non è più necessariamente vettoriale. → (SPAZIO EUCLIDEO) $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ (SPAZIO AFFINE)

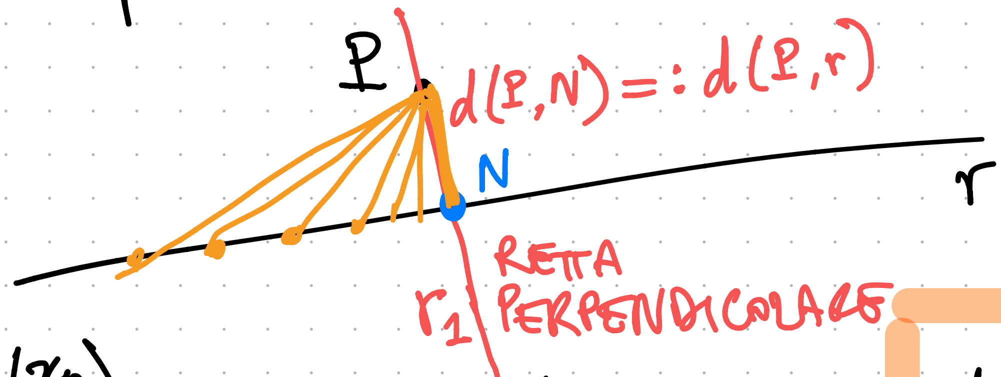
(SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO) $(V=\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle = g)$ PRODOTTO SCALARE CANONICO

$K=\mathbb{R}$ (CAMPO)

§ Distanza punto-retta in $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$

$P, r \in \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, allora la distanza $d(P,r)$ tra il punto P e la retta r è definita come la distanza $d(P,N)$ dove N è l'intersezione tra la retta r e la perpendicolare ad r passante per P

PUNTO RETTA



Prop.: $P=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $r: ax+by=c \Rightarrow \boxed{d(P,r)=\dfrac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

Dim:

$$r_1 : \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases} \Rightarrow N = \begin{pmatrix} x_0 + \tau a \\ y_0 + \tau b \end{pmatrix}$$ per qualche valore di τ tale che $\underbrace{a(x_0 + \tau a) + b(y_0 + \tau b) = c}_{\text{perché } N \in r}$

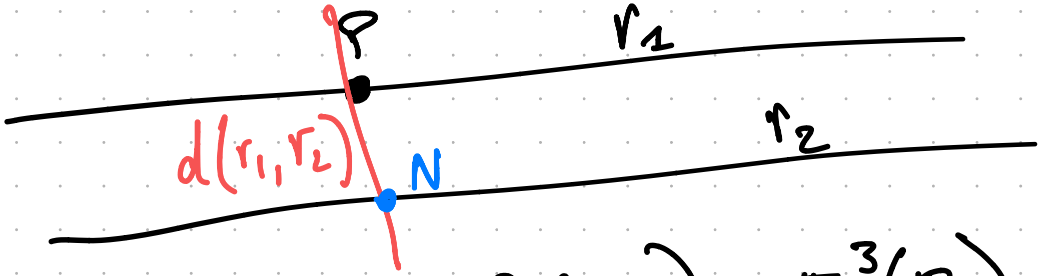
Quindi calcolo $\tau = \dfrac{c - ax_0 - by_0}{a^2 + b^2}$

Quindi $$d(P, r) := d(P, N) = \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 + \frac{c - ax_0 - by_0}{a^2+b^2} \cdot a \\ y_0 + \frac{c - ax_0 - by_0}{a^2+b^2} \cdot b \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} -a\left(\frac{c - ax_0 - by_0}{a^2+b^2}\right) \\ -b\left(\frac{c - ax_0 - by_0}{a^2+b^2}\right) \end{pmatrix} \right\| = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

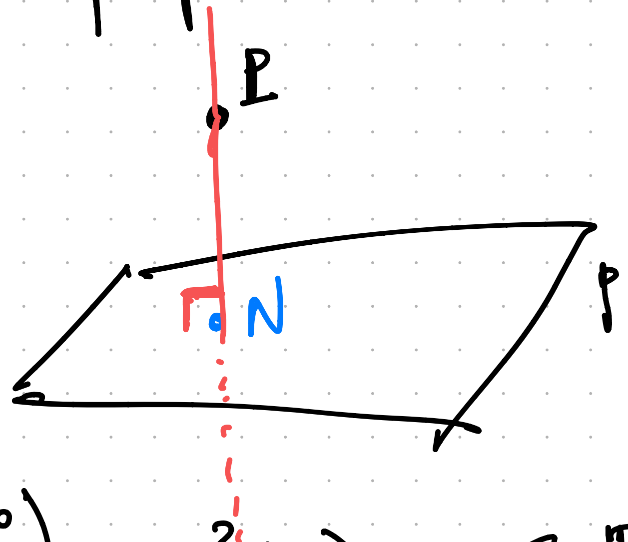
Def.: (Distanza tra rette PARALLELE) $r_1, r_2 \in \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow d(r_1, r_2) := d(P \in r_1, r_2)$ per un $P \in r_1$ qualsiasi.



Def: (DISTANZA PUNTO-PIANO). $\mathbb{E}^3(\mathbb{R}) \ni \underset{\text{PUNTO}}{P}, \underset{\text{PIANO}}{p}$.

Definiamo $d(P,p) := d(P,N)$ dove N è quel punto del piano p che è intersezione tra il piano p e la retta perpendicolare a p passante per P.

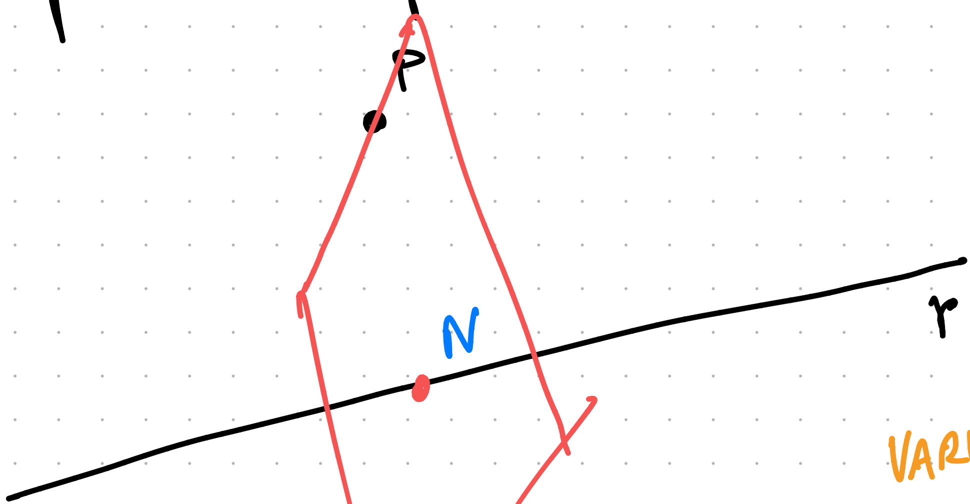


Prop.: $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, $p \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ con eq: $ax+by+cz=d$

$$\boxed{d(P,p) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Dim: uguale a prima.

Def.: P, r in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, $d(P,r) := d(P,N)$ dove N è il punto di intersezione tra r e il piano perpendicolare ad r passante per P



$\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$

PROP | $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, $r \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$:

VARIABILI PARAMETRO

$$\begin{cases} x = \tilde{x} + t\lambda \\ y = \tilde{y} + t\mu \\ z = \tilde{z} + t\nu \end{cases}$$

(M)

(N)

SONO LE COORDINATE DI Q

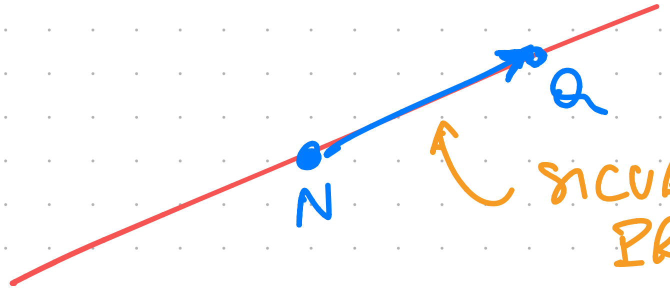
COEFFICIENTI

Allora:

$$d(P,r)=\frac{\sqrt{\left(\nu(y_0-\tilde{y})-\mu(z_0-\tilde{z})\right)^2+\left(\nu(x_0-\tilde{x})-\lambda(z_0-\tilde{z})\right)^2+\left(\mu(x_0-\tilde{x})-\lambda(y_0-\tilde{y})\right)^2}}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}$$

<u>Dim</u>: Sia $Q:=\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{pmatrix}\in r$, sappiamo che $\vec{NP}=\vec{NQ}+\vec{QP}$

Osserviamo che i vettori $\vec{NQ}$ e $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti perché $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}$ genera la giacitura di r, mentre N, Q sono due punti di r.



SICURAMENTE È PROPORZIONALE AD OGNI VETTORE CHE GENERA LA GIACITURA

$$0 = \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{NQ} = \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} \wedge \left(\overrightarrow{NP} - \overrightarrow{QP}\right) = \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{NP} - \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{QP}$$

Quindi: $$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{NP} \overset{\blacksquare}{=} \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{QP}$$

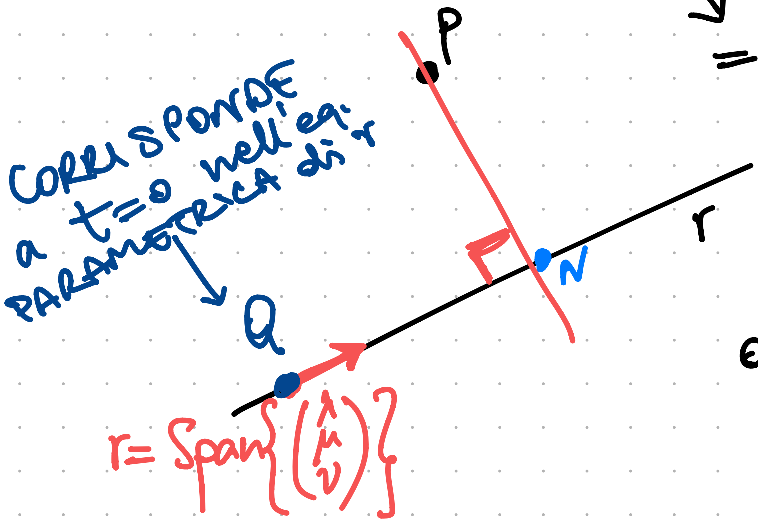
$\overrightarrow{NP}$ e $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}$ sono PERPENDICOLARI (o ORTOG.)

Allora $\theta = 90° = \pi/2$

LA SUA NORMA È:

$$\left\| \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{NP} \right\| = \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\cdot \left\|\overrightarrow{NP}\right\| \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\text{angolo convesso}\right)}_{=1}$$

$$= \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\cdot d(P,r)$$



Quindi:

$$d(P,r) = \frac{\left\| \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{NP} \right\|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}} \overset{\text{USO } \blacksquare}{=} \frac{\left\| \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{QP} \right\|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}$$

$$= \frac{\left\| \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}x_0 - \tilde{x}\\ y_0 - \tilde{y}\\ z_0 - \tilde{z}\end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}} = \text{ENUNCIATO della PROPOSIZIONE } ✓ \quad \square$$

DEF di PRODOTTO VETT E di NORMA

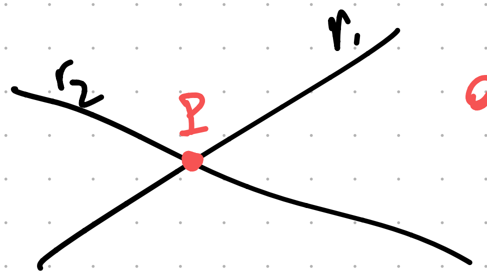
La retta r ha bisogno di due dati:

1. un punto di riferimento iniziale, cioè $Q = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$ che corrisponde a $t=0$.
2. una direzione in cui muoversi, cioè un vettore che ne genera la giacitura, in questo caso $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$.

§ DISTANZA TRA DUE RETTE in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$: r_1, r_2 RETTE.

- Se sono parallele, vedi distanza tra rette in $\mathbb{E}^2$

Assumiamo che non siano parallele. Se hanno intersez. non vuota, allora diciamo che $d(r_1, r_2) =$



$d(r_1, r_2) = d(P, P) = 0.$

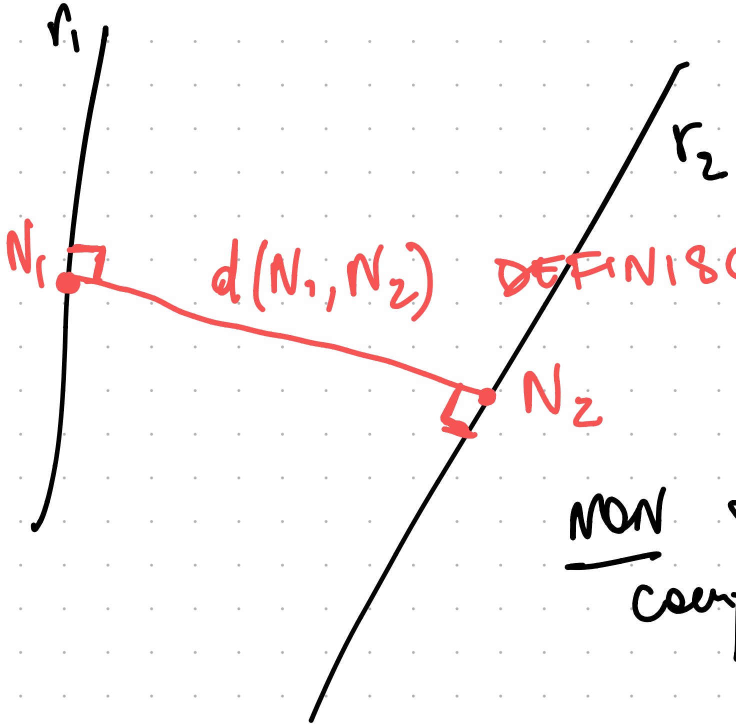
Lemma: r_1, r_2 RETTE di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ non complanari, $\Rightarrow$

ESISTONO e sono UNICI due punti

$N_1 \in r_1$ $\qquad$ $N_2 \in r_2$

tale che la retta passante per N_1 e N_2 sia perpendicolare a r_1 e anche a r_2.

E allora definiamo $d(r_1, r_2) := d(N_1, N_2)$



DEFINISCE $d(r_1, r_2)$ ed è la più piccola tra le distanze $d(P_1, P_2)$ con $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$.

NON sono complanari (sono sghembe)

Dim. $v_i \in \mathbb{R}^3$ vettore che genera giacitura di r_i, $(i = 1, 2)$

Allora v_1 e v_2 sono LIN. INDIP. per ipotesi

Quindi $v_1 \wedge v_2 \neq 0$ e $v_i \perp (v_1 \wedge v_2)$ $(i=1,2)$

Basta considerare il piano p che contiene r_1 ed ha giacitura $= \mathrm{Span}\{v_1, v_1 \wedge v_2\}$

Quindi $\begin{cases} N_2 := p \cap r_2 \\ N_1 := r_1 \cap \left\{ \begin{array}{l} \text{retta contenuta in } p \text{ perpendic} \\ \text{ad } r_1 \text{ e passante per } N_2 \end{array} \right\} \end{cases}$

Allora

La retta gener. da $\overrightarrow{N_1N_2}$ è perpendicolare sia a r_1 che a r_2.

Prop.: $r_1, r_2 \subset E^3(\mathbb{R})$ NON COMPLANARI

$$r_1 : Q_1 + tv_1 \qquad r_2 : Q_2 + tv_2$$

Allora $$d(r_1, r_2) := d(N_1, N_2) = \frac{\left|\langle v_1 \wedge v_2, \overrightarrow{Q_1Q_2} \rangle\right|}{\|v_1 \wedge v_2\|}$$

QUESTI DUE CONTRIBUTI VENGONO ANNULLATI DAL PRODOTTO SCALARE

Dim.: Osserviamo che $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_1N_1} + \overrightarrow{N_1N_2} + \overrightarrow{N_2Q_2}$

CANONICO PER LEMMA SOPRA

Siccome $\overrightarrow{Q_iN_i}$ e v_i sono LIN. DIP. $\forall i=1,2$, allora

$\overrightarrow{Q_iN_i} \perp v_1 \wedge v_2 \quad \forall i=1,2.$

Allora $\langle v_1 \wedge v_2, \overrightarrow{Q_1Q_2} \rangle \overset{*}{=} \langle v_1 \wedge v_2, \overrightarrow{N_1N_2} \rangle$

$= \pm \|v_1 \wedge v_2\| \cdot \|\overrightarrow{N_1N_2}\|$ $\square$

da cui segue l'enunciato

$\langle v_1 \wedge v_2, \overrightarrow{Q_1Q_2} \rangle = \langle v_1 \wedge v_2, \overrightarrow{Q_1N_1} + \overrightarrow{N_1N_2} + \overrightarrow{N_2Q_2} \rangle$

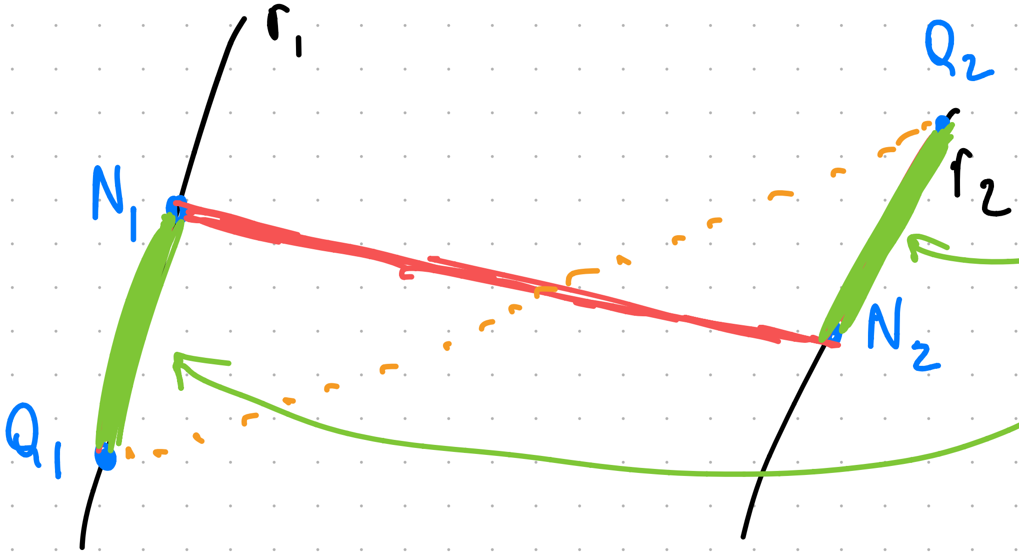
$\underset{\text{DISTRIB.}}{=} \underbrace{\cancel{\langle v_1 \wedge v_2, \overrightarrow{Q_1N_1} \rangle}}_{=0} + \langle v_1 \wedge v_2, \overrightarrow{N_1N_2} \rangle + \underbrace{\cancel{\langle v_1 \wedge v_2, \overrightarrow{N_2Q_2} \rangle}}_{=0}$

perché $v_1 \wedge v_2 \perp \overrightarrow{N_2Q_2}$

perché $v_1 \wedge v_2 \perp \overrightarrow{Q_1N_1}$

perché $v_1 \perp v_1 \wedge v_2$ per le proprietà del prodotto vettoriale e la giacitura di $r_1 = \mathrm{Span}(v_1)$, e $Q_1, N_1 \in r_1$ quindi $\overrightarrow{Q_1N_1}$ è

LIN. DIP. con v_1 il quale è ortogonale a $v_1 \wedge v_2$.



QUESTI CONTRIBUTI VENGONO ANNULLATI GRAZIE AL PRODOTTO SCALARE, E RIMANE SOLO IL CONTRIBUTO DI $\overrightarrow{N_1N_2}$, IL QUALE È CANONICO (NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE).

$\square$