Esempio [ultimo esempio sul teorema spettrale]:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ simmetrica e quindi diagonalizzabile per il teorema spettrale.

- $P_A(t) \overset{\text{VERIFICARE}}{=} (2-t)(t^2-4t+3)+(t-3)2 = \dots = -t(t-3)^2$
- $Sp(A) = \{0,3\}$, $\begin{cases} m_a(0) = 1 = m_g(0) \\ m_a(3) = 2 = m_g(3) \end{cases}$ perché è diagonalizz.
- $V_0 = \ker(A - 0 \cdot I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{\text{VERIFICARE}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

  $V_3 = \ker(A - 3 \cdot I_3) = \left\{ \quad " \quad \begin{pmatrix} 2-3 & -1 & 1 \\ -1 & 2-3 & 1 \\ 1 & 1 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Procedimento di Gram-Schmidt:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \cancel{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$= 0$ senza fare il conto perché viene da un altro

$$v_3 = \frac{\text{RISULTATO}}{\|\text{RISULTATO}\|} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

autospazio e quindi è ortogonale, $\Rightarrow \langle \cdot,\cdot \rangle = 0$.

Allora $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è ORTONORMALE e diagonalizza A, cioè:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{{}^t(M_e^{\mathcal{B}}) = (M_e^{\mathcal{B}})^{-1}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}}_{M_e^{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\perp$

§. Il Prodotto Vettoriale

MODI DIVERSI DI SCRIVERE LA STESSA COSA

$$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}}_{=v}, \underbrace{\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{=w} \Bigg) \longmapsto \begin{pmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ -a_1 c_2 + a_2 c_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \wedge(v,w) =: v \wedge w = v \times w$$

$$\| \qquad \text{LAPLACE SULLA PRIMA COLONNA}$$

$$e_1(b_1c_2 - b_2c_1) - e_2(a_1c_2 - a_2c_1) + e_3(a_1b_2 - a_2b_1) = \det \begin{pmatrix} e_1 & a_1 & a_2 \\ e_2 & b_1 & b_2 \\ e_3 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

Prop: $u, v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà:

i). $(v_1 + v_2) \wedge w = v_1 \wedge w + v_2 \wedge w$; $\quad (cv) \wedge w = c(v \wedge w) = v \wedge (cw)$

ii). $v \wedge (w_1 + w_2) = \dots$

iii). $v \wedge w = -w \wedge v$ [il prodotto vettoriale è ANTISIMMETRICO]

iv). $\langle u, v \wedge w \rangle = \det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ dove $u = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$$= \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_1 \\ b_2 & b_3 & b_1 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{pmatrix} \cancel{(-1)}\cancel{(-1)} = \langle w, u \wedge v \rangle$$

abbiamo scambiato le colonne due volte

$$= \langle v, w \wedge u \rangle$$

stesso ragionamento

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dr, bend left] & \\ w \arrow[ur, bend left] & & v \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

CAMBIANDO I VETTORI IN MODO CICLICO IL RISULTATO NON CAMBIA

v). $v \wedge w \perp v$, $\quad v \wedge w \perp w$.

vi). $v \wedge w = 0 \iff v, w$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI

vii). $\| v \wedge w \| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\theta)$ angolo convesso tra v e w

Dim: i). ii). iii). immediate dalla def di det.

iv). $\langle u, v\wedge w\rangle = a_3(b_1c_2-b_2c_1)-b_3(a_1c_2-a_2c_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)$

$\overset{\downarrow}{=} \det\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ per Laplace.

v). $\langle v, v\wedge w\rangle = \det(v,v,w) = 0$ perché due colonne sono uguali

vi). $\langle w, v\wedge w\rangle = \det(w,v,w) = 0$.

$$v\wedge w = 0 \iff rg\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2\end{pmatrix} < 2. \quad v\wedge w = \begin{bmatrix} e_1\,\cancel{(b_1c_2-b_2c_1)} \to =0 \\ -e_2\,\cancel{(a_1c_2-a_2c_1)} \to =0 \\ +e_3\,\cancel{(a_1b_2-a_2b_1)} \to =0 \end{bmatrix} = 0$$

$\Updownarrow$

v, w LIN. DIPENDENTI.

vii). $$\|v\wedge w\|^2 = (b_1c_2-b_2c_1)^2 + (a_1c_2-a_2c_1)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$= \underbrace{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}_{=\|v\|^2}\underbrace{(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}_{\|w\|^2} - \underbrace{(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2}_{\langle v,w\rangle^2 = \|v\|^2\cdot\|w\|^2\cdot\cos(\theta)^2}$$

$$= \|v\|^2\cdot\|w\|^2\underbrace{(1-\cos^2\theta)}_{=\sin^2\theta} = \|v\|^2\cdot\|w\|^2\cdot\sin^2\theta. \quad \square$$

Oss: $e_1\wedge(e_1\wedge e_2) = e_1\wedge e_3 = -e_2$

$(e_1\wedge e_1)\wedge e_2 = 0$

IL PRODOTTO VETTORIALE NON È ASSOCIATIVO!

§. Spazi Euclidei

Oss: Siamo abituati a (V, g) spazio vettoriale Euclideo. Ora generalizziamo a spazi affini Euclidei su (V, g).

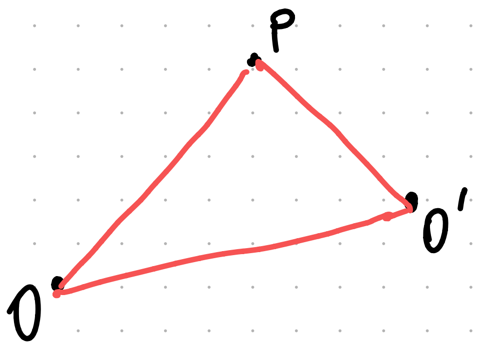
Esempio: $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Euclideo, ma anche $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ su $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è uno spazio Euclideo anche se $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ è affine ma non vettoriale, si denota $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$.

Def: Un riferimento cartesiano su $\mathbb{E}$ su (V, g) Euclideo è un riferimento affine O, $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{E}$, tale $\{v_1, \dots, v_n\}$ sia una base ORTONORMALE di (V, g).

Prop: $\mathbb{E}$ Euclideo su (V, g), Siano $\left.\begin{array}{l} O, \mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\} \\ O', \mathcal{B}' = \{v_1' \dots v_n'\} \end{array}\right\}$ due RIFERIMENTI CARTESIANI di $\mathbb{E}$

Per ogni punto $P \in \mathbb{E}$ con coordinate $\left\{\begin{array}{l} (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ RISP. a } O, \mathcal{B} \\ (\mu_1, \dots, \mu_n) \text{ RISP a } O', \mathcal{B}' \end{array}\right.$

Allora $\overbrace{\mu = A \cdot \lambda + c}^{\text{cioè esiste una trasformazione lineare}}$, dove $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V) \in O(n)$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ sono le coordinate di O rispetto ad $O', \mathcal{B}'$.



Def: La distanza d tra P e Q in $\mathbb{E}$ è $d(P,Q) := \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ})}$

Oss: $d(P,Q) = \sqrt{g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ})} = \sqrt{(\lambda_1-\mu_1)^2 + \dots + (\lambda_n-\mu_n)^2}$

P di coordinate $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; Q di coordinate $\mu_1 \dots \mu_n$ } RISPETTO allo STESSO RIFERIM. CARTESIANO $O, \mathcal{B}$

Prop: (PROPRIETÀ della DISTANZA):

i). $d(P,Q) \geq 0$. Inoltre $d(P,Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$

ii). $d(P,Q) = d(Q,P)$

iii). $d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$ (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE).

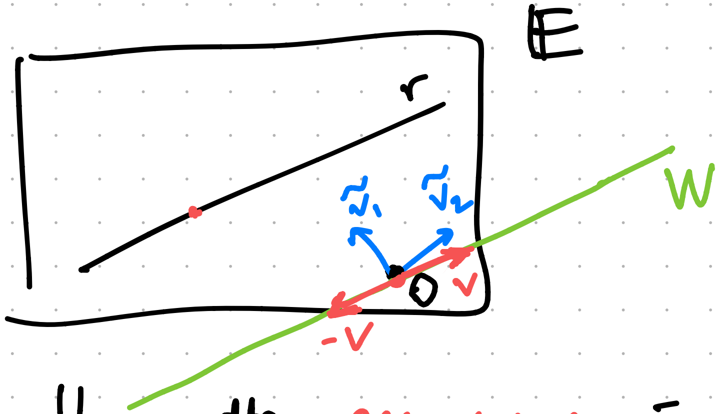
Applicazioni

§ ANGOLO CONVESSO TRA DUE RETTE ORIENTATE.

$\mathbb{E}$ Euclideo su (V, g), retta $r \subseteq \mathbb{E}$ con giacitura W.

SOTTOSPAZIO AFFINE DIM = 1

Def: Un VERSORE di r è un vettore di W di norma $= 1$.



ci sono solo due versori possibili sulla giacitura di una retta: v e $-v$.

Def: Una retta ORIENTATA è una retta r con un versore.

Prendiamo ora due rette orientate: (r_1, v_1), (r_2, v_2)

L'ANGOLO CONVESSO tra le rette è per definizione l'angolo convesso tra i versori v_1 e v_2.

Due rette si diranno ORTOGONALI (o PERPENDICOLARI) $\overset{def}{\iff}$ le loro giaciture sono ortogonali.

Esempi:

1. $\mathbb{E}^2(\mathbb{R}) \supseteq r : ax + by = c$ [EQ. CARTESIANA di r].

I versori di r sono: $\boxed{\pm \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

ax + by effettivamente fa zero quando sostituiamo $\begin{cases} x = -b \\ y = a \end{cases}$

2. $r_1 : a_1 x + b_1 y = c_1$ $\qquad v_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$

$r_2 : a_2 x + b_2 y = c_2$ $\qquad v_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$

L'angolo convesso θ tra r_1 e r_2, una volta scelti i versori v_1, v_2 (il + oppure − per ognuno), sarà quel $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos\theta = \langle v_1, v_2 \rangle = \pm \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}}$$

3. Siano date due rette in forma parametrica:

$$r_1 : \begin{cases} x = x_1 + t\lambda_1 \\ y = y_1 + t\mu_1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = x_2 + t\lambda_2 \\ y = y_2 + t\mu_2 \end{cases}$$

I possibili versori sono $v_1 = \pm \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \pm \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2}} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$

Quindi l'angolo θ tra i due versori [i.e. l'angolo convesso tra le due rette] è dato da:

$$\cos(\theta) = \pm \frac{\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2}{\sqrt{(\lambda_1^2 + \mu_1^2)(\lambda_2^2 + \mu_2^2)}}$$

$\perp$