

RG flow

$$\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu} \leftarrow g_r(\mu)$$

Integriamo

$$\int_{g(\mu_0)}^{g(\mu)} \frac{dg}{\beta(g)} = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'} = \ln(\mu/\mu_0)$$

in regime perturbativo

$$\frac{1}{\beta_0} \int_{g(\mu_0)}^{g(\mu)} \frac{dg}{g^3} = \frac{1}{\beta_0} \left(-\frac{1}{2g^2} \Big|_{g(\mu_0)}^{g(\mu)} \right) = \frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu)} - \frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu_0)}$$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} + \beta_0 \ln(\mu_0^2/\mu^2)$$

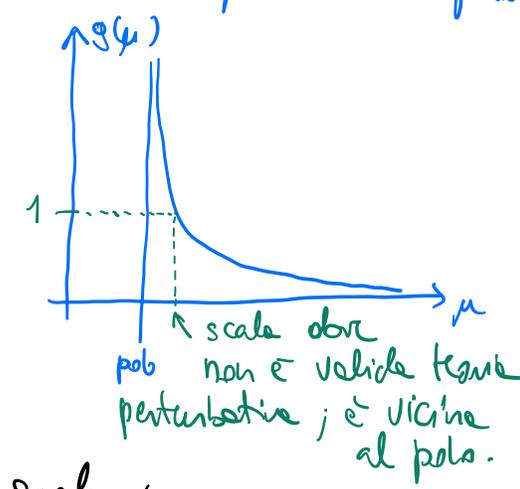
$$g^2(\mu) = \frac{g^2(\mu_0)}{1 + \beta_0 g^2(\mu_0) \ln(\mu_0^2/\mu^2)}$$

1-loop \downarrow higher loops \downarrow
 $\beta(g) = \beta_0 g^3 + \dots$
 (ordini superiori in g)

Valida in regime perturbativo ($g(\mu) \ll 1$)

$$\beta_0 = -\frac{11}{3} \frac{C_2(G)}{(4\pi)^2} \text{ in YM}$$

Se $\beta_0 < 0$, calando la scala, ad un certo μ_0 trovo un polo



YM:

$$\beta_0 = -\frac{11}{3} \frac{C_2(G)}{(4\pi)^2} < 0 \Rightarrow \text{all'aumentare delle scale } \mu, g(\mu) \text{ diminuisce} \rightarrow \text{ASYMPTOTIC FREEDOM in UV}$$

\Rightarrow diminuendo la scala μ , $g(\mu)$ aumenta e ad un certo punto diventa $> 1 \rightarrow$ Regime di ACCOPPIAMENTO FORTE (strong coupling) a basse energie

Dimensional transmutation

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} + \beta_0 \ln(\mu_0^2/\mu^2) \rightarrow \frac{\mu}{\mu_0} = e^{\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu_0)}} \cdot e^{-\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu)}}$$

$$\Rightarrow \mu e^{\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu)}} = \mu_0 e^{\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu_0)}} \leftarrow \text{dimensioni di una scala di ENERGIA}$$

$$\Rightarrow \Lambda(\mu) \equiv \mu e^{\frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu)}} \quad \text{è INDIPENDENTE della scala } \mu \text{ ed è chiamata } \Lambda_{\text{QCD}}$$

- Λ_{QCD} è una SCALA della TEORIA "generata" della QFT.
- Λ_{QCD} è detta SCALA DI QCD o "RG-invariant scale"
- Λ_{QCD} è la scala $\bar{\mu}$ a cui $g(\bar{\mu}) \rightarrow \infty$ (però in questo caso $\mu = \Lambda_{\text{QCD}}$)
- Λ_{QCD} è la scala sotto la quale la teoria diventa fortemente accoppiata

↪ La teoria di YM classica non ha parametri che hanno mass-dimension non nulle.

D'altra parte, la QFT ha "generato" una scala fisica Λ_{QCD} .

↪ "DIMENSIONAL TRANSUTATION"

Domanda: come appare la teoria di YM a scale $\ll \Lambda_{QCD}$?

Risposta parziale ottenuta da analisi di esperimenti
e calcoli numerici sul reticolo:

- YM non descrive particelle MASSLESS.

- invece, i gluoni sono in stati compattati detti

GLUEBALLS che sono particelle MASSIVE $m \sim \Lambda_{QCD}$
→ si dice che la Teoria ha un MASS GAP
(c'è un gap tra lo stato di vuoto e il 1° livello eccitato)

Risultati quantitativi
ottenuti "mettendo la teoria
sul RETICOLO (Lattice)",
cioè $\mathbb{R}^4 \rightarrow$ RETICOLO \mathbb{Z}^4

ESempi: \mathbb{Z}^2
o o o
o o o
o o o
L

⇒ c'è distanza minima $L \Rightarrow$ en. max $\frac{1}{L} \sim$ cutoff della teoria.

→ conti numerici danno risultati quantitativi (approssimati).

→ Esempio: "YM ha un MASS GAP $m \sim \Lambda_{QCD}$ ".

[Il MASS GAP non è dimostrato analiticamente in YM]

Quando una teoria cambia "modo di comportarsi"
diciamo che c'è una transizione da una FASE all'altra.

Qui il cambiamento sarà dovuto a come variano
i parametri della teoria.

Beta function:

$$\beta(g) = \beta_0 g^3 + \dots$$

materia
fermionica

materia
scalare

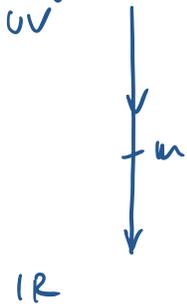
$$\text{dove } \beta_0 = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3} c_2(G) - \frac{4}{3} N_f c(R_f) - \frac{1}{3} N_s c(R_s) \right]$$



contributo di MASSLESS
fields

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} - \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3} c_2(G) - \frac{4}{3} N_f c(R_f) - \frac{1}{3} N_s c(R_s) \right] \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}$$

RG flow $\hat{=}$ lungo side di eu.



Se un camp ha una massa m ,
esso viene visto come camp MASSLESS
a scale $E \gg m$; invece a scale
 $E \ll m$ il camp non propaga e
può essere "integrato via" (integrated out)
e non partecipa al running di $g(\mu)$.

IR PHASES of QCD-like theories

Consideriamo teorie con $N_s = 0$, con

gruppo di gauge $SU(N_c)$ (N_c viene detto n° di colori)

e N_f fermioni in rep fondamentale ($R_f = N_c$)

$$\Rightarrow c_2(G) = N_c \quad c(R_f) = 1/2$$

$$\frac{1}{g(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} - \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right] \ln \frac{\mu_0^2}{\mu^2}$$

Averrà una diversa dinamica
a seconda del valore di $\frac{N_f}{N_c}$

IR FREE PHASE $N_f > \frac{11}{2} N_c \rightarrow \beta_0 > 0$

$\Rightarrow g(\mu)$ è sempre più DEBOLE andando nell'IR:
possiamo fidarci dei conti semiclassici ma otteniamo
bosoni di gauge e fermioni assolutamente accoppiati

Quando $N_f = \frac{11}{2} N_c \rightarrow$ la funzione β è nulla
a 1-loop

\Rightarrow in questo caso β è > 0 , < 0 o $= 0$ dobbiamo
calcolare il contributo a 2-loop (β_1)
(la teoria è ancora IR-free in $N_f = \frac{11}{2} N_c$)

CONFORMAL WINDOW N_f appena sotto $\frac{11}{2} N_c$

$$\beta(g) = \beta_0 g^3 + \beta_1 g^5 + \dots = g^3 (\beta_0 + \beta_1 g^2)$$

\uparrow \uparrow
 1-loop 2-loop

$$\beta_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(-\frac{11}{3} N_c + \frac{2}{3} N_f \right)$$

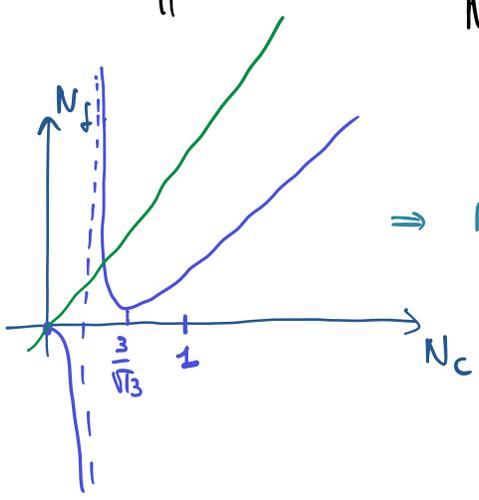
$$\beta_1 = \frac{22}{3} N_c^2 - \frac{11}{2} N_c \quad \text{in } N_f = \frac{11}{2} N_c$$

$$\beta_1 = \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left(-\frac{34}{3} N_c^2 + \frac{N_f (N_c^2 - 1)}{N_c} + \frac{10}{3} N_f N_c \right)$$

$$\beta_1 > 0 \quad (\beta_0 = 0)$$

$\beta_1 > 0$ quando $N_f > \frac{34}{13N_c^2-3} N_c^3$ • ha min e $N_c^2 = 9/13$

$\beta_0 < 0$ " $N_f < \frac{11}{2} N_c$ •



$\Rightarrow N_f \geq 1 \quad \frac{11}{2} N_c > \frac{34 N_c^3}{13 N_c^2 - 3}$

Quando $\frac{34 N_c^3}{13 N_c^2 - 3} < N_f < \frac{11}{2} N_c \Rightarrow \beta(g)$ ha uno zero

$\ln \quad g_*^2 = -\frac{\beta_0}{\beta_1}$

β_0, β_1 dipendono da $N_c, N_f \rightarrow$ il valore di g_* dipende pure da N_c, N_f

Mettiamoci in $\frac{N_f}{N_c} = \frac{11}{2} - \epsilon$ (ϵ piccolo)

$g_*^2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right) \cdot \frac{1}{2N_c}$

$\frac{1}{(4\pi)^2} \left(-\frac{34}{3} N_c^2 + \frac{3 N_f (N_c^2 - 1)}{3 N_c} + \frac{10 N_f N_c}{3} \right) \cdot \frac{1}{2N_c}$

$= \frac{16\pi^2 \left(\frac{N_f}{N_c} - \frac{11}{2} \right)}{N_c \left(-17 + \frac{3}{2} \frac{N_f}{N_c} \left(\frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \right) + 5 \frac{N_f}{N_c} \right)}$

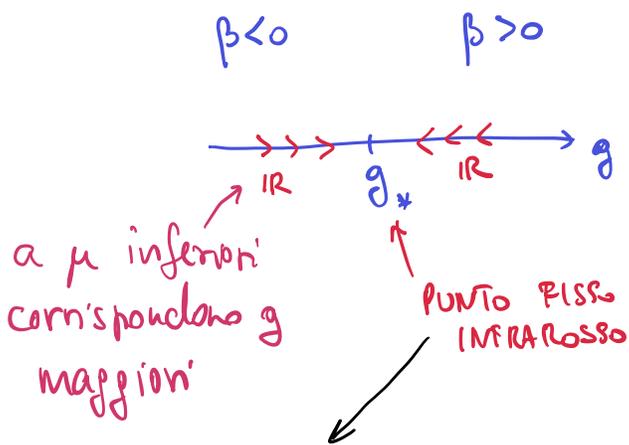
$\frac{N_f}{N_c} = \frac{11}{2} - \epsilon \rightarrow$

$g_*^2 = \frac{-16 \pi^2 \epsilon}{N_c \left(-17 + \frac{13}{2} \cdot \frac{11}{2} - \frac{37}{4N_c^2} + 6(\epsilon) \right)} = \frac{64 \pi^2 N_c}{75 N_c^2 - 33} \epsilon + 6(\epsilon^2)$

$\mu \ll 1 \rightarrow \boxed{g_*^2 \ll 1} \rightsquigarrow$ teoria è debolm. accoppiata

In particolare, $\mu \ll 1$ l'analisi PERTURBATIVA che abbiamo fatto è VALIDA, cioè la teoria a basse energie è descritta da una teoria debolmente accoppiata che come pto fisso del RG flow è INVARIANTE sotto trasformazioni di scale (e "quasi" CONFORME)

"Banks-Zaks fixed pt"

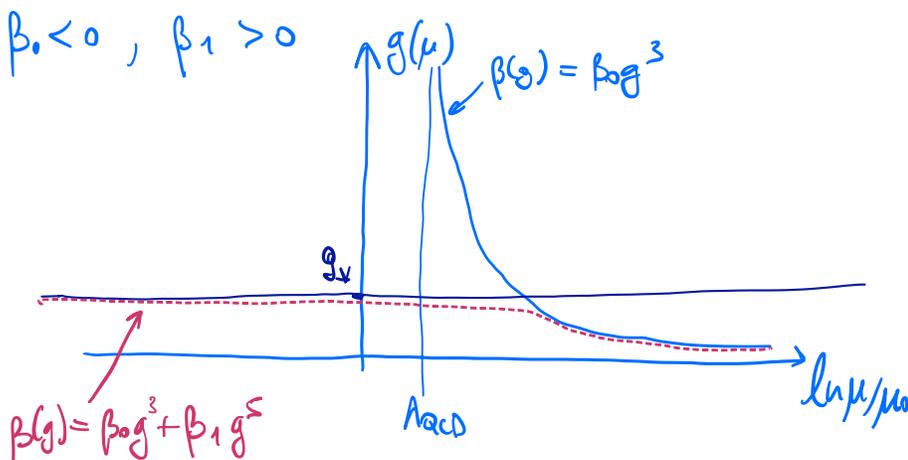


$$\beta = (\beta_0 + \beta_1 g^2) g^2 = g^2 \beta_1 (g^2 + \frac{\beta_0}{\beta_1}) = g^2 \beta_1 (g^2 - g_*^2)^{\beta_1}$$

$\beta_1 > 0$

è una teoria CONFORME (la simmetria CONFORME vincola molto la teoria, permettendo di trovare risultati altrimenti molto difficili).

[Nelle fake IR free, il pto fisso è a $g=0 \rightsquigarrow$ teoria conforme è triviale.]



Vediamo che vicino alla regione di g in cui le serie perturbative non sarebbe più state valide, la curva di $\beta(\mu)$ non esplode, ma tende a g_* .

Calcoliamo $\frac{N_f}{N_c}$: il risultato precedente ci dice che c'è un pto fisso IR NON-TRIVIALE, almeno finché vale la teoria delle perturbazioni, cioè fino N_f b.c. $g_* \sim 1$. Per N_f inferiori la teoria è fortemente accoppiata attorno a g_* e non possiamo più fidarci dei conti perturbativi che si fermano a 2-loop.

In generale, uno si aspetta che ci sia un pto fisso IR non-triviale

per $N_* < N_f < \frac{11}{2} N_c$ "FINESTRA CONFORME"

per un certo valore critico N_* . Qual è il suo valore?

Conti numerici sul reticolo: c'è un'evidenza che per

$N_c = 3$ si abbia $N_* \in [8, 12]$;

inoltre ci si aspetta l'andamento $N_* \approx (3-4) N_c$.

Per $N_f \in N_*$ $\beta(g) < 0 \Rightarrow$ nell'IR la costante di accoppiam. è sufficientemente forte per portare al

CONFINAMENTO

(Qui intendiamo che tutti i quanti a energia finita sono singoletti di gauge.)

La maggior parte degli stati sono MASSIVI con $m \sim \Lambda_{\text{QCD}}$

Però ci sono anche dei modi molto leggeri (MASSLESS se fermioni di portate sono massivi)

↳ SSB: $\langle \Psi_i^L \Psi_j^R \rangle \sim \delta_{ij}$ $i, j = 1, \dots, N_f$
 cont. su reticolo diverso $\neq 0$

Qto VEV (vacuum expectation value) rompe SPONTANEAMENTE la
CHIRAL SYMMETRY della Lagrangiana della fermi
in considerazione

→ BOSONI DI GOLDSTON

(π, π^\dagger se sym è SU(2)
ottetto se sym è SU(3))