x_2 in I;
- *decrescente* su I se $[x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \geq f(x_2)]$ per ogni x_1, x_2 in I;
- *strettamente decrescente* su I se $[x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2)]$ per ogni x_1, x_2 in I.

Si noti che se la funzione è sia crescente che decrescente su I, allora è ivi *costante*, esiste cioè un valore $c \in \mathbb{R}$ per cui
$$f(x) = c\,, \qquad \text{per ogni } x \in I\,.$$

Enunciamo ora il teorema che ci sarà utile per studiare l'andamento del grafico di una funzione.

Teorema. *Sia I un intervallo contenuto in U. Allora:*
- *se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$, allora f è crescente su I;*
- *se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è strettamente crescente su I;*
- *se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in I$, allora f è decrescente su I;*
- *se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I$, allora f è strettamente decrescente su I;*
- *se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, allora f è costante su I.*

Esempi. 1) Sia $f(x) = \arctan x$. Essa è definita su tutto $\mathbb{R}$ e
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0\,, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$
Pertanto, la funzione arctan è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$.

2) Sia $f(x) = \tan x$. Essa non è definita su tutto $\mathbb{R}$, ma su
$$U = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
La sua derivata è
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0\,, \qquad \text{per ogni } x \in U\,.$$
Pertanto, la funzione tan è strettamente crescente su ogni intervallo I contenuto in U. Ad esempio, su $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3) Sia $f(x) = e^x$. È definita su tutto $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = e^x > 0\,, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$

Pertanto, la funzione esponenziale exp è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$.

4) Sia $f(x) = \ln x$. È definita solo su $]0, +\infty[$ e

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0\,, \qquad \text{per ogni } x \in]0, +\infty[\,.$$

Pertanto, la funzione logaritmo ln è strettamente crescente su $]0, +\infty[$.

5) Sia $f(x) = \cos x$. È definita su tutto $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = -\sin x \begin{cases} < 0\,, & \text{se } x \in]0, \pi[\,, \\ > 0\,, & \text{se } x \in]\pi, 2\pi[\,. \end{cases}$$

Pertanto,

$$\cos\ \text{è} \begin{cases} \text{strettamente decrescente su }]0, \pi[\,, \\ \text{strettamente crescente su }]\pi, 2\pi[\,. \end{cases}$$

6) Sia $f(x) = \sin x$. È definita su tutto $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = \cos x \begin{cases} > 0\,, & \text{se } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\,, \\ < 0\,, & \text{se } x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\,. \end{cases}$$

Pertanto,

$$\sin\ \text{è} \begin{cases} \text{strettamente crescente su } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\,, \\ \text{strettamente decrescente su } \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\,. \end{cases}$$

7) Sia ora $f(x) = \arccos x$. È definita solo su $[-1, 1]$ e

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} < 0\,, \qquad \text{per ogni } x \in]-1, 1[\,.$$

Pertanto, la funzione arco coseno è strettamente decrescente su $]-1, 1[$.

8) Se invece prendiamo $f(x) = \arcsin x$, anch'essa è definita solo su $[-1, 1]$ e

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} > 0\,, \qquad \text{per ogni } x \in]-1, 1[\,.$$

Pertanto, la funzione arco seno è strettamente crescente su $]-1, 1[$.

Osserviamo ora che, se consideriamo la funzione $f(x) = \arccos x + \arcsin x$, si ha che

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0\,, \qquad \text{per ogni } x \in]-1,1[\,.$$

Ne segue che tale funzione f deve essere costante su $]-1,1[$. Calcoliamone il valore, ad esempio, in $x = 0$. Abbiamo che

$$f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Concludiamo quindi che

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \text{per ogni } x \in]-1,1[\,.$$

9) Studiamo ora la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}\,.$$

Essa è definita su tutto $\mathbb{R}$. Vediamo che

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\,.$$

Il denominatore è sempre positivo, mentre il numeratore è

$$1-x^2 \begin{cases} > 0\,, & \text{se } x \in]-1,1[\,, \\ < 0\,, & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Quindi

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente decrescente su }]-\infty,-1[\,, \\ \text{strettamente crescente su }]-1,1[\,, \\ \text{strettamente decrescente su }]1,+\infty[\,. \end{cases}$$

Ne deduciamo che la funzione assume il suo massimo valore quando $x = 1$, valore che sarà precisamente $f(1) = \frac{1}{2}$.

Volendo disegnare il grafico di f sarà bene acquisire ulteriori informazioni. Ad esempio, notiamo che f è dispari:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)\,.$$

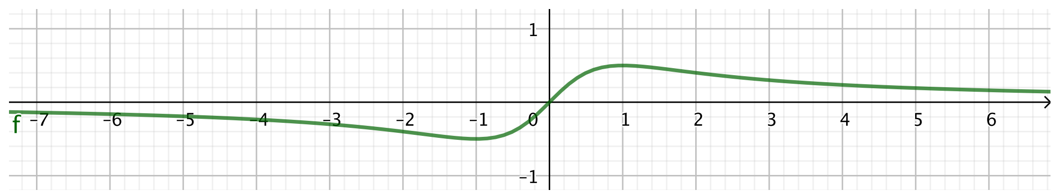
Il suo grafico sarà pertanto simmetrico rispetto all'origine $(0,0)$. Vediamo inoltre che

$$f(x) \begin{cases} > 0\,, & \text{se } x > 0\,, \\ = 0\,, & \text{se } x = 0\,, \\ < 0\,, & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Notiamo infine che, se $x > 0$, allora

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}\,.$$

Quindi, al crescere di x, il valore $f(x)$ tende a divenire estremamente piccolo. Possiamo ora disegnare con buona approssimazione il grafico di f.



10) Studiamo ora la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}\,.$$

Essa è definita su $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Vediamo che

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,.$$

Il denominatore è sempre positivo, mentre il numeratore è

$$x^2 + 2x = x(x+2) \begin{cases} < 0\,, & \text{se } x \in \,]-2, 0[\,, \\ > 0\,, & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Quindi

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente crescente su }]-\infty, -2[\,, \\ \text{strettamente decrescente su }]-2, -1[\,, \\ \text{strettamente decrescente su }]-1, 0[\,, \\ \text{strettamente crescente su }]0, +\infty[\,. \end{cases}$$

Ne deduciamo che la funzione assume un massimo locale valore quando $x = -2$, valore che sarà precisamente $f(-2) = -4$. Inoltre, essa assume un minimo locale valore quando $x = 0$, valore che sarà precisamente $f(0) = 0$.

Cosa succede quando x si avvicina a -1 da destra? Il numeratore x^2 si avvicina a $(-1)^2 = 1$, mentre il denominatore diventa estremamante piccolo, pur restando positivo. Allora $f(x)$ diventerà estremamente grande, e positiva.

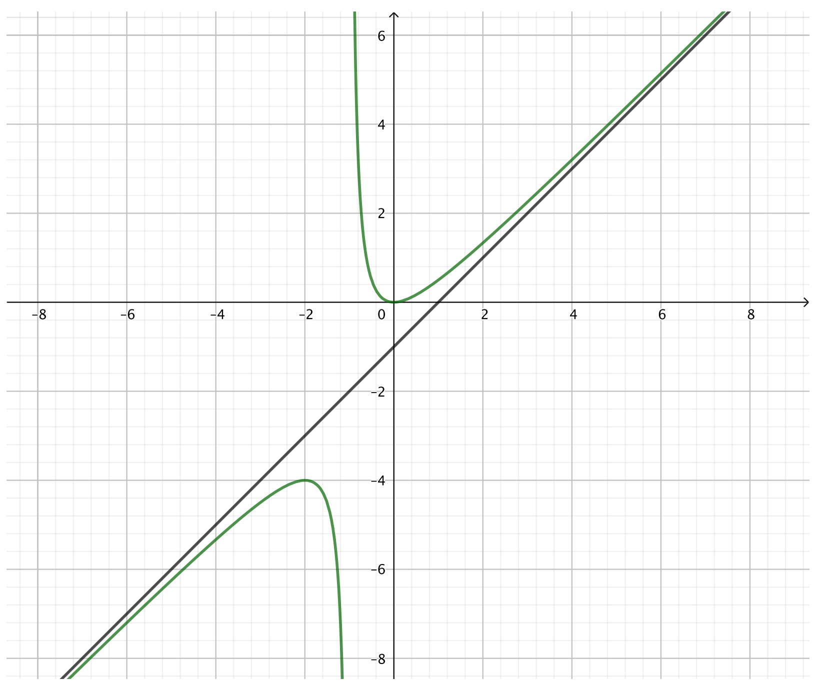
Se invece x si avvicina a -1 da sinistra, il discorso precedente si può rifare, con la differenza che il denominatore sarà negativo, per cui i valori $f(x)$ diventeranno estremamente grandi, ma negativi.

Un'ultima considerazione. Scriviamo

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} = \frac{(x^2-1)+1}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = (x-1) + \frac{1}{x+1}\,.$$

In questo modo si vede che, al crescere di x verso $+\infty$, i valori $f(x)$ si avvicinano sempre di più a $x-1$; in altri termini, il grafico di f tende ad avvicinarsi sempre più alla retta di equazione $y = x - 1$. La stessa cosa avviene se facciamo andare x verso $-\infty$.

Possiamo ora disegnare con buona approssimazione il grafico di f (in nero, la retta $y = x - 1$).



21 Uso della derivata seconda

Osservando il grafico precedente, vediamo che esso è costituito da due parti distinte. La caratteristica della prima parte, quella corrispondente all'intervallo $]-\infty,-1[$, è che immaginando di percorrerla nel verso crescente delle x, essa curva verso destra. Al contrario la seconda parte, corrispondente all'intervallo $]-1,+\infty[$, la sua caratteristica è che essa curva verso sinistra. Volendo essere più precisi, per la prima parte, man mano che x aumenta la pendenza del grafico, ossia $f'(x)$, diminuisce. Per la seconda parte, essa aumenta. Vediamo come si può formalizzare queste proprietà per una funzione generica.

Sia U un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, dominio della funzione $f : U \to \mathbb{R}$. Consideriamo un intervallo I contenuto in U. Diremo che la funzione è:
- *convessa* su I se la sua derivata f' è crescente su I ;
- *strettamente convessa* su I se la sua derivata f' è strettamente crescente su I ;
- *concava* su I se la sua derivata f' è decrescente su I ;
- *strettamente concava* su I se la sua derivata f' è strettamente decrescente su I .

Per vedere quando f' cresce o decresce, possiamo fare uso della sua derivata $(f')'$, ossia della derivata seconda di f. Abbiamo quindi il seguente risultato.

Teorema. *Sia I un intervallo contenuto in U. Allora:*
- se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$, allora f è convessa su I ;
- se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è strettamente convessa su I ;
- se $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in I$, allora f è concava su I ;
- se $f''(x) < 0$ per ogni $x \in I$, allora f è strettamente concava su I .

Per quanto riguarda ad esempio la funzione $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ dell'esempio 10), abbiamo trovato che $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$. Calcoliamone la derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2)(x+1) - 2(x^2+2x)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}\,. \end{aligned}$$

Vediamo quindi che

$$f''(x) \begin{cases} < 0\,, & \text{se } x < -1\,, \\ > 0\,, & \text{se } x > -1\,, \end{cases}$$

e pertanto

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente concava su }]-\infty, -1[\,, \\ \text{strettamente convessa su }]-1, +\infty[\,. \end{cases}$$

Queste proprietà si possono visualizzare nel grafico.

Analizziamo a titolo di esempio alcune funzioni introdotte in precedenza.

Esempi. 1) Sia $f(x) = e^x$. Essendo $f'(x) = e^x$, abbiamo che

$$f''(x) = e^x > 0\,, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$

Pertanto, la funzione esponenziale exp è strettamente convessa su tutto $\mathbb{R}$.

2) Sia $f(x) = \ln x$. Essendo $f'(x) = \frac{1}{x}$, abbiamo

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0\,, \qquad \text{per ogni } x \in]0, +\infty[\,.$$

Pertanto, la funzione logaritmo ln è strettamente concava su $]0, +\infty[$.

3) Sia $f(x) = \cos x$. Sappiamo che $f'(x) = -\sin x$, per cui

$$f''(x) = -\cos x \begin{cases} < 0\,, & \text{se } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\,, \\ > 0\,, & \text{se } x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\,. \end{cases}$$

Pertanto,

$$\cos \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente concava su } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\,, \\ \text{strettamente convessa su } \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\,. \end{cases}$$

I punti in cui si passa da convessa a concava, o viceversa, si chiamano punti di flesso. In questo caso, i punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$ sono di flesso, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Analoghe considerazioni si possono fare per la funzione sin.

Torniamo ora alla funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}\,,$$

studiata in precedenza, al punto 9). Abbiamo visto che

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}\,.$$

Se calcoliamo la derivata seconda, otteniamo

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-2x)(x^2+1)^2 - (1-x^2)[2(x^2+1)](2x)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{(-2x)(x^2+1) - (1-x^2)4x}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\,. \end{aligned}$$

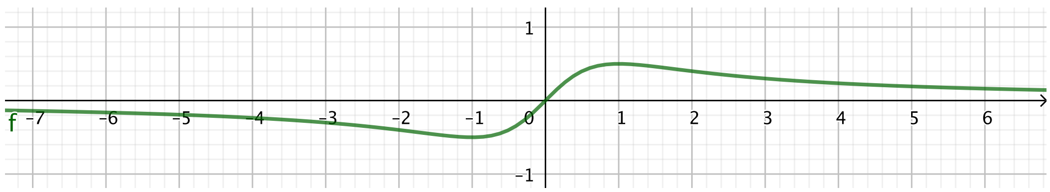
Studiandone il segno, vediamo che

$$f''(x) \begin{cases} < 0\,, & \text{se } x < -\sqrt{3}\,, \\ > 0\,, & \text{se } x \in]-\sqrt{3}, -1[\,, \\ < 0\,, & \text{se } x \in]-1, \sqrt{3}[\,, \\ > 0\,, & \text{se } x > \sqrt{3}\,. \end{cases}$$

Pertanto,

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente concava su }]-\infty, -\sqrt{3}[\,, \\ \text{strettamente convessa su }]-\sqrt{3}, 0[\,, \\ \text{strettamente concava su }]0, \sqrt{3}[\,, \\ \text{strettamente convessa su }]\sqrt{3}, +\infty[\,. \end{cases}$$

Queste proprietà si possono visualizzare nel grafico, che qui riproponiamo.



22 Alcuni esercizi

1) *Studiare la funzione*

$$f(x) = e^x(1-x)\,.$$

Essa è definita su tutto $\mathbb{R}$. Studiamone il segno:

$$f(x) \begin{cases} > 0\,, & \text{se } x < 1\,, \\ < 0\,, & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

Scriviamo la derivata e il suo segno:

$$f'(x) = -xe^x \begin{cases} > 0\,, & \text{se } x < 0,\,, \\ < 0\,, & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

Quindi

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente decrescente su }]-\infty, 0[\,, \\ \text{strettamente crescente su }]0, +\infty[\,. \end{cases}$$

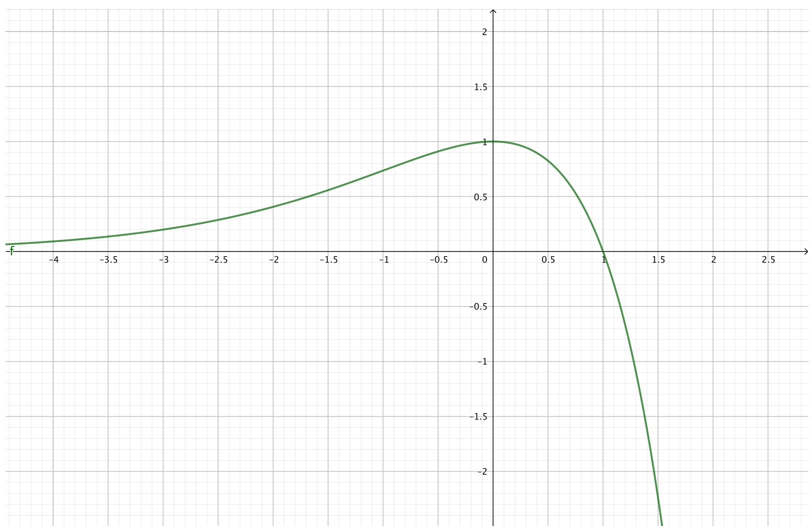
Essa assume quindi il suo massimo quando $x = 0$, con valore $f(0) = 1$. Scriviamo la derivata seconda e il suo segno:

$$f''(x) = -(x+1)e^x \begin{cases} > 0\,, & \text{se } x < -1\,, \\ < 0\,, & \text{se } x > -1\,. \end{cases}$$

Quindi

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente convessa su }]-\infty, -1[\,, \\ \text{strettamente concava su }]-1, +\infty[\,. \end{cases}$$

Possiamo disegnarne il grafico:



2) *Trovare il massimo valore che può assumere l'espressione* $\ln x - x$.

Si tratta di trovare il massimo della funzione $f(x) = \ln x - x$, definita su $]0, +\infty[$. A tal scopo, studiamo il segno della sua derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \begin{cases} > 0\,, & \text{se } x < 1\,, \\ < 0\,, & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

Abbiamo quindi che

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente crescente su }]0,1[\,, \\ \text{strettamente decrescente su }]1,+\infty[\,. \end{cases}$$

Il massimo di $f(x)$ si ottiene pertanto per $x = 1$, e il suo valore è

$$f(1) = \ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1\,.$$

3) *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}\,.$$

Essa è definita solo se $x \neq \pm 2$. Notiamo subito che è una funzione dispari. Basterà quindi studiarla per $x \geq 0$, in quanto il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Studiamone il segno:

$$f(x) \begin{cases} < 0\,, & \text{se } x \in]0,2[\,, \\ > 0\,, & \text{se } x > 2\,. \end{cases}$$

Abbiamo inoltre che

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} \begin{cases} < 0\,, & \text{se } x \in \,]0, 2\sqrt{3}[\,, \\ > 0\,, & \text{se } x > 2\sqrt{3}\,. \end{cases}$$

Quindi

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente decrescente su }]0,2[\,\cup\,]2\sqrt{3}[\,, \\ \text{strettamente crescente su }]2\sqrt{3}, +\infty[\,. \end{cases}$$

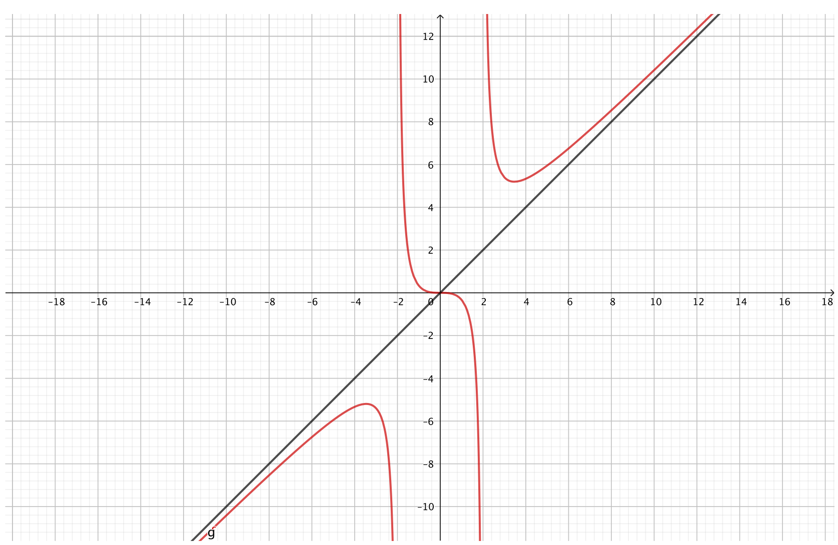
Si noti che $f'(0) = 0$. Inoltre,

$$f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} \begin{cases} < 0\,, & \text{se } x \in \,]0, 2[\,, \\ > 0\,, & \text{se } x > 2\,. \end{cases}$$

Quindi

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente concava su }]0,2[\,, \\ \text{strettamente convessa su }]2, +\infty[\,. \end{cases}$$

Infine, osserviamo che al crescere di x verso $+\infty$, il denominatore x^2-4 non sarà molto diverso da x^2, per cui $f(x)$ dovrebbe avere un valore vicino a $\frac{x^3}{x^2} = x$. Questo ci fa pensare che la retta $y = x$ possa essere un asintoto. In effetti, così è, come si vede dal grafico qui riportato (in nero, la retta $y = x$).



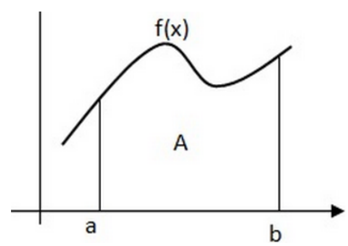
23 L'integrale

In questa parte del corso considereremo sempre funzioni definite su un intervallo chiuso e limitato. Sia dunque $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una tale funzione. Vogliamo definire, seppur in maniera intuitiva, quello che chiameremo l'*integrale* di f. Per far ciò, consideriamo dapprima alcuni casi particolari.

<u>I caso</u>: $f \geq 0$. Supponiamo qui che sia $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$. L'integrale di f in questo caso, è il valore dell'area della regione

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b\, ,\ 0 \leq y \leq f(x)\}\, ,$$

che si trova tra il grafico di f e l'asse orizzontale (vedi figura).



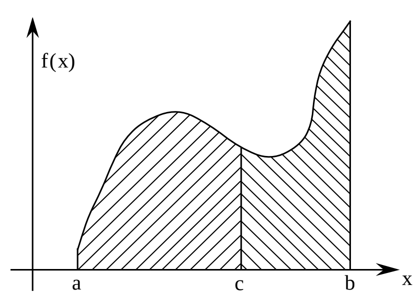
Esso si denota con uno dei seguenti simboli:

$$\int_a^b f\, , \qquad \int_a^b f(x)\, dx\, .$$

La presenza della lettera x nella notazione qui introdotta non ha importanza in sè. Essa potrebbe essere rimpiazzata da una qualunque altra lettera t, u, v, α, β, ecc., purché essa non abbia già un altro significato.

Possiamo già visualizzare la cosiddetta "proprietà di additività" dell'integrale: se $a < b < c$, si ha che

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\, .$$



Si pone inoltre, per convenzione,

$$\int_b^a f = -\int_a^b f\,, \qquad \int_a^a f = 0\,.$$

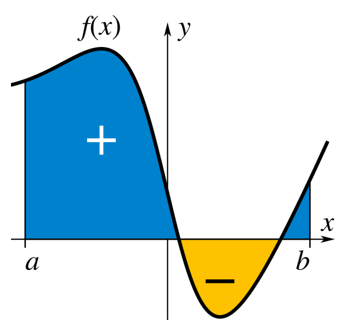
In questo modo, la formula di additività risulterà valida per ogni scelta di a, b, c, anche se non ordinati come in precedenza (verificare per credere).

<u>II caso</u>: $f \leq 0$. Supponiamo qui che sia $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Definendo la funzione $g(x) = -f(x)$, si ha che $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, per cui la funzione g si trova nella situazione del I caso trattato sopra. Definiremo allora

$$\int_a^b f = -\int_a^b g\,.$$

Quindi l'integrale della f è negativo, in questo caso. Possiamo visualizzarlo stavolta come il valore dell'area della regione che si trova tra il grafico di f e l'asse orizzontale, ma cambiato di segno.

<u>III caso</u>: f cambia segno. In questo caso, nel dominio $[a, b]$ ci saranno degli intervalli su cui f è positiva e degli altri intervalli su cui essa è negativa. Useremo la formula di additività per definire l'integrale come somma algebrica dei valori delle aree comprese tra il grafico di f e l'asse orizzontale, presi con il segno $+$ se la funzione è positiva su quell'intervallo e con il segno $-$ se è ivi negativa. Ad esempio, se per un certo $c \in]a, b[$ si ha che $f \geq 0$ su $[a, c]$ e $f \leq 0$ su $[c, b]$, l'integrale $\int_a^b f$ sarà uguale alla somma di $\int_a^c f$, che è un numero positivo, e di $\int_c^b f$, che è negativo. Nella figura seguente ci sono due intervalli su cui f è positiva e uno su cui è negativa.



Esempi. 1. Se una funzione è costante, ossia $f(x) = C$ per ogni x, allora l'integrale risulta essere il valore dell'area di un rettangolo con segno positivo se $C > 0$, con segno negativo se $C < 0$. Ricordando che l'area di un rettangolo si ottiene come "base $\times$ altezza", essendo "base $= b - a$" e "altezza $=|C|$", possiamo quindi scrivere

$$\int_a^b f = (b - a)C\,.$$

2. Siano ora $a < b$ entrambi positivi e $f(x) = x$. Usando la formula di additività, possiamo scrivere

$$\int_a^b f = \int_0^b f - \int_0^a f\,.$$

Ora si vede che $\int_0^b f$ è l'area di un triangolo di "base $= b$" e "altezza $= b$", per cui, ricordando che l'area di un triangolo si ottiene come "base $\times$ altezza : 2", abbiamo che $\int_0^b f = \frac{b\times b}{2}$, mentre $\int_0^a f$ è l'area di un triangolo di "base $= a$" e "altezza $= a$", per cui $\int_0^a f = \frac{a\times a}{2}$. In conclusione, possiamo scrivere

$$\int_a^b f = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

24 Il Teorema Fondamentale

Come sopra, abbiamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di cui vorremmo calcolare l'integrale. Consideriamo la cosiddetta "funzione integrale" $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$G(x) = \int_a^x f\,.$$

Possiamo anche scrivere

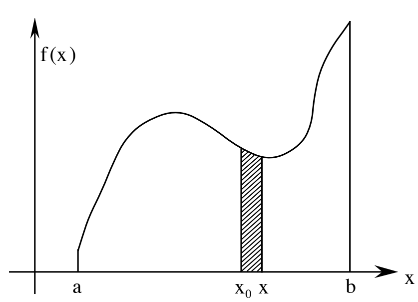
$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

avendo l'accortezza di usare una lettera diversa da x (in questo caso t), in quanto la x è già in uso. Fissiamo un punto $x_0 \in]a, b[$ e calcoliamo la derivata di G in x_0, ossia

$$G'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Usando la formula di additività, abbiamo che

$$G(x) - G(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt\,.$$



Supponiamo dapprima che f sia costante nelle vicinanze di x_0, ossia $f(x) = C$, con $C = f(x_0)$. Ricordando che $\int_{x_0}^{x} C\,dt = (x - x_0)C = (x - x_0)f(x_0)$, abbiamo che

$$\frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)\,.$$

Possiamo ora ragionare così: supponendo che la funzione f non faccia cose strane nelle vicinanze di x_0 (tipo salti improvvisi o bruschi cambiamenti), se x è molto vicino a x_0, allora per ogni t nell'intervallo $[x_0, x]$ il valore $f(t)$ sarà molto vicino a $f(x_0)$. In altri termini, f è "quasi costante" in $[x_0, x]$, con valori "quasi uguali a" $f(x_0)$. Ma allora, se x è molto vicino a x_0, il rapporto incrementale $\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0}$ sarà molto vicino a quello calcolato sopra, ossia $f(x_0)$. Si ha in effetti che

$$G'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)\,.$$

Questo inaspettato legame tra la derivata e l'integrale ci fornirà un metodo molto utile per il calcolo di $\int_a^b f$.

Innanzitutto chiameremo "primitiva" della funzione f una funzione F tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni x. Da quanto visto sopra, la funzione integrale G è una primitiva di f. Ce ne sono altre? Sicuramente sì, basta aggiungerci una qualsiasi costante, e la derivata non cambia.

Supponiamo ora che F_1 e F_2 siano due primitive della stessa funzione f. Allora $F_1'(x) = f(x)$ e $F_2'(x) = f(x)$ per ogni x, da cui

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0\,, \quad \text{per ogni } x\,.$$

Avendo derivata ovunque nulla, la funzione $F_1 - F_2$ deve essere costante. Queste considerazioni ci fanno capire che, se F è una particolare primitiva di f, tutte le altre si ottengono da F aggiungendole una costante.

Possiamo ora enunciare il Teorema Fondamentale del calcolo differenziale e integrale.

Teorema. *Se F è una qualsiasi primitiva di f, allora*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Sia G la funzione integrale e F una qualsiasi altra primitiva di f. Allora $F(x) = G(x) + c$, per una qualche costante $c \in \mathbb{R}$, per cui

$$F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = G(b) - G(a) = \int_a^b f - \int_a^a f = \int_a^b f\,,$$

che è proprio quanto volevasi dimostrare. ∎

Ecco che diventa importante, data f, trovarne una primitiva. Il compito non è sempre facile, ma per molte funzioni la cosa è fattibile.

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x) = x^n$. È facile vedere che $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ne è una primitiva. Il teorema fondamentale ci assicura quindi che

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \,.$$

In particolare, se $n = 1$ ritroviamo il risultato dell'esempio 2. presentato prima.

Possiamo riprendere la tabella delle derivate e ricavarne una tabella di primitive. Eccone alcune:

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

$f(x)$	$F(x)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\cosh^{-1} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\sinh^{-1} x$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\tanh^{-1} x$

Si verifica inoltre che, se $f(x) = \dfrac{1}{x}$, una primitiva sarà

$$F(x) = \begin{cases} \ln x \,, & \text{se } x \in]0, +\infty[\,, \\ \ln(-x) \,, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\,. \end{cases}$$

Per brevità, si può scrivere $F(x) = \ln |x|$.

Le formule scritte sopra vanno considerate sugli opportuni intervalli di definizione.

25 Esempi

Esempio 1. Vogliamo calcolare l'integrale

$$\int_0^\pi \sin x \, dx \,.$$

Una primitiva di $\sin x$ è $-\cos x$. Pertanto, usando il Teorema Fondamentale, troviamo:

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2\,.$$

Esempio 2. Calcoliamo ora

$$\int_1^e \frac{1}{x}\, dx\,.$$

Una primitiva di $\frac{1}{x}$ è $\ln |x|$. Siccome l'intervallo $[1, e]$ su cui vogliamo fare l'integrale è tutto costituito da numeri positivi, usando il Teorema Fondamentale abbiamo che

$$\int_1^e \frac{1}{x}\, dx = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1\,.$$

Ricordiamoci ora delle formule di derivazione di una somma,

$$(F \pm G)'(x) = F'(x) \pm G'(x)\,,$$

e del prodotto per una costante,

$$(cF)'(x) = cF'(x)\,.$$

Possiamo dedurne le analoghe per il calcolo delle primitive: la primitiva di una somma (o di una differenza) sarà la somma (o la differenza) delle rispettive primitive, e la primitiva del prodotto per una costante sarà la primitiva della funzione moltiplicata per la costante.

Usando queste formule, non sarà difficile integrare una funzione polinomiale.

Esempio 3. Vogliamo calcolare

$$\int_2^3 (5x^2 - 7x + 9)\, dx\,.$$

Ricordiamo che

- una primitiva di x^2 è $\frac{x^3}{3}$, quindi una primitiva di $5x^2$ è $5\frac{x^3}{3}$;
- una primitiva di x è $\frac{x^2}{2}$, quindi una primitiva di $7x$ è $7\frac{x^2}{2}$;
- una primitiva di 9 è $9x$.

Mettendo assieme, abbiamo che una primitiva di $5x^2 - 7x + 9$ è $5\frac{x^3}{3} - 7\frac{x^2}{2} + 9x$. Usiamo il Teorema Fondamentale:

$$\int_2^3 (5x^2 - 7x + 9)\, dx = \Big(5 \cdot \frac{3^3}{3} - 7 \cdot \frac{3^2}{2} + 9 \cdot 3\Big) - \Big(5 \cdot \frac{2^3}{3} - 7 \cdot \frac{2^2}{2} + 9 \cdot 2\Big) = \frac{139}{6} \approx 23,16\,.$$

26 La ricerca delle primitive

Il Teorema Fondamentale ci dice che, se F è una primitiva di f, allora

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \,.$$

Diventa pertanto importante riuscire a trovare l'insieme delle primitive di una funzione f. Questo problema non è affatto semplice, in generale. Anzi, tanvolta è proprio impossibile esprimere la primitiva di una funzione facendo uso solamente delle funzioni elementari finora introdotte.

Indicheremo l'insieme delle primitive della funzione $f(x)$ con uno dei seguenti simboli:

$$\int f \,, \qquad \int f(x)\, dx \,.$$

Bisogna stare molto attenti a non confondere il simbolo $\int f$ con l'integrale $\int_a^b f$! Mentre il primo denota un insieme di funzioni, il secondo denota semplicemente un numero reale. Come sappiamo, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora tutte le altre primitive si ottengono aggiungendo a $F(x)$ una costante c qualsiasi. Scriveremo pertanto

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \,, \quad c \in \mathbb{R} \,.$$

Ad esempio, riguardando la tabella delle primitive,

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \,, \quad c \in \mathbb{R} \,, \qquad \int e^x \, dx = e^x + c \,, \quad c \in \mathbb{R} \,,$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \,, \quad c \in \mathbb{R} \,, \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + c \,, \quad c \in \mathbb{R} \,,$$

eccetera. Si può verificare inotre che

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c \,, \quad c \in \mathbb{R} \,, \qquad \int \tan x \, dx = -\ln(|\cos x|) + c \,, \quad c \in \mathbb{R} \,,$$

sugli opportuni intervalli di definizione. Spesso nel seguito il "$c \in \mathbb{R}$" sarà sottinteso.

Vorrei ora fare un'osservazione interessante sull'integrale

$$\int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx \,.$$

Se $a = 1$ e $b > 1$, esso vale $F(b) - F(1)$, dove $F(x) = -\frac{1}{x}$ è una primitiva di $f(x) = \frac{1}{x^2}$, quindi

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} \, dx = 1 - \frac{1}{b} \,.$$

È interessante notare che questo numero è sempre minore di 1, e si avvicina a questo valore se b diventa via via più grande: ad esempio,

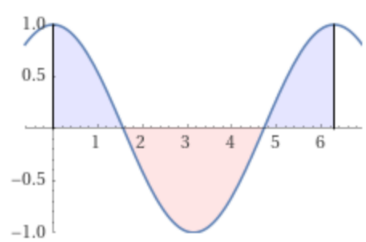
$$\begin{aligned}
&\int_1^{1000} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{1000} = 0,999\,,\\
&\int_1^{1000000} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{1000000} = 0,999999\,,\\
&\int_1^{1000000000} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{1000000000} = 0,999999999\,,\\
&\quad\dots
\end{aligned}$$

Possiamo riassumere questa situazione scrivendo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1\,.$$

27 Alcuni esercizi

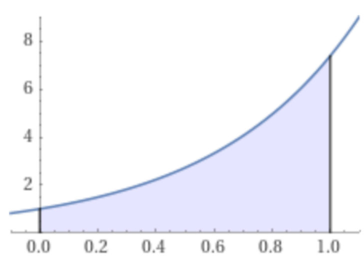
1) Calcolare $\int_0^{2\pi} \cos x\,dx$.



Osserviamo che una primitiva di $f(x) = \cos x$ è $F(x) = \sin x$. Pertanto,

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = F(2\pi) - F(0) = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0\,.$$

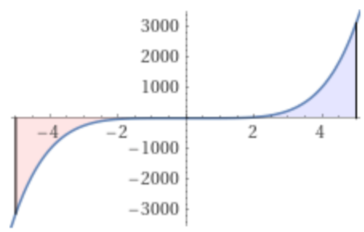
2) Calcolare $\int_0^1 e^{2x}\,dx$.



Siccome la derivata di $\widehat{F}(x) = e^{2x}$ è $\widehat{F}'(x) = 2e^{2x}$, si ha che una primitiva di $f(x) = e^{2x}$ è $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. Pertanto,

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}e^{2\cdot 1} - \frac{1}{2}e^{2\cdot 0} = \frac{e^2 - 1}{2}\,.$$

3) Calcolare $\int_{-5}^{5} x^7\,dx$.



Osserviamo che una primitiva di $f(x) = x^7$ è $F(x) = \frac{x^8}{8}$. Pertanto,

$$\int_{-5}^{5} x^7\,dx = F(5) - F(-5) = \frac{5^8}{8} - \frac{(-5)^8}{8} = 0\,.$$

Questo risultato si spiega osservando che f è una funzione *dispari*:

$$f(-x) = -f(x)\,, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$

Ne segue che

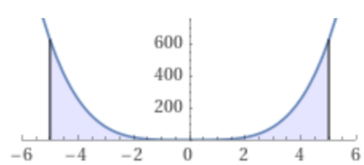
$$\int_{-5}^{0} x^7\,dx = -\int_0^5 x^7\,dx$$

(il primo integrale è negativo, il secondo positivo). Quindi, essendo

$$\int_{-5}^{5} x^7\,dx = \int_{-5}^{0} x^7\,dx + \int_0^5 x^7\,dx\,,$$

si trova che questa somma vale 0.

4) Questo non succede per $\int_{-5}^{5} x^6\,dx$.



Infatti, la funzione $f(x) = x^6$ è *pari*:

$$f(-x) = -f(x)\,, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$

Ne segue che

$$\int_{-5}^{0} x^6\,dx = \int_{0}^{5} x^6\,dx$$

(qui entrambi gli integrali sono positivi). Quindi, essendo

$$\int_{-5}^{5} x^6\,dx = \int_{-5}^{0} x^6\,dx + \int_{0}^{5} x^6\,dx = 2\int_{0}^{5} x^6\,dx\,.$$

Osserviamo che una primitiva di $f(x) = x^6$ è $F(x) = \frac{x^7}{7}$. Pertanto,

$$\int_{0}^{5} x^6\,dx = F(5) - F(0) = \frac{5^7}{7} - \frac{0^7}{7} = \frac{5^7}{7} = \frac{78125}{7}\,,$$

e concludiamo che

$$\int_{-5}^{5} x^6\,dx = 2\frac{78125}{7} = \frac{156250}{7} \approx 22321,4\,.$$

Naturalmente, si giunge allo stesso risultato scrivendo

$$\int_{-5}^{5} x^6\,dx = F(5) - F(-5) = \frac{5^7}{7} - \frac{(-5)^7}{7} = \frac{78125}{7} - \Big(-\frac{78125}{7}\Big) = \frac{156250}{7} \approx 22321,4\,.$$

5) Calcolare $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \Big(\cos(2x) + 3x^2 - \frac{1}{x^3}\Big)\,dx.$

Si tratta di calcolare separatamente i tre integrali

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos(2x)\,dx\,, \qquad \int_{\pi}^{2\pi} 3x^2\,dx\,, \qquad \int_{\pi}^{2\pi} \Big(-\frac{1}{x^3}\Big)\,dx\,,$$

e poi sommarli.

Il primo: le primitive di $\cos(2x)$ sono

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + c\,,$$

per cui

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(4\pi) - \frac{1}{2}\sin(2\pi) = \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 0\,.$$

Il secondo: le primitive di $3x^2$ sono

$$\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = 3\,\frac{x^3}{3} + c = x^3 + c\,,$$

per cui

$$\int_{\pi}^{2\pi} 3x^2\,dx = (2\pi)^3 - \pi^3 = 7\pi^3.$$

Il terzo: le primitive di $-\dfrac{1}{x^3}$ sono

$$\int \Big(-\frac{1}{x^3}\Big)\,dx = -\int \frac{1}{x^3}\,dx = -\int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{x^{-2}}{2} + c = -\frac{1}{2x^2} + c\,,$$

per cui

$$\int_{\pi}^{2\pi} \Big(-\frac{1}{x^3}\Big)\,dx = -\frac{1}{2(2\pi)^2} - \Big(-\frac{1}{2\pi^2}\Big) = \frac{3}{8\pi^2}\,.$$

In conclusione,

$$\int_{\pi}^{2\pi} \Big(\cos(2x) + 3x^2 - \frac{1}{x^3}\Big)\,dx = 0 + 7\pi^3 + \frac{3}{8\pi^2} \approx 217{,}08\,.$$

Altri esercizi

Calcolare i seguenti integrali:

a. $\displaystyle\int_{-3}^{2} |x^3|dx\,,$

b. $\displaystyle\int_{-4}^{2} |x|dx\,,$

c. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2-x}{2+x}dx\,,$

d. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(\frac{x}{4})dx\,,$

e. $\displaystyle\int_{-3\pi}^{3\pi} \sin(-x)dx\,,$

f. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \tan(-2x)dx\,,$

g. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} |\sin(4x)|dx\,,$

h. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1-2x}{1+x^2}dx\,,$

i. $$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+x^2}dx\,,$$

j. $$\int_0^1 \frac{-3}{(2+x)^2}dx\,,$$

k. $$\int_0^1 \frac{3+x}{1+x}dx\,,$$

l. $$\int_0^1 \frac{2x+1}{1+x}dx\,.$$