

Tutorato Analisi Matematica 1 - 2024/2025

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 8 - Funzioni composte, inverse, trigonometriche - 12/11/2024

Funzioni composte e inverse

• Ricordiamo che una funzione $f: \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$ (si può generalizzare per $f: X \rightarrow Y$ con X e Y insiemi qualsiasi) è:

- i) iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- ii) suriettiva se l'immagine di f coincide con il codominio: $\text{Im}(f) = f(\text{dom } f) = \mathbb{R}$
- iii) biettiva se sia iniettiva che suriettiva

• Sia $f: \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione iniettiva. Chiamiamo funzione inversa di f , che indichiamo con f^{-1} , la funzione di dominio $\text{Im } f$ e immagine $\text{dom}(f)$ ($f^{-1}: \text{Im } f \rightarrow \mathbb{R}$ e $f^{-1}(\text{Im } f) = \text{dom } f$) che in $y \in \text{Im } f$ ha per valore quell'unico elemento $x \in \text{dom}(f)$ tale che $y = f(x)$.

ESEMPIO

$$f(x) = 2x - 1$$

N.B. Non confondere la funzione inversa $f^{-1}(x)$ con la funzione reciproca $\frac{1}{f(x)}$ $\rightarrow$ sono funzioni DIVERSE

Fissata $y \in \mathbb{R}$, risolvendo $2x - 1 = y$ rispetto a x Troviamo l'unica soluzione $x = (y+1)/2$.

$$\Rightarrow \text{Quindi } f \text{ è biettiva e risulta } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$



• Date $f: \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \text{dom } g \rightarrow \mathbb{R}$ definiamo le funzioni composte:

- i) se $\text{Im } f \subseteq \text{dom } g$ possiamo definire $g \circ f: \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$ Tale che $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- ii) se $\text{Im } g \subseteq \text{dom } f$ possiamo definire $f \circ g: \text{dom } g \rightarrow \mathbb{R}$ Tale che $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

ESEMPIO

1) $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$

$\text{dom } f = \text{dom } g = \mathbb{R} \Rightarrow$ entrambe le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$ sono ben definite:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot g(x) = 2x^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (2x)^2 = 4x^2$$

2) $f(x) = \log(x-1)$, $g(x) = e^x$

$$\text{dom } f = (1, +\infty) , \text{Im } f = \mathbb{R}$$

$$\text{dom } g = \mathbb{R} , \text{Im } g = (0, +\infty)$$

$\Rightarrow \text{Im } f \subseteq \text{Im } g$ quindi $g \circ f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è ben definita ma definita solo per $x > 1$!

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{\log(x-1)} = x-1$$

Invece $\text{Im } g \not\subseteq \text{dom } f$ quindi $f \circ g$ non è ben definita su tutto il dominio di g :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log(g(x)-1) = \log(e^x - 1) \rightarrow \text{è ben definita se } e^x > 1 \Rightarrow x > 0$$

Se definiamo la restrizione $\tilde{g} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{g}(x) = g(x) \forall x > 0$ allora la composizione

$$f \circ \tilde{g} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tale che } (f \circ \tilde{g})(x) = \log(e^x - 1) \text{ è ben definita}$$



- Data $f: \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$ e $E \subseteq \text{dom } f$ possiamo definire la restrizione di f a E come la funzione $\tilde{f}: E \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in E$.

↳ questo ci permette di poter invertire anche funzioni non iniettive, se individuiamo dei sottoinsiemi del dominio $E \subseteq \text{dom } f$ in la restrizione $\tilde{f}$ è iniettiva.

• Dalle definizioni di funzione inversa e composizione segue che

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in \text{dom } f^{-1} = \text{Im } f$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in \text{dom } f = \text{Im } f^{-1}$$

↳ dal punto di vista grafico, il grafico di f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto la bisettrice del primo e terzo quadrante ($y=x$)

ESEMPIO

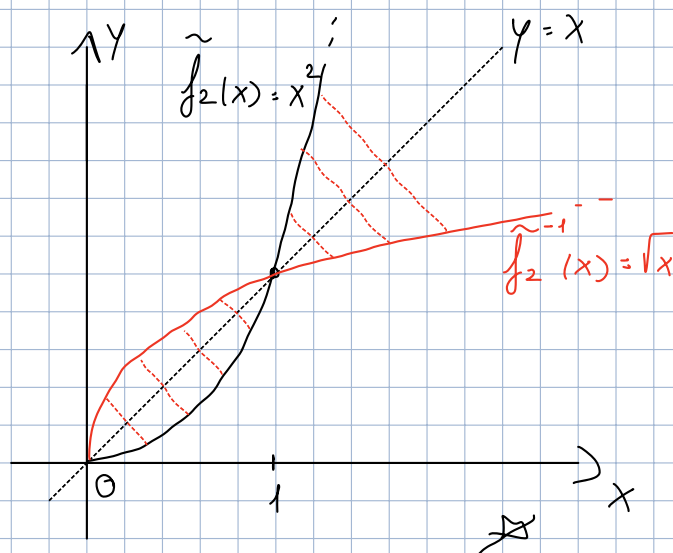
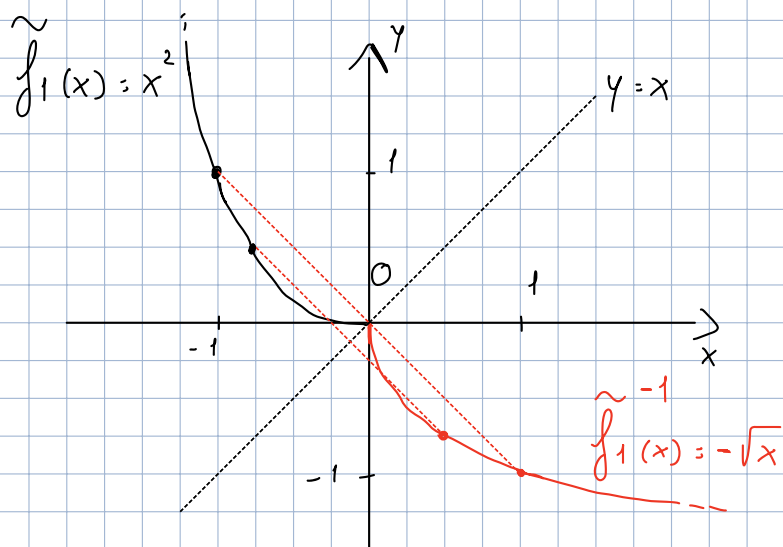
$$f(x) = x^2, \quad \text{dom } f = \mathbb{R}, \quad \text{Im } f = [0, +\infty)$$

f non è iniettiva perché $f(x_1) = f(x_2)$ se $x_1 = -x_2$. Individuiamo quindi 2 restrizioni $E_1 = (-\infty, 0]$ e $E_2 = [0, +\infty)$ in cui $\tilde{f}_1: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{f}_2: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono iniettive e invertibili. Cerchiamo le inverse:

$$y = x^2 \Rightarrow \text{se } y \geq 0 \text{ allora } |x| = \sqrt{y} \quad (\text{se } y < 0 \text{ non esistono soluzioni})$$

$$\hookrightarrow \text{se } x \geq 0 \ (x \in E_2) \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow \tilde{f}_2^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$\hookrightarrow \text{se } x \leq 0 \ (x \in E_1) \Rightarrow x = -\sqrt{y} \Rightarrow \tilde{f}_1^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$



ESERCIZIO

Studiamo l'invertibilità di $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$.

Spezzando il valore assoluto abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{se } x < 0 \end{cases} =: \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f_2(x) & \text{se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{dom } f = \mathbb{R}$$

Per studiare l'invertibilità vediamo se e per quali valori riusciamo a risolvere in x l'equazione:

$$y = \frac{x}{|x|+1} \quad \text{fissato } y \in \mathbb{R}$$

$$\text{i) se } x \geq 0 \rightarrow y = \frac{x}{x+1} \Rightarrow (x+1)y = x \Rightarrow xy - x = -y$$

$$\Rightarrow x(y-1) = -y \Rightarrow x = -\frac{y}{y-1} = \frac{y}{1-y} \quad \text{se } y \neq 1$$

$$\text{inoltre } x \geq 0 \Rightarrow \frac{y}{1-y} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 1-y > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y \leq 0 \\ 1-y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y < 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y \leq 0 \\ y > 1 \end{cases}$$

↳ impossibile

Dunque l'inversione che porta a scrivere

$$x = \frac{y}{1-y} \quad \text{ha senso se } y \in [0, 1)$$

$$\Rightarrow f_1^{-1} : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{è tale che } f_1^{-1}(x) = \frac{x}{1-x} = f_2(x)$$

ii) se $x < 0 \Rightarrow y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow (1-x)y = x \Rightarrow -xy - x = -y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y}$ se $y \neq -1$

La condizione $x < 0$ implica $\frac{y}{1+y} < 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ 1+y < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y < 0 \\ 1+y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y < -1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y < 0 \\ y > -1 \end{cases}$$

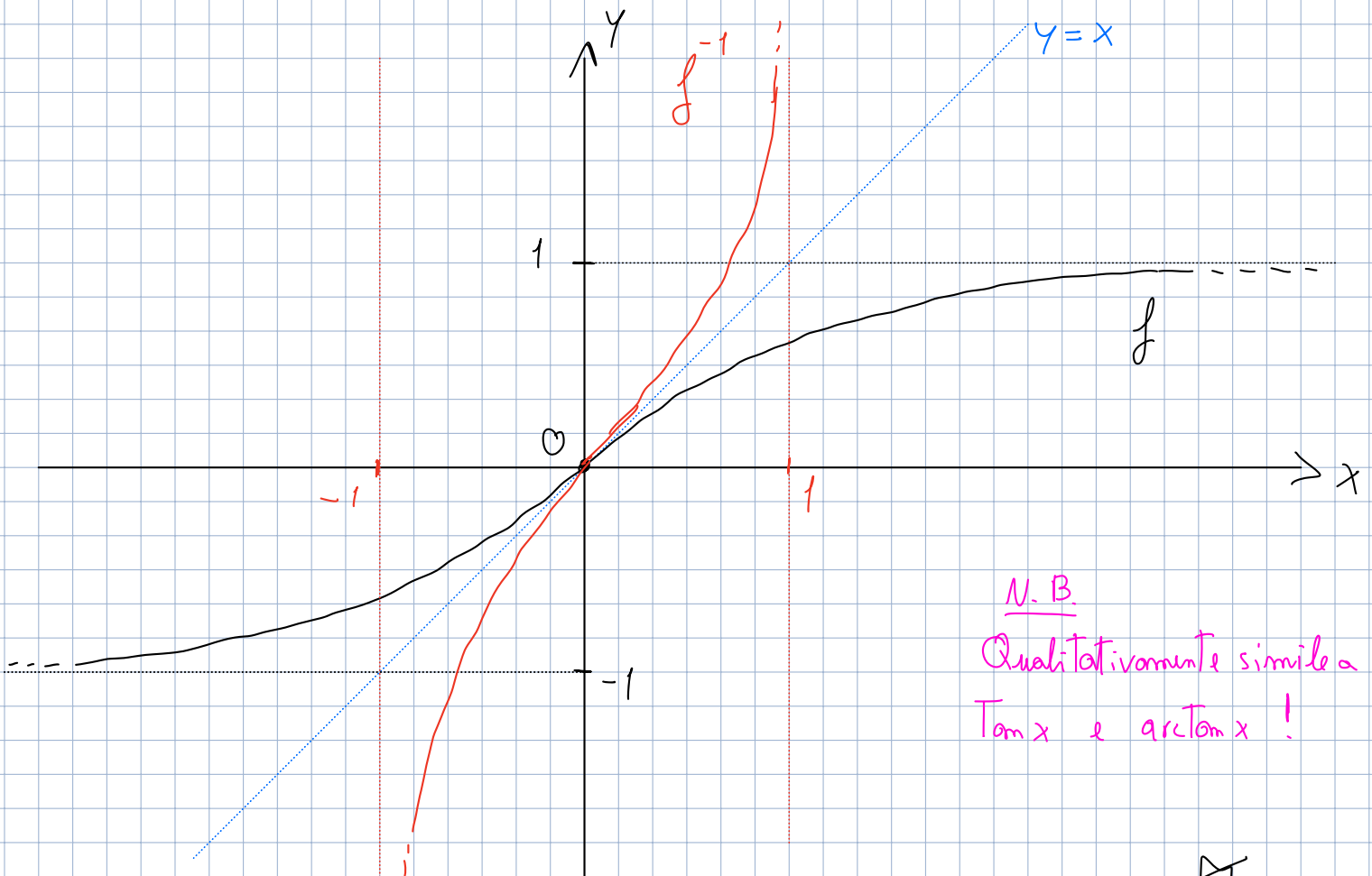
impossibile

$$\Rightarrow f_2^{-1} : (-1, 0) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad f_2^{-1}(x) = \frac{x}{1+x} = f_1(x)$$

$\Rightarrow f$ è invertibile e l'inversa è:

$$f^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Tale che} \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ f_1(x) & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

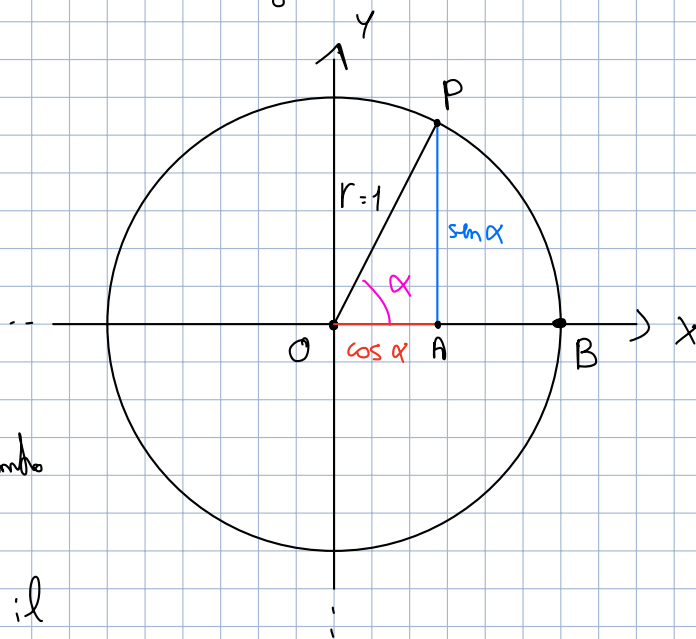
Graficamente possiamo disegnare f e f^{-1} perché riconosciamo che sono pezzi di iperboli:



Trigonometria

- Consideriamo una circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine $O = (0,0)$.

Sia $B = (1,0)$. Partendo da B consideriamo un angolo α positivo percorrendo in senso antiorario la circonferenza (l'angolo è invece negativo se la percorriamo in senso orario) e individuiamo il punto P. Tracciamo il segmento $\overline{OP}$ e il segmento $\overline{PA}$ partendo da P e tracciamo la verticale fino a intersecare l'asse x.



Individuato anche il segmento $\overline{OA}$, consideriamo il triangolo rettangolo $\triangle OAP$, con ipotenusa di lunghezza 1.

Definiamo $\cos \alpha$ l'ascissa (coordinata x) di A e $\sin \alpha$ l'ordinata (coordinata y) di P.

- Da questa definizione segue che

i) $\alpha = 0 \rightarrow \sin 0 = 0, \cos 0 = 1$

ii) $\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0$

iii) $\alpha = \pi \rightarrow \sin \pi = 0, \cos \pi = -1$

iv) $\alpha = \frac{3}{2}\pi \rightarrow \sin \frac{3}{2}\pi = -1, \cos \frac{3}{2}\pi = 0$

v) $\alpha = 2\pi \rightarrow \sin 2\pi = 0, \cos 2\pi = 1$

→ in questi casi il triangolo $\triangle OAP$ si riduce a un segmento

- Sempre dalla definizione segue la periodicità con periodo 2π :

$$\sin(\alpha + 2\pi K) = \sin \alpha$$

$$\forall K \in \mathbb{Z}$$

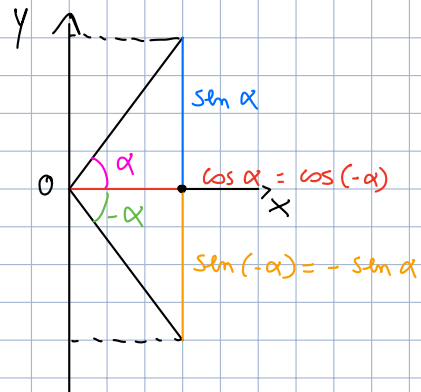
$$\cos(\alpha + 2\pi K) = \cos \alpha$$

$$\forall K \in \mathbb{Z}$$

→ non importa quanti giri della circonferenza facciamo.

- Se prendiamo l'angolo $-\alpha$ negativo vediamo che

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$



- Se $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + K\pi$ con $K \in \mathbb{Z}$ allora $\cos \alpha \neq 0$ e possiamo definire

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Si può verificare che la tangente è periodica di periodo $\pi \Rightarrow \tan(\alpha + K\pi) = \tan \alpha \quad \forall K \in \mathbb{Z}$
 Inoltre dalla definizione segue che

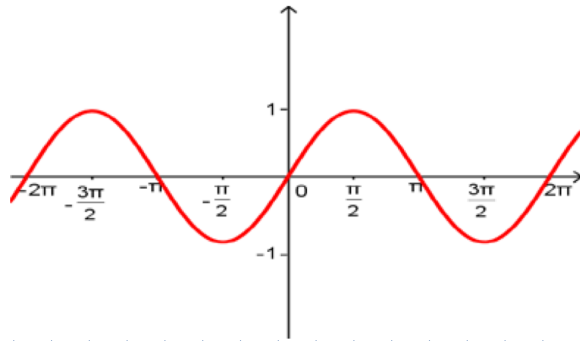
$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

- Per altri valori notevoli di seno, coseno, tangente, definizioni di secante, cosecante, cotangente, formule utili di addizione / sottrazione ecc... consultare il file
FORMULE VARIE ANALISI MATEMATICA 1.

Funzioni trigonometriche

Viste le definizioni geometriche, possiamo pensare a seno, coseno, tangente come funzioni:

- $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \sin x$



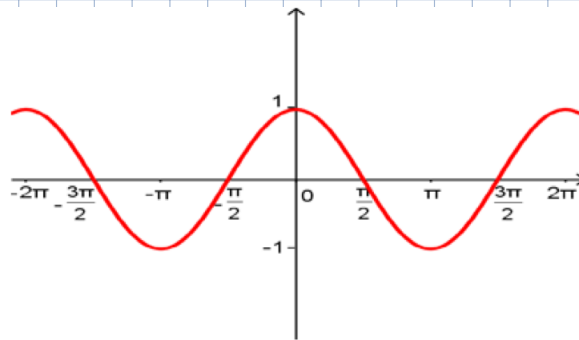
$$\text{dom} = \mathbb{R}$$

$$\text{Im} = [-1, 1]$$

$$\text{Periodo } 2\pi$$

$$\text{Dispari } (\sin(-x) = -\sin x)$$

- $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \cos x$



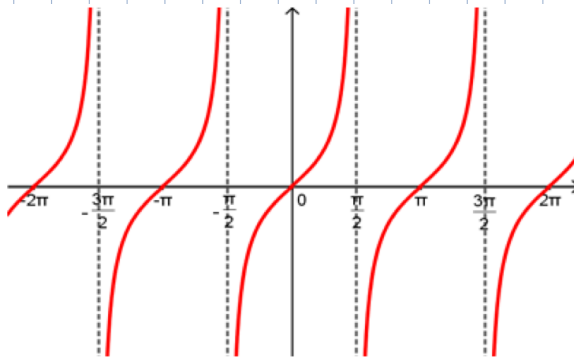
$$\text{dom} = \mathbb{R}$$

$$\text{Im} = [-1, 1]$$

$$\text{Periodo } 2\pi$$

$$\text{Pari } (\cos(-x) = \cos x)$$

- $\tan: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \tan x$



$$\text{dom} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + K\pi : K \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{Im} = \mathbb{R}$$

$$\text{Periodo } \pi$$

$$\text{Dispari } (\tan(-x) = -\tan x)$$

↳ asintoti verticali:

$$x = \frac{\pi}{2} + K\pi \quad \forall K \in \mathbb{Z}$$

N.B.

Si nota che seno e coseno sono effettivamente la stessa funzione traslata. Infatti si ha (tra le varie formule):

$$\hookrightarrow \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Funzioni trigonometriche inverse

È chiaro che le funzioni trigonometriche non sono iniettive, quindi non invertibili.

Possiamo, come visto, renderle iniettive se ne consideriamo opportune restrizioni. La scelta non è unica, ma quelle standard sono:

- restringere il seno a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{array}{l} f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] \\ x \rightarrow \sin x \end{array} \quad \left| \rightarrow \begin{array}{l} f \text{ è iniettiva dunque fissata } y \in [-1, 1], \exists! x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \text{che soddisfa } y = \sin x. \end{array} \right.$$

Definiamo quest'unica x come $\arcsin y$:

$$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$$

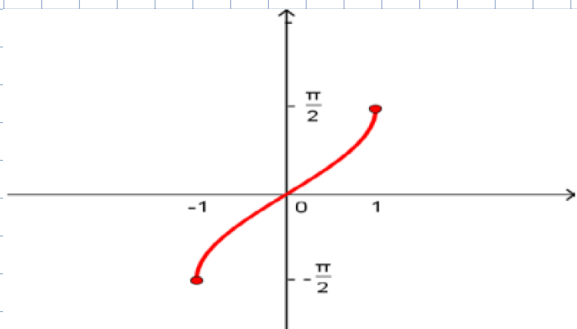
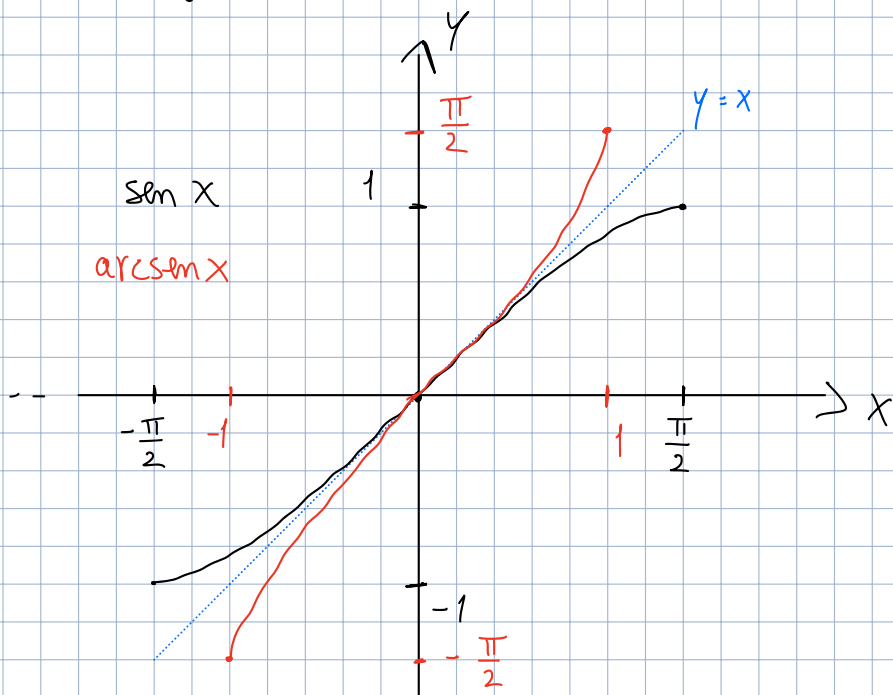
$$(\text{ovvero } \arcsin x = \sin^{-1} x)$$

Abbiamo dunque l'inversa

$$\begin{array}{l} f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x \rightarrow \arcsin x \end{array}$$

che soddisfa $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$, ovvero $\sin(\arcsin x) = \arcsin(\sin x) = x$

Tracciamo il grafico ribaltando quello del seno rispetto la retta $y=x$:



- restringere il coseno a $[0, \pi]$:

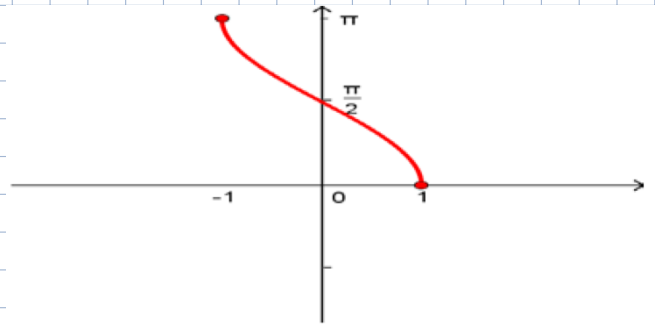
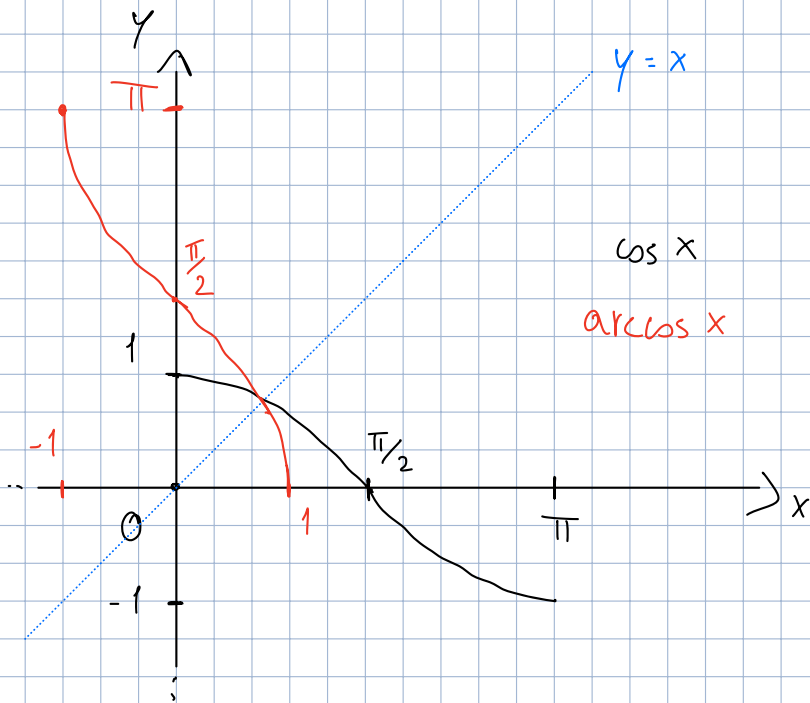
$$f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \rightarrow \cos x$$

$\Rightarrow$

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$x \rightarrow \arccos x$$



- restringere la tangente a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

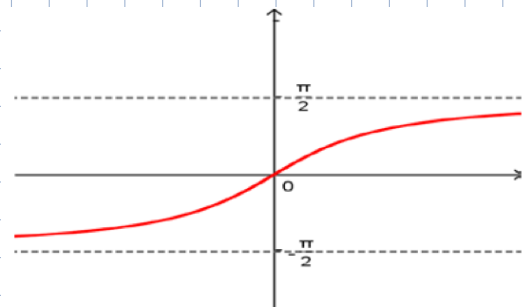
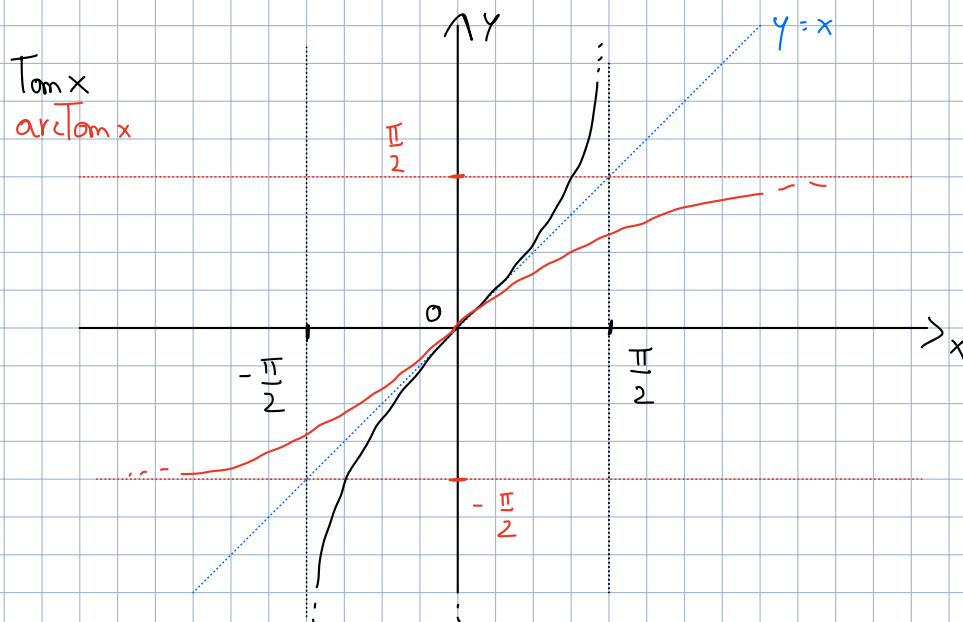
$$f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \tan x$$

$\Rightarrow$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$x \rightarrow \arctan x$$



- Per valori notevoli e altre proprietà delle funzioni trigonometriche inverse consultare il file FORMULE VARIE ANALISI MATEMATICA 1.