

# Algebra di Cartan

Dato un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , la sua **SOTTOALGEBRA di CARTAN** è un sottospazio vettoriale  $\mathcal{H} \subset \mathfrak{g}$  t.c.

$$[H_1, H_2] = 0 \quad \forall H_1, H_2 \in \mathcal{H}$$

La dimensione di  $\mathcal{H}$ ,  $r = \dim \mathcal{H}$ , è detta **RANGO** di  $\mathfrak{g}$ .

Mettiamoci in una rep.  $R$ :

- Qui gli elem. di  $\mathfrak{g}$  sono rappresentati da **MATRICI**.
- Le matrici di  $\mathcal{H}$  commutano tra loro e quindi possono essere **SIMULTANEAMENTE DIAGONALIZZATE**.
- Scegliamo come base di  $V_R$  una base di autovettori  $\{v_l\}_{l=1, \dots, d_R}$  comuni a tutte le matrici che rappresentano  $\mathcal{H}$ .

Allora

$$h_R v_l = \mu_{R,l}(h_R) v_l$$

↑  
funzionali lineari su  $\mathcal{H}$  (detti PESI di  $R$ )

t.c.  $\mu_{R,l}(h_R)$  è l'autovalore di  $h_R$  relativo all'autovettore  $v_l$

- Se prendo una base  $\{H^1, \dots, H^r\}$  di  $\mathcal{H}$ , mi basta sapere cosa fanno  $\mu_{R,l}$  su  $h_R^i$   $i=1, \dots, r$

$$h_R^i v_l = \mu_{R,l}^i v_l$$

-  $\mu_{R_i} \in \mathbb{R}^*$ . Al variare di  $R$  e  $l$  qti vettori  $\pi$ -dimensionali si distribuiscono su un reticolo  $\pi$ -dim.  $\Lambda_w(G)$  detto WEIGHT LATTICE.

- Quanto detto per una generica  $R$  vale in particolare per la rep AGGIUNTA ( $\cong G$ ). In questo caso, i pesi vengono chiamati ROOTS  $\alpha_l$ .  
 Quante roots abbiamo? Uno direbbe  $l=1, \dots, \dim G$ . Tuttavia alcuni di qti vett.  $\pi$ -dim. sono triviali, in presenza i vettori  $H^1, \dots, H^r$  hanno autovalori nulli.

$$\rightarrow \#_{\text{roots}}^{\text{non-trivial}} = \dim G - r.$$

- Le roots spaziano un reticolo, chiamato ROOT LATTICE  $\Lambda_{\text{root}}(G)$

Es.  $G = A_1$  con generatori  $S_x, S_y, S_z$ ;  $r=1 \rightsquigarrow H = S_z$

$R = \underline{2}$  (doppietto)  $\rightsquigarrow$  autovalori di  $S_z$ :  $\mu_{2,1} = \frac{1}{2}$   $\mu_{2,2} = -\frac{1}{2}$

$R = \underline{3}$  (tripletto)  $\rightsquigarrow$  autovalori di  $S_z$ :  $\mu_{3,1} = 1$   $\mu_{3,2} = 0$   $\mu_{3,3} = -1$   
 $\uparrow$  rep. Adj  $\# \text{ roots} \neq 0 = 3 - 1 = 2 \uparrow$

$R = \underline{4}$   $\rightsquigarrow$  autovalori di  $S_z$ :  $\mu_{4,1} = \frac{3}{2}$   $\mu_{4,2} = \frac{1}{2}$   $\mu_{4,3} = -\frac{1}{2}$   $\mu_{4,4} = -\frac{3}{2}$

- Se esponenziamo le sottoal. di Cartan, otteniamo un sottogruppo ABELIANO  $U(1)^r$ :  
 $e^{i\beta^1 H^1} = e^{i\beta_1 H^1} \cdot e^{i\beta_2 H^2} \cdot \dots \cdot e^{i\beta_r H^r}$

# LINE OPERATORS & GAUGE GROUP

Simmetria di GAUGE  $\leftrightarrow$  ridondanza nella descrizione della teoria



Solo grandezze GAUGE INVARIANT sono ben definite e pred. osservabili.

In QED  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  (e anche  $F_{\mu\nu}$ ) sono gauge inv.; ma qto non è vero per le teorie non-ab. ( $F_{\mu\nu} \rightarrow U F_{\mu\nu} U^\dagger$ )

Se vogliamo costruire quantità gauge invarianti, dobbiamo lavorare con tracce, come  $\text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho})$  o WILSON LINES.

## WILSON LINES & WILSON LOOPS

Nel linguaggio matematico,  $A_\mu$  è detta CONNESSIONE, Analogo a  $\Gamma_{\mu\sigma}^s$  in Relatività Generale; lì era connessione su FIBRATO TANGENTE; qui  $A_\mu$  è connessione su FIBRATO VETTORIALE generico, dove la FIBRA è  $V_R$

$\Gamma_{\mu\sigma}^s$  ci dice come trasportare parallelamente i vettori lungo curve della varietà.  $A_\mu$  fa lo stesso per i vettori di  $V_R$ .

Consideriamo un campo di hdy  $A_\mu(x)$  fisso e mettiamo in qto hdy una particella-test. Qta particella è "carica" sotto il campo di hdy. Per  $G$  semplice, qto vuol dire che la particella porta dei pred. di l.s. rappresentati da un vettore  $w \in V_R$

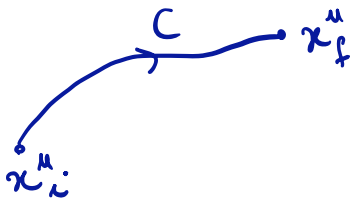
Prendiamo un vettore complesso  $w \in V_R$  con  $w^\dagger w = \text{cost.}$

La connessione ci dice come evolve qto vettore, mentre la particella come un percorso sullo spatio-tempo  $x^\mu(\tau)$

$$i \frac{dw}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} A_\mu w \quad \text{PARALLEL TRANSPORT EQUATION}$$

integrate

$$w(\tau_f) = \Omega(x_i, x_f; C) w(\tau_i)$$



$$\Omega(x_i, x_f; C) \equiv \mathcal{P} e^{i \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} A_\mu(x(\tau))} = \mathcal{P} e^{i \int_{x_i}^{x_f} A}$$

"path ordering" ← qnd si espande l'exp l'ordine delle matrici

$A_\mu(x(\tau))$  è f.c.

tempi antecedenti vanno a sinistra

WILSON LINE

Sotto transf. gauge:  $\otimes$

$$\Omega(x_i, x_f; C) \mapsto U(x_i) \Omega(x_i, x_f; C) U^\dagger(x_f)$$

Se  $C$  è un loop ( $x_f = x_i$ ),  $\Omega$  ci dice come varia  $w$  dopo che la particella ha fatto un giro (HOLONOMY)

↳ Se facciamo una traccia su  $R$ , otteniamo qto che viene chiamato WILSON LOOP

$$W[C] = \text{tr}_R \Omega(x_i, x_i; C) = \text{tr}_R \mathcal{P} e^{i \oint_C A}$$

- $W[C]$  è GAUGE INVARIANTE e dipende da
  - $R$  in cui è rappresentata la matrice  $A_\mu = A_\mu^a t_R^a$ ;
  - valori di  $A_\mu$  lungo la curva  $C$ .

• Anche  $\text{tr}_R \Omega(x_i, x_f; C)$  è GAUGE INV. se  $x_i, x_f \rightarrow \infty$

⊗ Vediamo come trasf.  $1 + i A_\mu(x) \delta x^\mu$

Nota:  $U(x) U^\dagger(x + \delta x) = U(x) (U^\dagger(x) + \partial_\mu U^\dagger(x) \delta x^\mu) = 1 + U \partial_\mu U^\dagger \delta x^\mu + \dots$

$$\begin{aligned} 1 + i A_\mu \delta x^\mu &\mapsto 1 + i (U A_\mu U^\dagger - i U \partial_\mu U^\dagger) \delta x^\mu = \\ &= 1 + U \partial_\mu U^\dagger \delta x^\mu + i U A_\mu U^\dagger \delta x^\mu \\ &= U(x) U^\dagger(x + \delta x) + i U(x) A_\mu U^\dagger(x + \delta x) \delta x^\mu + O(\delta x^2) \\ &= U(x) (1 + i A_\mu^{(x)} \delta x^\mu) U^\dagger(x + \delta x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1 + i A_\mu(x_0) (x_1 - x_0)^\mu) (1 + i A_\mu(x_1) (x_2 - x_1)^\mu) \dots (1 + i A_\mu(x_N) (x_{N+1} - x_N)^\mu)$$

$$\mapsto U(x_0) (\dots) U^\dagger(x_1) U(x_1) (\dots) U^\dagger(x_2) \dots$$

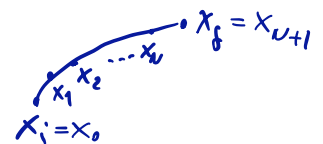
$$= U(x_0) (\dots) (\dots) \dots (\dots) U^\dagger(x_N)$$

$$P e^{\int_{x_1}^{x_2} A(x) dx} = P \left( 1 + A(x_1) + A(x_2) + \frac{1}{2} (A(x_1)^2 + A(x_2)^2 + \frac{A(x_1)A(x_2) + A(x_2)A(x_1)}{A(x_2)A(x_1)}) \right)$$

$A(x_1)$  e  $A(x_2)$   
in gen. non commutano

$$\begin{aligned} &= \left( 1 + A(x_1) + A(x_2) + \frac{1}{2} (A(x_1)^2 + A(x_2)^2 + 2 A(x_1)A(x_2)) + \dots \right) \\ &= \left( 1 + A(x_1) + \frac{A(x_1)^2}{2} + \dots \right) \left( 1 + A(x_2) + \frac{A(x_2)^2}{2} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$P e^{i \int_\gamma A_\mu dx^\mu} \sim P e^{i \sum_{j=0}^N A_\mu(x_j) \delta x^\mu}$$



$$\sim (1 + A_\mu(x_0) \delta x^\mu) (1 + A_\mu(x_1) \delta x^\mu) \dots$$

che trasf. come detto sopra.

# WILSON LOOPS & CONFINEMENT

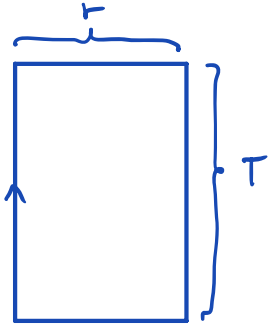
Define the Wilson Loop of

$$W[C] = \text{tr} P e^{i \oint_C A}$$

It's vev is given by:

$$\langle W[C] \rangle = \int \mathcal{D}A e^{-S_{\text{YM}}} \text{tr} P e^{i \oint_C A} \quad (\text{Euclidean P.I.})$$

Now, consider the explicit closed loop (FUNDAM. REP.)



Interpretation: creation, propagation and annihilation of a quark-antiquark pair

What behaviour do we expect for  $\langle W[C] \rangle$ ?

Since W.L. is gauge inv. we can set a particular gauge: choose  $A_0 = 0$ .

- Integrals along vertical pieces are zero
- let's def.  $M(t)_j^i \equiv \left[ P e^{i \int_0^t dx' A_1(t, \vec{x})} \right]_j^i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle W[C] \rangle &= \langle M(T)_j^i M^\dagger(0)_i^j \rangle \\ &= e^{HT} M(0)_j^i e^{-HT} \end{aligned}$$

• Inserting complete set:

$$\langle W[C] \rangle = \sum_n e^{-TE_n(r)} \langle M(0)_j^i | n \rangle \langle n | M^\dagger(0)_i^j \rangle =$$

$$= \sum_n e^{-TE_n(r)} \left( \langle M(0)_j^i | n \rangle \right)^2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \sim e^{-TE_0(r)} = V(r)$$

since charges are static

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \langle W[C] \rangle \sim e^{-V(r)T}$$

$$\text{or } V(r) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \langle W[C] \rangle$$

Now, in the CONFINING PHASE  $V(r) \sim \sigma r$  and then we expect

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle W[C] \rangle \sim e^{-\sigma A[C]}$$

↑  
AREA of C

→ AREA LAW CRITERION for confinement

If theory is not in confining phase, we get different behavior

When there is SCREENING,  $V(r) \sim \text{const}$  (zero force)

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \langle W[C] \rangle \sim e^{-\frac{V_0}{2} P[C]}$$

↑  
PERIMETER of C

One could suspect that in both cases one obtains:

$$\langle W[C] \rangle \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

However, infinities in  $P[C]$  can be reabsorbed by a counterterm localized along C, contrary to  $A[C]$ .

$$W[C] \rightarrow W'[C] = W[C] e^{-\int_C ds}$$

→  $\langle W[C] \rangle = 0 \iff$  confining phase

$\langle W[C] \rangle \neq 0 \iff$  screening

→  $W$  is order parameter for phase transition.

This may suggest the existence of a SYMMETRY that is spont. broken in one of the two phases.

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \langle W[C] \rangle \neq 0 \iff \lim_{|x-y| \rightarrow \infty} \langle O(x) O(y) \rangle \approx \langle O \rangle^2 \neq 0$$

↑  
Sp. breaking of  
some sym.

↑  
Sp. breaking of  
ordinary sym.

• • ← 0-dim space