



§. LO SPAZIO AFFINE $A^3(K)$

- SETTING:**
- $V := K^3$ vettoriale su K con $\dim(V) = 3$
 - $A = A^3(K)$ affine su V
 - $B := \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di V
 - $O :=$ ORIGINE di A (= ORIGINE DI V IN QUESTO CASO)
-] RIFERIMENTO
AFFINE di A .

SOTTOSPAZI AFFINI DEL PIANO AFFINE:

- $\dim = 3$: $A \subseteq A$ solo lo spazio affine stesso.
- $\dim = 2$: $\pi \subseteq A$ ci sono infiniti piani affini in A .
- $\dim = 1$: $r \subseteq A$ ci sono infinite rette affini in A .
- $\dim = 0$: $P \in A$ ci sono infiniti punti affini in A .

§. Un PIANO con giacitura data passante per un punto dato

$$W := \text{Span}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \nu_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \\ \nu_2 \end{pmatrix}\right) \quad Q := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Allora il piano $\pi \subseteq \mathbb{A}^3(K)$ passante per Q con giacitura W è:

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + t_1 \lambda_1 + t_2 \lambda_2 \\ y = y_0 + t_1 \mu_1 + t_2 \mu_2 \\ z = z_0 + t_1 \nu_1 + t_2 \nu_2 \end{cases}$$

EQ. PARAMETRICHE
DEL PIANO π

$$t_1, t_2 \in K$$

Come prima sia un generico punto di $\mathbb{A}^3(K)$ $P := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Allora

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \nu_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \text{ LINEARI D.P.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x - x_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ y - y_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ z - z_0 & \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix} = 0$$

PER ESEMPIO TRAMITE
LAPLACE sulla PRIMA
COLONNA,

$$\Leftrightarrow (x - x_0)(\mu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_2) - (y - y_0)(\lambda_1 \nu_2 - \nu_1 \lambda_2) + (z - z_0)(\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2) = 0$$

EQ. CARTESIANA del piano π passante per Q con giacitura W

§. Un PIANO passante per 3 punti dati

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Allora il piano $\pi \subseteq \mathbb{A}^3(K)$ passante per P_0, P_1, P_2 è dato dal metodo precedente semplicemente prendendo $W := \text{Span}(\overrightarrow{P_1 P_0}, \overrightarrow{P_2 P_0})$:

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + t_1(x_1 - x_0) + t_2(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + t_1(y_1 - y_0) + t_2(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + t_2(z_2 - z_0) \end{cases}$$

EQ. PARAMETRICHE
del PIANO π
 $t_1, t_2 \in K$

e allo stesso modo si ottiene

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

EQ. CARTESIANE
del PIANO π

AD ESEMPIO
MA SI POTEVA
FARE IN MODI
DIVERSI

§. Una RETTA con giacitura data passante per un punto dato

$$W := \text{Span}\left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}\right) \quad Q := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Allora la retta r di giacitura W passante per Q è:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + t \cdot \lambda \\ y = y_0 + t \cdot \mu \\ z = z_0 + t \cdot \nu \end{cases}$$

EQ. PARAMETRICHE
della retta r
 $t \in K$

Come prima consideriamo un punto generico $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in A^3(K)$
 $P \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}$ è proporzionale a $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \cdot t' = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$

⚠ NON È FACILE ESPRIMERE LE CARTESIANE COME DET IN QUESTO CASO.

Pero: $\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}}_{= A \in M_{3 \times 1}(K)} \cdot t' = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$

← VETTORE b
dei TERMINI
NOTI

↑ INCOGNITE

Assumiamo che abbia soluz.
 Allora per Rouché-Capelli
 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$
 $\parallel$
 1

$$\Rightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} \lambda & x - x_0 \\ \mu & y - y_0 \\ \nu & z - z_0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \text{RIDUCIAMO IN FORMA
SCALA con GAUß}$$

Chiaramente può succedere durante la riduzione che uno dei λ, μ, ν sia zero [MA NON TUTTI E TRE], e allora dobbiamo scambiare due righe.

Assumiamo senza perdita di generalità che $\lambda \neq 0$ (altrimenti scambiamo righe)

$$\Rightarrow \underset{\text{RIGHE}}{(\tilde{A} | \tilde{b})} = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda & & x - x_0 \\ 0 & (y - y_0) - \frac{\mu}{\lambda}(x - x_0) & \\ 0 & (z - z_0) - \frac{\nu}{\lambda}(x - x_0) & \end{array} \right)$$

IL SISTEMA DEVE AVERE SOLUZIONI ALLORA DOBBIAMO IMPORRE CHE QUESTI DUE QUI SIANO ZERO (ROUCHÉ - CAPELLI)

$$\Rightarrow r: \begin{cases} \lambda(y - y_0) - \mu(x - x_0) = 0 \\ \lambda(z - z_0) - \nu(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

EQ. CARTESIANE della retta r

Q: Ma come mai una RETTA in equazioni CARTESIANE, in $A^3(K)$, è definita da DUE EQUAZIONI, e invece un PIANO in $A^3(K)$ DA UNA SOLA EQUAZIONE?!

R: Ogni equazione (lin. indep.) RIDUCE di uno la DIMENSIONE.
 $\dim(A^3(K)) - \dim(r) = 3 - 1 = 2$ EQUAZIONI

§ Una RETTA r passante per 2 punti dati:

$$Q := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Una retta $r \supset \overline{QP}$ deve avere direzione $W = \text{Span}(\overrightarrow{QP})$

$\Rightarrow W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{pmatrix} \right)$. A questo punto possiamo dimenticare uno dei due punti e procedere esattamente come prima per l'equazione di una retta passante per un punto dato con direzione data.

PROP [POSIZIONI RECIPROCHE di due PIANI AFFINI in $A^3(K)$]

$$\begin{cases} \pi: ax+by+cz=d \\ \pi': a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{i). } \text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \pi // \pi' \\ \quad \text{i.a). } \text{Se } \pi // \pi' \Rightarrow \begin{cases} \pi \cap \pi' = \emptyset \Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2 \\ \pi \cap \pi' \neq \emptyset \Leftrightarrow \pi = \pi' \end{cases} \\ \text{ii). } \text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \pi \cap \pi' = r \text{ RETTA DATA IN EQ.} \\ \quad \text{CARTESIANE DAL SISTEMA DELLE EQ. CARTESIANE DEI DUE PIANI} \end{array} \right.$$

PARTIAMO CON DUE
PIANI IN $A^3(K)$
DATI TRAMITE LORO
EQUAZIONI CARTESIANE

IN ALTRE PAROLE: SE NON SONO PARALLELE
ALLORA SONO AUTOMATICAMENTE INCIDENTI,
OVVERO: IN 3 DIMENSIONI NON C'E' ABBASTANZA
DIMENSIONE AFFINCHÉ DUE PIANI SIANO SGENEBI

L'UNICO ALTRO CASO NON TRATTATO È DATO DA
 $\text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 0$, MA QUESTO IMPLICA $a=b=c=a'=b'=c'=0$
E QUINDI ENTRAMBI I PIANI SAREBBERO
DEGENERI e RIDOTTI AD UN PUNTO.

PROP [POSIZIONI RECIPROCHE di un PIANO e di una RETTA in $A^3(K)$]

$$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi: a''x + b''y + c''z = d''$$

PARTIAMO CON UN PIANO
ED UNA RETTA in $A^3(K)$
DATE TRAMITE LORO
EQUAZIONI CARTESIANE

$$\left[\begin{array}{l} \text{i). } \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \parallel r \\ \text{i.a). } \text{Se } \pi \parallel r \Rightarrow \begin{cases} \pi \cap r = \emptyset \Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 3 \\ \pi \cap r \neq \emptyset \Leftrightarrow r \subset \pi \end{cases} \\ \text{ii). } \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \pi \cap \pi' = Q \text{ PUNTO DATO IN EQ.} \\ \text{CARTESIANE DAL SISTEMA} \\ \text{DELLE EQ. CARTESIANE DEL} \\ \text{PIANO E DELLA RETTA} \end{array} \right.$$

IN ALTRE PAROLE: SE NON SONO PARALLELI
ALLORA SONO AUTOMATICAMENTE INCIDENTI,
OVVERO: IN 3 DIMENSIONI NON C'E' ABBASTANZA
DIMENSIONE AFFINCHÉ RETTA E PIANO SIANO SGHEMBI

Dim.: [della PROP sui due PIANI, l'altra è analoga]

i). Se W, W' sono le grature dei due piani affini, quindi con $\dim(W) = \dim(W') = 2$, allora come nella scorsa dimostrazione $\pi // \pi' \Leftrightarrow W \subseteq W'$ oppure $W' \subseteq W$ ma essendo della stessa dimensione abbiamo che

$$\pi // \pi' \Leftrightarrow W = W'$$

La condizione $W = W'$ può anche essere scritta come il fatto che $\dim(W \cap W') = 2$ (per esempio per la FORMULA DI GRASSMANN). Ora usiamo il fatto che L'INTERSEZIONE DI SPAZI è descritta da sistemi lineari prodotti mettendo a sistema le loro relative equazioni cartesiane.

Quindi

$$W \cap W': \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c't = 0 \end{cases}$$

OVVIAMENTE PER ROUCHÉ-CAPPELL
IL SISTEMA OMOGENEO (CHE HA
SEMPRE SOLUZIONI) HA DIMENSIONE
DELL'E SOLUZIONI UGUALE A

$$3 - \text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1.$$

IMPONGO
PERCHÉ $W = W'$ - 16 -

i. a). Di nuovo, $\pi \cap \pi' = \emptyset$ è la stessa cosa che dire, in termini dei sistemi lineari che il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

NON È COMPATIBILE

⇔ ROUCHE-CAPPELLI

L'UNICA POSSIBILITÀ È CHE:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$

$$\Leftarrow 1 = \text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \neq \text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

SOTTO LE POTESSI CHE $\pi // \pi'$

ii). Se $\text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$

⇔ ROUCHE-CAPPELLI i)

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \text{ È COMPATIBILE}$$

$\pi \cap \pi' = r$
RETTA
AFFINE

$S = \text{SPAZIO SOLUZ.}$
 $\Leftarrow \text{HA DIM} = n - \text{rank}(A)$
 $\Rightarrow \text{DIM} = 3 - 2 = 1$
ROUCHE-CAPPELLI ii)



PROP [POSIZIONI RECIPROCHE di due RETTE in $A^3(K)$]

$$\begin{aligned} r: & \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \\ r': & \begin{cases} ex+fy+gz=h \\ e'x+f'y+g'z=h' \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{aligned} \text{i). } \text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix} = 2 & \Leftrightarrow r \parallel r' \\ \text{i.a). Se } r \parallel r' & \Rightarrow \begin{cases} r \cap r' = \emptyset \Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix} = 3 \\ r \cap r' \neq \emptyset \Leftrightarrow r = r' \end{cases} \\ \text{ii). } \text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix} \neq 2 & \Leftrightarrow r \not\parallel r' \\ \text{ii.a). Se } r \not\parallel r' & \Rightarrow \begin{cases} \pi \cap r = \emptyset \Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix} = 4 \\ \pi \cap r \neq \emptyset \Leftrightarrow r \cap r' = \text{punto} \end{cases} \end{aligned} \right.$$

PARTIAMO CON
DUE RETTE in $A^3(K)$
DATE TRAMITE LORO
EQUAZIONI CARTESIANE

PUNTO DATO N EQ.
CARTESIANE DAL
SISTEMA di 4 EQ.
CARTESIANE delle 2 RETTE

IN ALTRE PAROLE: SE NON SONO PARALLELE
ALLORA SONO INCIDENTI OPPURE SGHEMME,
OVVERO: IN 3 DIMENSIONI C'E' ABBASTANZA
DIMENSIONE AFFINCHÉ RETTE SIANO SGHEMME