Prodotti scalari & Forme bilineari

Def: (Prodotto scalare canonico o standard) su $\mathbb{R}^n$.

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(v\ ,\ w) \longmapsto \langle \cdot , \cdot \rangle (v, w) =: \langle v, w \rangle$$

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \qquad \langle v, w \rangle = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \dots + \lambda_n\mu_n = {}^t v \cdot w$$

Def: (Norma di un vettore v) $\underbrace{\|v\|}_{\text{la norma di } v} := \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

la norma di v
rappresenta la lunghezza
del vettore v

Oss: i). $\langle v_1 + v_2 , w \rangle = \langle v_1 , w \rangle + \langle v_2 , w \rangle$

ii). $\langle \lambda v , w \rangle = \lambda \langle v , w \rangle$

iii). $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

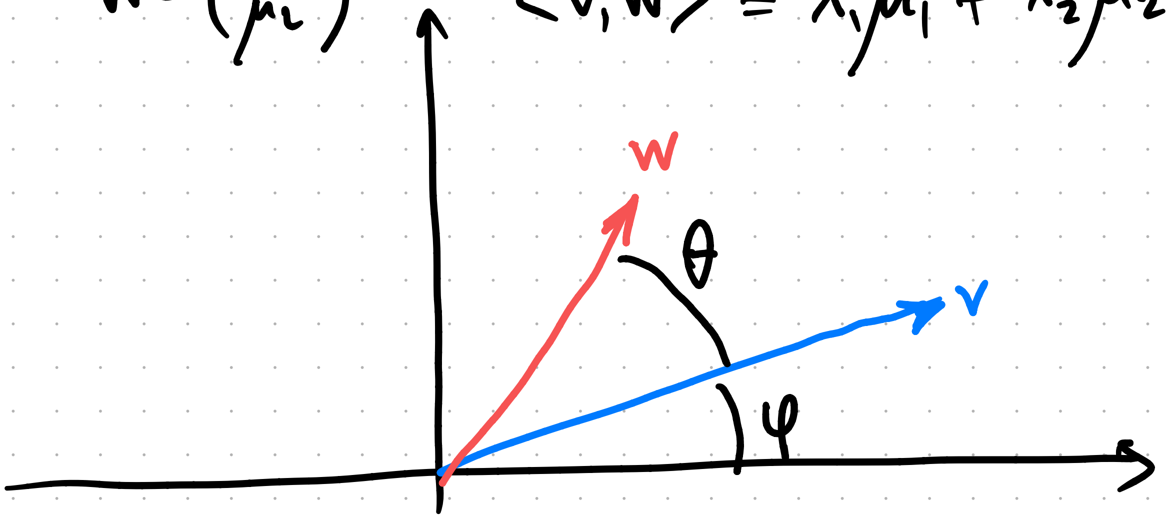
$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle$

$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$

iv). $\langle v, v \rangle \geq 0$ ed è $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$.

Esempio: $n=2$.

$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \langle v, w \rangle = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2$



$$\begin{cases} \lambda_1 = \|v\| \cos\varphi \\ \lambda_2 = \|v\| \sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_1 = \|w\| \cdot \cos(\theta + \varphi) = \|w\|(\cos\varphi \cdot \cos\theta - \sin\varphi \sin\theta) \\ \mu_2 = \|w\| \sin(\theta + \varphi) = \|w\|(\sin\varphi \cdot \cos\theta + \cos\varphi \cdot \sin\theta) \end{cases}$$

formule di sommazione per archi

Dividiamo per $\|w\|$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{\|w\|} \\ \frac{\mu_2}{\|w\|} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\det = 1 \neq 0} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\substack{\text{INVERSA} \\ \det = 1}} \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{\|w\|} \\ \frac{\mu_2}{\|w\|} \end{pmatrix} \underset{\substack{1 \\ \text{PASSAGGIO} \\ \text{EXTRA}}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2}{\|v\| \cdot \|w\|} \\ \frac{-\mu_1\lambda_2 + \mu_2\lambda_1}{\|v\| \cdot \|w\|} \end{pmatrix}$$

Allora: $\boxed{\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}}$

Def: (ANGOLO CONVESSO tra due vettori v e w) $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v, w \neq 0$.

è l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Questa def. non ci dà problemi perché $\underbrace{\cos(\cdot)\big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]}_{\text{è una biezione.}}$

D.: Come mai $\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$ sta tra -1 e 1?

Questo funziona per la DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARTZ

$$\boxed{|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|}$$

Che implica $-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1$ ✓.

Def: (FORMA BILINEARE g su V sp. v. su un campo K):

$$g : V \times V \longrightarrow K$$

tale che le seguenti proprietà siano soddisfatte:

$$g(v_1+v_2, w) = g(v_1, w) + g(v_2, w)$$
$$g(v, w_1+w_2) = g(v, w_1) + g(v, w_2)$$
$$g(\underset{\underset{K}{\cap}}{\lambda} v, w) = \lambda g(v, w) = g(v, \lambda w)$$

L'insieme delle forme bilineari si indica con $Bil(V)$.

g →

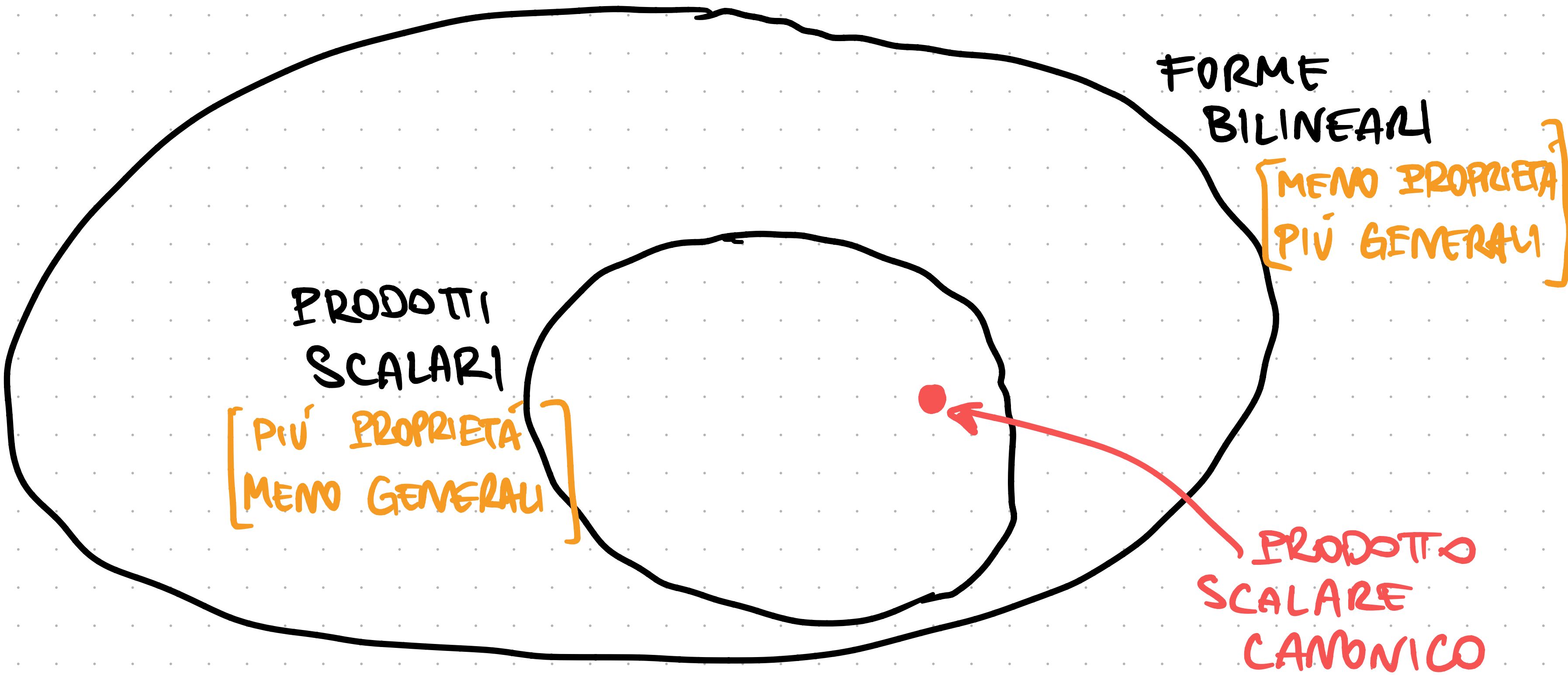
- SIMMETRICA: $g(v,w) = g(w,v)$
- ANTISIMMETRICA: $g(v,w) = -g(w,v)$
- né una né l'altra...

Def: Sia $K = \mathbb{R}$. Allora g è:

- SEMI-DEFINITA POSITIVA $\iff g(v,v) \geq 0$
- DEFINITA POSITIVA $\iff g(v,v) \geq 0$ & $g(v,v) = 0 \iff v = 0$

Def: analoga con negativa invece che positiva.

Def [PRODOTTO SCALARE]: Un prodotto scalare è una forma bilineare SIMMETRICA e DEFINITA POSITIVA.



Oss: $g: V \times V \to K$ forma bilineare, allora

$\forall v \in V$ FISSATO, abbiamo $g(v, \bullet): V \longrightarrow K$ lineare

$\forall w \in V$ FISSATO, " $g(\bullet, w): V \longrightarrow K$ " .

In particolare:
$g(v,0) = 0$, $g(0,w) = 0$.

Esempi:

1. $g: V \times V \to K$ sia simm. che antisimm.
$(v,w) \mapsto 0$ $\qquad g(w,v) = g(v,w) = -g(w,v) \Rightarrow 2g(w,v) = 0$.

Se $K = \mathbb{R} \Rightarrow$ è semi-def positiva, ma <u>non</u> def. pos.

2. $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$

$(v,w) \longmapsto \lambda_1\mu_1 + \lambda_1\mu_2 + 2\lambda_2\mu_1 + \lambda_2\mu_2 \boxed{\cancel{+\mu_2^2} + \cancel{\mu_1\mu_2}}$

Per esercizio: verificare che è una forma bilineare.

QUESTI TERMINI RENDEREBBERO LA FUNZIONE <u>NON</u> <u>BILINEARE</u>

É simmetrica? $v = \begin{pmatrix} 1 = \lambda_1 \\ 0 = \lambda_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 = \mu_1 \\ 1 = \mu_2 \end{pmatrix}$

$$g(v,w) = 1$$
$$g(w,v) = 2$$
$\neq \Rightarrow g$ non é simmetrica

$$g(w,v) = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 2$$

É una forme bilineare che non é simmetrica, e quindi à maggior ragione non é un prodotto scalare.

3. $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(v,w) \longmapsto \lambda_1 \mu_1$

É bilineare? SI
É simmetrica? SI
É semi-def positiva? SI
É def positiva?

$g(v,v)$

Controesempio: $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$. $g(v,v) = 0\cdot 0 = 0$ ma $v \neq 0$.
Quindi g é semi-def positiva ma non def positiva.

4. $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K) \Rightarrow g_A : K^n \times K^n \longrightarrow K$

$(v,w) \longmapsto \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i a_{ij} \mu_j}_{= {}^t\lambda \cdot A \cdot \mu}$

è una forme bilineare.

[da una matrice a una forma bilineare]

§1.1. FORME BILINEARI IN RELAZIONE ALLE LORO MATRICI

V sp. vett. su K, $\boxed{\dim_K(V)} < +\infty$ ($= n$), $\mathcal{B}$ base $= \{v_1, \dots, v_n\}$

$$\Phi : Bil(V) \longrightarrow M_n(K)$$

$$g \longmapsto M_{\mathcal{B}}(g) := \left(a_{ij} := g(v_i, v_j)\right)_{i,j}$$

$$= \begin{pmatrix} g(v_1,v_1) & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & g(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

[da una forma bilineare ad una matrice]

Esempi:

1. $\mathcal{B}$ = base canonica di $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot , \cdot \rangle = g$ prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & & \vdots \\ \vdots & & \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \cdots & \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

2. $A \in M_n(K) \Rightarrow g_A : K^n \times K^n \longrightarrow K \Rightarrow M_{\mathcal{B}}(g_A) = A$
($\mathcal{B}$ = canonica)

PROP Con le notazioni precedenti, si ha che:

$$g(v,w) = {}^t v \cdot M_{\mathcal{B}}(g) \cdot w = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \, g(e_i, e_j) \, \mu_j$$

Dim.:

$$g(v,w) = g\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i}_{=v}, \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j}_{=w}\Big)$$

(per proprietà delle forme bilineari)

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \cdot g(e_i, e_j) \cdot \mu_j$$

$$= {}^t v \cdot \underbrace{\big(g(e_i, e_j)\big)_{i,j}}_{= M_{\mathcal{B}}(g)} \cdot w \qquad \square$$

Q.: Qual'è la conclusione?

SPAZIO VETTORIALE

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathrm{Bil}(V) & \longrightarrow & M_n(K) \\ g & \longmapsto & M_{\mathcal{B}}(g) \\ g_A & \longleftarrow\!\!\shortmid & A \end{array}$$

Quindi Φ è un ISOMORFISMO DI SPAZI VETT. SU K.

PROP V, K, n, g come prima, $\mathcal{B}$ = base di V. $= \{v_1, \dots, v_n\}$

g SIMMETRICA $\iff M_{\mathcal{B}}(g)$ SIMMETRICA

Dim.: $\Rightarrow$) g simm. $\Rightarrow g(v_i, v_j) = g(v_j, v_i) = a_{ij}$ di $M_{\mathcal{B}}(g)$

$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(g)$ simmetrica.

$\Leftarrow$) $M_{\mathcal{B}}(g)$ simm $\Rightarrow \underset{\underset{g(v_i,v_j)}{\|}}{a_{ij}} = \underset{\underset{g(v_j,v_i)}{\|}}{a_{ji}} \Rightarrow g(v_i, v_j) = g(v_j, v_i)$

Allora $g(v, w) = g\left(\sum_i \lambda_i v_i, \sum_j \mu_j v_j\right) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \overbrace{g(v_i, v_j)}^{= g(v_j, v_i)}$

$= g(w, v)$ $\square$

PROP $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ due basi di V.

Allora $M_{\mathcal{C}}(g) = {}^t\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(Id_V)\right) \cdot M_{\mathcal{B}}(g) \cdot \underbrace{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(Id_V)}_{\text{matrice di cambio di base da } \mathcal{C} \text{ a } \mathcal{B}}$

Dim.: analoga a prima.

Def: $A, B \in M_n(K)$ sono **CONGRUENTI** $(B \equiv A)$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $B = {}^tC \cdot A \cdot C$ per una qualche matrice $C \in GL_n(K)$

Def: [**MATRICE ORTOGONALE**] $C \in GL_n(K)$ si dice ORTOGONALE (e quindi appartiene a $\underbrace{O_n(K)}_{\text{SPAZIO delle MATRICI ORTOGONALI}}$) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ${}^tC = C^{-1}$.

Oss: Se B è congruente ad A tramite una matrice ortogon. $\Rightarrow B$ è anche simile ad A.

$\hookrightarrow B = {}^tC \cdot A \cdot C, \quad C \in O_n(K)$

$= C^{-1} \cdot A \cdot C$

$\Rightarrow B \sim A$

SIMILE

Oss: La congruenza, come la similarità, è una relazione di equivalenza [basta usare ${}^tA\,{}^tB = {}^t(BA)$]

$\leadsto$ CI TORNERÀ UTILE PER IL TEOREMA SPETTRALE

TEOREMA (SERNESI, "Geometria 1", 83)

Sia $\dim_K(V)=n$, $g \in Bil(V)$ ed è SIMMETRICA.

Allora ESISTE una base $\mathcal{B}$ di V tale che la matrice che rappresenta g rispetto alla base $\mathcal{B}$ è DIAGONALE.

Equivalentemente, ogni matrice simmetrica $A \in M_n(K)$ è CONGRUENTE ad una matrice DIAGONALE.