Spazi Euclidei, ortogonalizzazione Gram-Schmidt

Def: Uno spazio Euclideo è una coppia $(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{spazio vettoriale} \\ \text{su } \mathbb{R}}}{V}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{un prodotto scalare} \\ \text{su } V}}{g})$

Def: Norma di $\underset{\substack{\cap \\ V}}{v}$ rispetto a g è $:= \sqrt{g(v,v)}$

$$\sqrt{g(v,v)} = \|v\|_g$$

Oss: Infatti se scegliamo $g(\cdot,\cdot) = \underbrace{\langle \cdot , \cdot \rangle}_{\substack{\text{prodotto scalare} \\ \text{standard} \\ \langle v,w \rangle := {}^t v \cdot w}} \Rightarrow \|v\|_g = \underbrace{\|v\|}_{\substack{\uparrow \\ \text{la solita} \\ \text{norma}}}$

Oss: (V, g) Euclideo

$$\begin{matrix} (V, & g) \\ \cup\!\!| & \\ (W, & \overbrace{g|_{W \times W}}^{\text{è ancora un prodotto scalare}}) \end{matrix}$$

$g: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$g|_{W \times W}: W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ PRODOTTO SCALARE INDOTTO da g su W

PROP (V, g) Euclideo, allora:

i). $\|v\|_g \geq 0$, $\|v\|_g = 0 \Longleftrightarrow v = 0$ $(\forall v \in V)$

ii). $\|\lambda v\|_g = |\lambda| \cdot \|v\|_g$ $(\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R})$

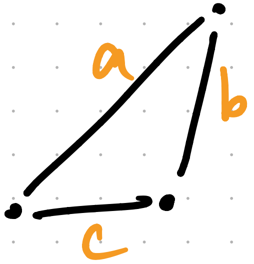
iii). $\|v + w\|_g^2 = \|v\|_g^2 + 2g(v, w) + \|w\|_g^2$ $(\forall v, w \in V)$

iv). DISUGUAGLIANZA di CAUCHY-SCHWARTZ:

$$|g(v, w)| \leq \|v\|_g \cdot \|w\|_g$$

v). DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE:

$$\|v + w\|_g \leq \|v\|_g + \|w\|_g$$



$[a \leq c + b]$

vi). $\big| \|v\|_g - \|w\|_g \big| \leq \|v + w\|_g$ $(\forall v, w \in V)$

Dim.: i)., ii). ovvie dalla def.

iii). $\|v+w\|_g^2 \overset{DEF}{=} g(v+w, v+w) \overset{BILIN.}{=} g(v,v)+g(v,w)+g(w,v)+g(w,w)$

$$\overset{SIMMETRIA}{=\!=\!=} g(v,v)+2g(v,w)+g(w,w) \quad \square$$

$(ax^2+bx+c=0)$

iv). Se $w=0 \Rightarrow g(v,0)=0$ e $\|v\|_g\cdot 0=0$ ✓

Se $w\neq 0$, da 1.-3. $\Rightarrow 0 \le \|v+tw\|_g^2 = \underbrace{\overbrace{\|v\|_g^2}^{c} + \overbrace{2tg(v,w)}^{b/2} + \overbrace{t^2\|w\|^2}^{a}}$ $\forall t\in\mathbb{R}$ [abbiamo riscalato $w\mapsto t\cdot w$]

QUADRATICA in t, i.e. POLINOMIO di grado $=2$.

$$\Rightarrow g(v,w)^2 - \|v\|_g^2\|w\|_g^2 \le 0 \Rightarrow |g(v,w)| \le \|v\|_g\|w\|_g$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{4\cdot a\cdot c}{4} \le 0$$

prendo la radice quadrata e aggiungo il valore assoluto.

v). $\|v+w\|_g^2 = g(v+w, v+w) = \|v\|_g^2 + 2g(v,w) + \|w\|_g^2 \le \|v\|_g^2 + 2|g(v,w)| + \|w\|_g^2$

$$\le \|v\|_g^2 + 2\|v\|_g\|w\|_g + \|w\|_g^2 = (\|v\|_g+\|w\|_g)^2 \Rightarrow \square$$

vi). Per esercizio.

Def: (V,g) Euclideo.

L'angolo convesso tra $\underset{\neq 0}{v}$ e $\underset{\neq 0}{w}$ è $\arccos\left(\frac{g(v,w)}{\|v\|_g \|w\|_g}\right) = \underset{[0,\pi]}{\underset{\in}{\theta}}$

$v \perp_g w$ [ORTOGONALI o PERPENDICOLARI] $\overset{def}{\Longleftrightarrow} g(v,w) = 0$

$\underset{\subseteq V}{S_1} \perp_g \underset{\subseteq V}{S_2} \Longleftrightarrow v \perp_g w \quad \forall v \in S_1, \forall v \in S_2.$

$(S \subseteq V, g)$ sottoinsieme. Allora $S^\perp := \{ w \in V \mid w \perp_g v, \forall v \in S \}$

← si chiama SPAZIO ORTOGONALE AD S

$S^\perp$ è un sottospazio vettoriale.

(V,g) Euclideo [$\dim(V) = n$]. Una base $\mathcal{B}$ ORTONORMALE di (V,g) è una base di V. $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. tale che:

1) ORTOGONALE: $v_i \perp_g v_j \quad \forall i,j \in \{1, \dots, n\} \quad i \neq j.$

2) NORMA UNO: $\|v_i\|_g = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Esempio: $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $\{e_1, \dots, e_n\} = \mathcal{B}$.

1) $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$

2) $\langle e_i, e_i \rangle = 1 \quad \forall i$

MEMO:
$\langle e_i, e_j \rangle = g(e_i, e_j)$
QUANDO g È IL
PRODOTTO SCALARE CANONICO

Quindi la base canonica è ORTONORMALE rispetto a $g =$ prodotto scalare canonico $= \langle \bullet, \bullet \rangle$.

Esempio: $\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{v_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{v_2}} \right\}$ base di $\mathbb{R}^2$, $g(\cdot,\cdot) := \langle \cdot, \cdot \rangle$.

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0.$$

Quindi la base $\mathcal{B}$ è ORTOGONALE. È ortonormale?

$\| v_1 \| = \sqrt{5}$

$\| v_2 \| = \sqrt{5}$

$$\longrightarrow \mathcal{B}' = \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_1'}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2'} \right\} \text{ ORTONORMALE.}$$

PROP | (V, g) Euclideo.

$v_1, \dots, v_k$ sono a due a due ORTOGONALI

$\Rightarrow v_1, \dots, v_k$ " lin. indipendenti.

Dim.: $\sum_{i=1}^{k} c_i v_i = 0$ per certi c_i

$$\Rightarrow \text{per ogni } i = 1, \dots, k \quad 0 = g\Big(v_i, \underbrace{\sum_{j=1}^{k} c_j v_j}_{=0}\Big) \overset{\text{PER BILIN.}}{=} \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \underbrace{g(v_i, v_j)}_{=0}$$

VERO perché $g(v_i, 0) = 0$.

PER IPOTESI DI ORTOGONALITÀ RISPETTO A g PER $j \neq i$.

$$= 0 + 0 + \dots + 0 + \underbrace{c_i \cdot g(v_i, v_i)} + 0 + \dots + 0$$

i-ESIMO TERMINE,
CHE È UGUALE A $c_i \cdot \underbrace{\|v_i\|_g^2}_{\neq 0}$ $\Longrightarrow c_i = 0 \quad \forall i$

perché $v_i \neq 0$, e g è un prodotto scalare e quindi definito positivo □

$\Longrightarrow$ i vettori sono linearmente indipendenti.

PROP | (V, g) Euclideo. $\mathcal{B}$ = base ORTONORMALE $= \{v_1, \dots, v_n\}$

Allora

$$\boxed{\begin{gathered} v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n v_n \\ \Longrightarrow \lambda_i = g(v, v_i) \end{gathered}}$$

Dim.:

$$g(v, v_i) = g(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i v_i + \dots + \lambda_n v_n, v_i)$$

$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$$= \lambda_1 \cdot \underbrace{g(v_1, v_i)}_{=0} + \lambda_2 \cdot \underbrace{g(v_2, v_i)}_{=0} + \dots + \lambda_i \underbrace{g(v_i, v_i)}_{=1} + \dots = \lambda_i$$

□

Esempio: $\mathcal{B}' = \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{v_1'}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}_{v_2'} \right\}, \; g(\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle.$

Obiettivo: calcolare la combinazione lineare che dà $v = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}'$

$$\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= \left\langle \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}, v_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\rangle = \\ &\downarrow \\ &= (-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 3\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} \\ &\downarrow \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[-2+6=4\right] = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right.$$

E allora $\lambda_2 = \left\langle \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}, v_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$

$$\downarrow$$

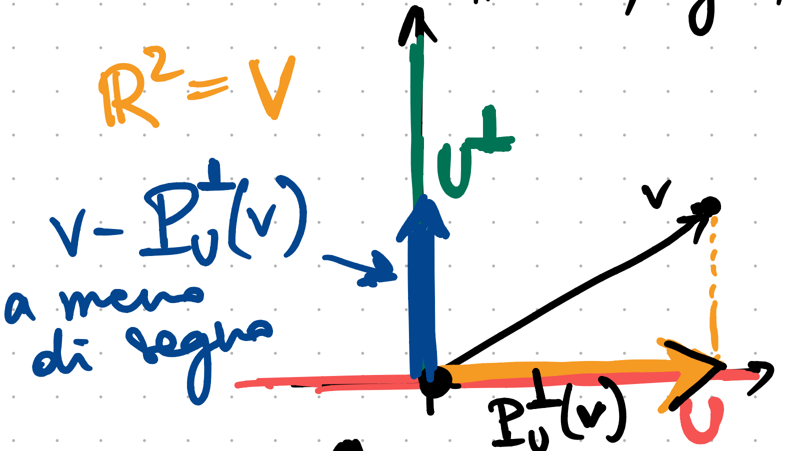
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(-2)\cdot 2 + 3\cdot(-1) = -7\right] = -\frac{7}{\sqrt{5}} \qquad \square$$

§ Proiezioni Ortogonali

$U \subseteq (V,g)$ sottospazio vettoriale Euclideo; $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_s\}$ BASE ORTONORM DI U

Definiamo $\underbrace{P_U^\perp(v)}_{\text{PROIEZIONE ORTOGONALE da } V \text{ a } U} := \sum_{i=1}^{s} g(v, v_i)\cdot v_i \quad \forall v \in V$

$\mathbb{R}^2 = V$, $g(\cdot,\cdot) = \langle \cdot,\cdot \rangle$, $\mathcal{B}_V = \{e_1, e_2\}$, $U = \text{Span}(e_1)$, $\mathcal{B} = \{e_1\}$



$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P_U^\perp(v) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, e_1 \right\rangle \cdot e_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oss: ⚠ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P_U^\perp \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in U^\perp$

PROP | Notazioni come sopra. Valgono:

① $v - P_U^\perp(v) \in U^\perp \quad \forall v \in V$

② $P_U^\perp(v) \in U$, non solo, ma è l'unico vettore di U tale che valga il punto ①.

③ $P_U^\perp$ non dipende dalla base ortonormale scelta

Dim: esercizio.

TEOREMA [GRAM-SCHMIDT].

(V, g) Euclideo. Siano $w_1, \dots, w_k \in V$ LIN. INDIP. Allora esiste una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $U := \text{Span}(w_1, \dots, w_k)$ che è ORTONORMALE rispetto al prodotto scalare g.
[DIMOSTRAZIONE È COSTRUTTIVA ⇝ ALGORITMO].

Dim.:

- Induzione su $k = \dim_{\mathbb{R}}(U)$.
  - Se $k=1 \Rightarrow v_1 := \dfrac{w_1}{\|w_2\|}$ ✓

    $U = \text{Span}(w_1) = \text{Span}(v_1)$
    MA ADESSO $\{v_1\}$
    È UNA BASE ORTONORMALE DI U.

  - Supponiamo che sia vero per ogni U di $\dim_{\mathbb{R}}(W) \leq k-1$, e vogliamo dimostrarlo per spazi U di $\dim = k$.

  - $\{\underline{w_1, \dots, w_{k-1}}, w_k\}$ $\longrightarrow$ $\text{Span}(w_1, \dots, w_{k-1})$ ha $\dim = k-1$, quindi per ipotesi induttiva esiste $\underbrace{\{v_1, \dots, v_{k-1}\}}_{\text{ORTONORMALE}}$ tale che $\mathrm{Span}(w_1, \dots w_{k-1}) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$,

Problema: ci manca v_k!

$$\tilde{w}_k := \sum_{j=1}^{k-1} g(w_k, v_j) v_j = P^{\perp}_{U}(w_k), \quad U = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$$

PER ① DELLA PROP SOPRA

$$0 \neq \tilde{v}_k := w_k - \tilde{w}_k \in U^{\perp}$$

PERCHÉ $\tilde{w}_k \in \mathrm{SPAN}(v_1, \dots, v_{k-1})$

Altrimenti, si può calcolare direttamente

$$g(\tilde{v}_k, v_i) \overset{\text{BILIN}}{=} g(w_k, v_i) - g(\tilde{w}_k, v_i)$$

$$= g(w_k, v_i) - g\big(g(w_k, v_1)v_1 + \dots + g(w_k, v_{k-1})v_{k-1}, v_i\big)$$

$$= g(w_k, v_i) - g(w_k, v_i) = 0$$

$\Rightarrow \tilde{v}_k$ è ortogonale ad ogni v_i per ogni $i=1,\dots,k$ (!)

Allora prendiamo infine $v_k := \dfrac{\tilde{v}_k}{\|\tilde{v}_k\|_g}$ HA NORMA $= 1$.

$\square$

Esempio:

$V \supseteq U := \text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4)$

$V = \mathbb{R}^5, \quad g(\cdot,\cdot) = \langle \cdot,\cdot \rangle$

$w_1 = (1,0,0,0,0)$

$w_2 = (1,0,1,0,0)$

$w_3 = (1,1,1,0,2)$

$w_4 = (2,1,0,2,3)$

Osserviamo che i w_i sono LINEARMENTE INDIP.

Seguiamo l'algoritmo di GRAM-SCHMIDT per trovare una base ORTONORMALE $\{v_1,\dots,v_4\}$ di U.

$$V_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = w_1$$ ✓

$$\tilde{V}_2 = w_2 - \underbrace{\langle w_2 , V_1 \rangle}_{=\langle w_2, w_1 \rangle} \cdot V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \frac{\tilde{V}_2}{\|\tilde{V}_2\|} = \tilde{V}_2$$

$$\tilde{V}_3 = w_3 - \langle w_3, V_2 \rangle V_2 - \langle w_3, V_1 \rangle V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow V_3 = \frac{\tilde{V}_3}{\sqrt{5}}$$

$$\tilde{v}_4 = w_4 - \langle w_4, v_3 \rangle v_3 - \langle w_4, v_2 \rangle v_2 - \langle w_4, v_1 \rangle v_1$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{7}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \underbrace{0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0} - 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1 = v_1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{7}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 0 \\ 2 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$v_4 = \frac{\tilde{v}_4}{\|\tilde{v}_4\|} = \frac{\tilde{v}_4}{\sqrt{\frac{21}{5}}}$$

$$\frac{4}{25} + \frac{1}{25} + \frac{100}{25}$$

$$= \frac{105}{25} = \frac{21}{5}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base ORTONORMALE di U!

COR Ogni spazio vettoriale Euclideo (V, g) ammette una base ORTONORMALE e la possiamo trovare tramite l'algoritmo di GRAM - SCHMIDT!