1. Tabella delle condizioni di parallelismo e incidenza tra rette nel piano

Consideriamo due rette r, r' nel piano affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ di equazioni cartesiane:

$$r \ : \ ax + by = c, \quad r' \ : \ a'x + b'y = r'.$$

Allora si ha:

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$	$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$	posizione	condizione
1	1	$r \parallel r',\ r = r'$	$ab' - a'b = 0$
1	2	$r \parallel r',\ r \cap r' = \emptyset$	$ab' - a'b = 0, \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$
2	2	$r \nparallel r',\ \ r \cap r' = \{Q\}$	$ab' - a'b \neq 0$

Consideriamo due rette r, r' nel piano affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ di equazioni parametriche:

$$\pi \ : \ \begin{cases} x = Q_1 + lt \\ y = Q_2 + mt \end{cases} \qquad \pi' \ : \ \begin{cases} x = R_1 + l'\tau \\ y = T_2 + m'\tau \end{cases}$$

Allora si ha:

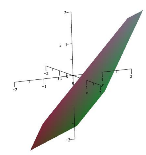
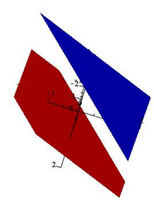
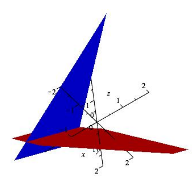
$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} l & l' \\ m & m' \end{pmatrix}$	posizione
1	$r \parallel r',\ r = r'$ oppure $r \cap r' = \emptyset$
2	$r \nparallel r',\ r\cap' = \{P\}$

2. Tabella delle condizioni di parallelismo e incidenza tra piani nello spazio

Consideriamo due piani π, π' nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ di equazioni cartesiane:

$$\pi \ : \ ax + by + cz = d, \quad \pi' \ : \ a'x + b'y + c'z = d'.$$

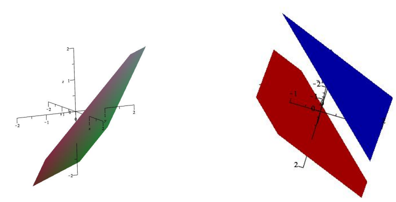
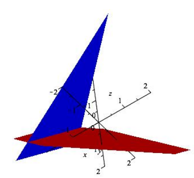
Allora si ha:

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$	$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$	posizione	
1	1	$\pi \parallel \pi',\ \pi = \pi'$	
1	2	$\pi \parallel \pi',\ \pi \cap \pi' = \emptyset$	
2	2	$\pi \nparallel \pi',\ \dim\ \pi \cap \pi' = 1$	

Consideriamo due piani π, π' nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ di equazioni parametriche:

$$\pi \ : \ \begin{cases} x = Q_1 + l_1 t_1 + l_2 t_2 \\ y = Q_2 + m_1 t_1 + m_2 t_2 \\ z = Q_3 + n_1 t_1 + n_2 t_2 \end{cases} \qquad \pi' \ : \ \begin{cases} x = T_1 + o_1 s_1 + o_2 s_2 \\ y = T_2 + u_1 s_1 + u_2 s_2 \\ z = T_3 + w_1 s_1 + w_2 s_2 \end{cases}$$

Allora si ha:

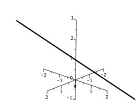
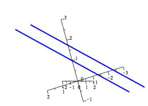
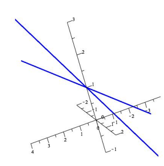
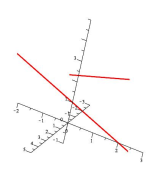
$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & o_1 & o_2 \\ m_1 & m_2 & u_1 & u_2 \\ n_1 & n_2 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$	posizione	
2	$\pi \ \parallel \ \pi', \ \pi = \pi'$ oppure $\pi \cap \pi' = \emptyset$	
3	$\pi \ \nparallel \ \pi', \ \dim \ \pi \cap \pi' = 1$	

3. Tabella delle condizioni di parallelismo, incidenza e sghembità tra rette nello spazio

Consideriamo due rette r, r' nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ di equazioni cartesiane:

$$r \ : \ \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}, \quad r' \ : \ \begin{cases} ex+fy+gz=h \\ e'x+f'y+g'z=h' \end{cases}.$$

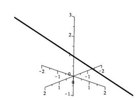
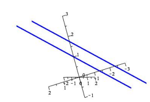
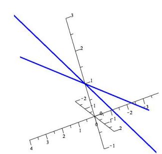
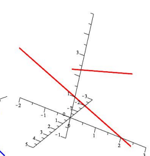
Allora si ha:

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix}$	$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix}$	posizione	
2	2	$r \parallel s, \ r = s$	
2	3	$r \parallel s, \ r \cap s = \emptyset$	
3	3	$r \nparallel s, \ r \cap s = \{R\}$	
3	4	$r \nparallel s, \ r \cap s = \emptyset$	

Consideriamo due rette r, r' nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ di equazioni parametriche:

$$r \ : \ \begin{cases} x = Q_1 + lt \\ y = Q_2 + mt \\ z = Q_3 + nt \end{cases} \qquad r' \ : \ \begin{cases} x = T_1 + os \\ y = T_2 + us \\ z = T_3 + ws \end{cases}$$

Allora si ha:

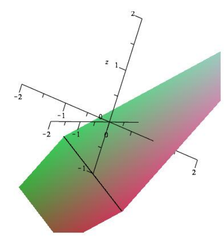
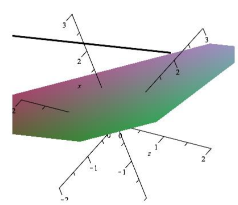
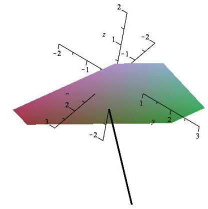
$\text{rg} \begin{pmatrix} l & o \\ m & u \\ n & w \end{pmatrix}$	posizione	
1	$r \parallel r', \ r = r'$ oppure $r \cap r' = \emptyset$	 
2	$r \nparallel r', \ r \cap r' = \{R\}$ un punto oppure $r \cap r' = \emptyset$	 

4. Tabella delle condizioni di parallelismo e incidenza tra una retta e un piano nello spazio

Consideriamo una retta r e un piano π nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ di equazioni cartesiane:

$$r \ : \ \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} , \quad \pi \ : \ ex + fy + gz = h.$$

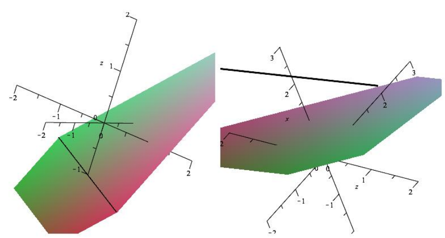
Allora si ha:

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \end{pmatrix}$	$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$	posizione	
2	2	$r \parallel \pi,\ r \subseteq \pi$	
2	3	$r \parallel \pi,\ r \cap \pi = \emptyset$	
3	3	$r \nparallel \pi,\ r \cap \pi = \{R\}$	

Consideriamo una retta r e un piano π nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ di equazioni parametriche:

$$r \ : \ \begin{cases} x = Q_1 + lt \\ y = Q_2 + mt \\ z = Q_3 + nt \end{cases} \qquad \pi \ : \ \begin{cases} x = T_1 + o_1 s_1 + o_2 s_2 \\ y = T_2 + u_1 s_1 + u_2 s_2 \\ z = T_3 + w_1 s_1 + w_2 s_2 \end{cases}$$

Allora si ha:

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} l & o_1 & o_2 \\ m & u_1 & u_2 \\ n & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$	posizione	
2	$r \parallel \pi, \ r \subseteq \pi$ oppure $r \cap \pi = \emptyset$	
3	$r \nparallel \pi, \ r \cap \pi = \{R\}$ un punto