Esercizi V settimana *Ist. Matematiche A (Scienze Geologiche) – Prof. Fabio Vlacci*
A.A. 2024/2025

1. Mostrare, usando la definizione, che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l_a \in \mathbb{R} \iff \lim_{n\to+\infty}(a_n - l_a) = 0.$$
2. Mostrare che $b_n := \binom{2n}{n} < 2^{2n-2} = 4^{n-1}$ per $n \geq 5$.
Trovare la media aritmetica dei valori $\{b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$. Stabilire quindi se esiste il
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 5^n}$$
e, in caso affermativo, calcolarlo.
3. Mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il numero $c_n = n(n^2+5)$ è un multiplo di 6. Si calcoli, qualora esista, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{6c_n}$.
[Esercizio proposto nel preappello dicembre 2021]
4. Si calcoli, se esistono,
$$a)\ \lim_{n\to+\infty}[\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}] \quad b)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} \quad c)\ \lim_{n\to+\infty} n \cdot \tan n$$
[a) esercizio proposto nel preappello dicembre 2021]
5. Si calcoli, se esistono,
$$a)\ \lim_{n\to+\infty}[1-\sin(1/n)]^n \quad b)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2^n}{n^2+(-3)^n}$$
[a) esercizio proposto nell'appello autunnale 2022]
6. In un riferimento cartesiano ortogonale, si consideri la circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio r e centro l'origine e sia $V_0 := (r, 0)$ un vertice del poligono regolare $\mathcal{P}_n$ di n lati inscritto in $\mathcal{C}$ (con $n \geq 3$).
Si scrivano le coordinate degli altri vertici $V_1,\ V_2, \ldots, V_{n-1}$ di $\mathcal{P}_n$ e si mostri che
1) la lunghezza di ogni lato l_n di $\mathcal{P}_n$ misura $2r\sin\frac{\pi}{n}$;
2) la distanza di ogni lato l_n di $\mathcal{P}_n$ dall'origine misura $r\cos\frac{\pi}{n}$.
Dette p_n e A_n le misure rispettivamente del perimetro e dell'area di $\mathcal{P}_n$, se ne richiede una scrittura esplicita.
Si calcolino infine, se esistono, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.
[Esercizio proposto nel preappello dicembre 2021]
7. Si trovi un esempio di successione di numeri reali a termini positivi, convergente a 2 ma non monotóna.
[Esercizio proposto nell'appello autunnale 2022]
8. Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali tali che
$i)\quad a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ii)\quad \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l_a > 0.$
Mostrare che esiste $n_0' \in \mathbb{N}$ tale che $b_n > 0$ se $n > n_0'$. Notare che quando $l_a \in \mathbb{R}$ non è possibile concludere che esista $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$: se $a_n = \frac{2n-1}{n}$ fornire un esempio di una successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che verifica $i)$ per la quale esiste $n_0' \in \mathbb{N}$ tale che $b_n > 0$ se $n > n_0'$ ma non esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.