



Coordinate Cartesian & Coordinate Parametric

Example: $\begin{cases} x + 2y = 5 \end{cases}$ SISTEMA LINEARE.

Abbiamo una equazione (lin. indep. perché non nulla) e due variabili. Allora impiego $2 - 1 = 1$ parametro. Sia $y = t \in \mathbb{R}$. Allora $x = 5 - 2t$. Risolviamo anche il sistema omogeneo.

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 5-2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Tra tutte le soluzioni possibili in A , scegliamo quella per $t=2$. [ma potremmo scegliere qualsiasi t !]. Allora $\tilde{z} = \begin{pmatrix} 5-2t \\ t \end{pmatrix} \Big|_{t=2}$

$$\Rightarrow \tilde{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = V + \tilde{z} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Allora ogni soluzione si può scrivere come:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero:

$$A: \begin{cases} x_1 = 1 - 2 \cdot t \\ x_2 = 2 + 1 \cdot t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE del SISTEMA!

Def: Sia S un sottospazio affine di $A^n(K)$ passante per $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}$ e parallelo a $W \subseteq K^m =: V$. Sia W generato da vettori $w^1, \dots, w^n$

$\Rightarrow A^n(K) \ni P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ appartiene anche al sottospazio S se e solo se

$P - Q \in W$, i.e. se e solo se $P - Q = t_1 w^1 + \dots + t_n w^n \quad \exists t_i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_1^1 + \dots + t_n w_n^1 \\ \vdots \\ x_m = q_m + t_1 w_1^m + \dots + t_n w_n^m \end{cases}$$

EQUAZIONI

PARAMETRICHE

Oss: ESTRAENDO UNA BASE dei generatori di W è possibile ridurre la complessità delle equazioni parametriche.

Esempio:

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subseteq \mathbb{R}^4 \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow S: \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 - 2t_2 + 8t_3 \\ x_2 = -t_1 + t_2 - 5t_3 \\ x_3 = 1 + 3t_1 + 6t_3 \\ x_4 = 2t_1 + t_2 + t_3 \end{cases}$$

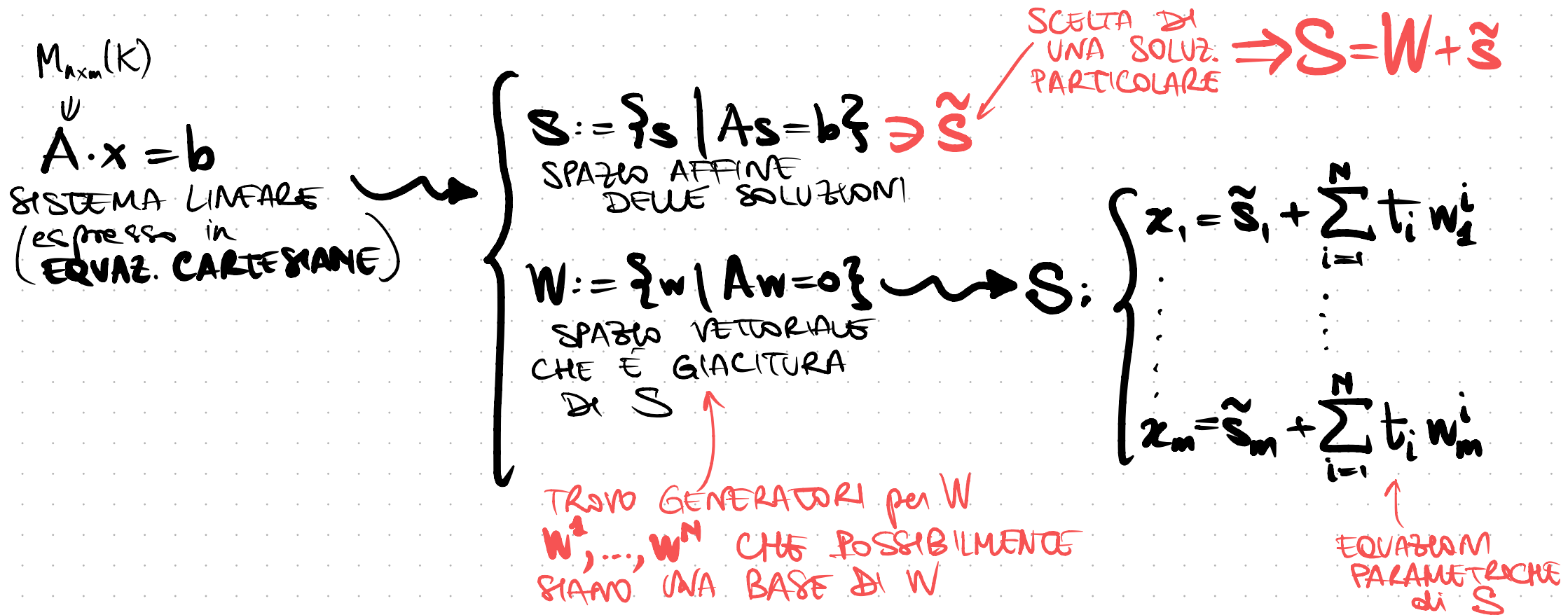
$$S: \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 - 2t_2 \\ x_2 = -t_1 + t_2 \\ x_3 = 1 + 3t_1 \\ x_4 = 2t_1 + t_2 \end{cases}$$

ALLORA IL SOTTOSPAZIO
AFFINE S È UN
PIANO AFFINE $\rightarrow \dim(S)$

$$\dim(W) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \leftarrow \text{E NON 3!}$$

Allora l'estrazione della base
da W ci dice che possiamo
scegliere **OGNI DUE VETTORI GENERATORI**
INVECE CHE TUTTI E TRE. Quindi in
particolare possiamo **buttare via il terzo**
senza cambiare lo spazio S .

§. Da Cartesiane a parametriche



§. Da parametriche a Cartesiane

$S: \begin{cases} x_1 = \tilde{s}_1 + \sum_{i=1}^n t_i w_1^i \\ \vdots \\ x_m = \tilde{s}_m + \sum_{i=1}^n t_i w_m^i \end{cases}$
 al variare dei parametri $t_i \in K$
 $\Rightarrow S \subseteq A^n(K)$ PARALLELO a $W := \text{Span}(w^1, \dots, w^n)$
 E PASSANTE PER $\tilde{s}$
 in altre parole $S = W + \tilde{s}$

$\downarrow$
 CALCOLIAMO
 $\dim(W) =: r$

FORMA MATRICIALE

$$\begin{pmatrix} w_1^1 & \dots & w_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ w_m^1 & \dots & w_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \tilde{s}_1 \\ \vdots \\ x_m - \tilde{s}_m \end{pmatrix}$$
 COMPATIBILE
 SE E SOLO SE
 $x \in S$

ALTRIMENTI PER
 ROUCHE-CAPPELLI IL SISTEMA
 NON AVREBBE SOLUZIONI

RIDUZIONE IN FORMA
 SCALA TRAMITE GAUß

$(\tilde{A} | \tilde{b})$

Siccome $\dim(S) = \dim(W) = r$
 che abbiamo già calcolato, per
 ROUCHE-CAPPELLI dobbiamo avere che:
 $\text{rank}(\tilde{A} | \tilde{b}) = \text{rank}(\tilde{A}) = \dim(W) = r$

Ne segue che le ULTIME $m-r$
 COORDINATE di $\tilde{b}$ DEVONO
 ESSERE NULLE?

$S: \begin{cases} \tilde{b}_{r+1} = 0 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m = 0 \end{cases}$
 ECCO LE
 NOSTRE
 EQ.
 CARTESIANE
 $\leftarrow$ DIPENDONO DALLE $x_i!!$

Esempio: $S: \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 - 2t_2 + 8t_3 \\ x_2 = -t_1 + t_2 - 5t_3 \\ x_3 = 1 + 3t_1 + 6t_3 \\ x_4 = 2t_1 + t_2 + t_3 \end{cases} \Rightarrow W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

FORMA MATRICIALE

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 & x_1 - 1 \\ -1 & 1 & -5 & x_2 \\ 3 & 0 & 6 & x_3 - 1 \\ 2 & 1 & 1 & x_4 \end{pmatrix}$$

RIDUZIONE IN FORMA
SCALA TRAMITE GAUSS

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 & x_1 - 1 \\ 0 & -1 & 3 & x_1 + x_2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3x_1 + 5x_2 + x_4 - 3 \end{pmatrix}$$

L'UNICA POSSIBILITÀ
È CHE QUESTE
DUE ENTRATE
FACCIAMO
ZERO

$$S: \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Ecco le coordinate Cartesiane
che conosceiamo già 

DEVE CORRISPONDERE AD UN
SISTEMA COMPATIBILE, cioè

$$\text{rank}(\tilde{A} | \tilde{b}) = \text{rank}(\tilde{A}) = 2$$