

# Esercitazioni di “Geometria”

## Foglio 7

**Titolare del corso:** Prof. Daniele Zuddas

**Esercitatore:** Dott. Armando Capasso

06 novembre 2024

“La pratica è la verifica della teoria”

---

**Esercizio 1.** Dato il seguente sistema di vettori di  $\mathbb{R}^5$

$$S = \{(1, -1, 3, 0, -5), (-1, 2, 0, -3, 1), (2, -2, 4, -1, -4), (2, -3, 1, 2, 0)\}$$

- calcolare la dimensione di  $\langle S \rangle$ , e determinarne una base  $\mathcal{B}_S$ ;
- completare  $\mathcal{B}_S$  a una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^5$ .

**Esercizio 2.** Dato i sistemi di equazioni lineari

$$\begin{cases} 3t - 2z + 5x = 0 \\ 2x + 4y - 7t = 0 \\ 3y - 2t + z = 0 \\ 3x - 2y + 6z = 0 \end{cases}, \begin{cases} 3y - 2z + 2x = -1 \\ 2x + z - 3t = 2 \\ 3y - 2t + x = -3 \\ 3x - 2y + z - t = 0 \end{cases}, \begin{cases} 3t - 2z + 5x + 4y = 0 \\ 2z + 3y - t = 0 \\ 3x - y + 2t + z = 0 \\ x - 2y + 3z - 2t = 0 \end{cases}.$$

Per ogni dato sistema di equazioni lineari omogenei:

- dimostrare che l'insieme delle sue soluzioni  $\text{Sol}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ , per quale valore (minimo) di  $n$ ?
- calcolare la dimensione di  $\text{Sol}$  e una sua base;
- calcolare il rango della matrice associata ad  $S$ .

**Esercizio 3.** Dati il seguenti sistemi di vettori di  $\mathbb{C}^4$

$$S = \{(i - 1, 3, 0, i - 5), (-1, 0, i - 3, 1), (0, 0, i - 2, -4), (2, -3i, 1, 0)\}, \\ T = \{(i - 1, 2, 0, 1), (5, 2 + i, 3, 6), (4, 4, 1 - 3i, 5)\};$$

calcolare le dimensioni di  $\langle S \rangle$ ,  $\langle T \rangle$ , e determinare delle loro basi.

**Esercizio 4.** Siano  $\mathbb{V}$  uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e  $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$  una sua base.

- Dimostrare che  $\{\underline{u} + \underline{v}, 3\underline{u} - 2\underline{w}, 2\underline{w}\}$  è una base di  $\mathbb{V}$ ;
- Dimostrare che  $\{\underline{v}, \underline{w}, \underline{u} - \underline{v} + \underline{w}\}$  è una base di  $\mathbb{V}$ .