<u>Teorema</u>: (teorema di dimensione per soluzioni di sistemi lineari omogenei)
sia $A \in M_{m,n}(K)$; sia
$$W := \{ s \in K^n ;\ A \cdot s = 0 \}$$
ovvero W è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$; notiamo $W \subseteq K^n$; vale
$$\dim W = n - rg(A)$$
Dim: segue dalla teoria delle applicazioni lineari.

<u>Lemma</u>: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $b \in K^m$, allora $s \in K^n$ è soluzione di $AX = b$, ovvero, $A \cdot s = b$ se e solo se, se scriviamo
$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \quad \text{con } s_1, \dots, s_n \in K, \text{ vale che}$$
$$b = s_1 \cdot A^{(1)} + s_2 \cdot A^{(2)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)}$$
(ovvero le entrate della soluzione s sono i coefficienti di una combinazione delle colonne di A che restituisce b)

Dim: segue dallo scrivere esplicitamente il sistema lineare determinato da A e b.

<u>Teorema</u>: (teorema di Rouché – Capelli)
sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $b \in K^m$, allora il sistema lineare $AX = b$ è compatibile (ovvero, ammette almeno una soluzione) se e solo se $rg(A) = rg(A|b)$; in tal caso, la generica soluzione del sistema dipende da $n - rg(A)$ parametri liberi.

Dim: cominciamo con la caratterizzazione della compatibilità
"$\Rightarrow$" supponiamo che $AX = b$ sia compatibile, allora esiste $s \in K^n$ soluzione del sistema, ovvero tale che $A \cdot s = b$; per il lemma precedente vale che $s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)} = b$, ovvero
$$b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$$
da questo segue che
$$\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$
infatti
"$\subseteq$" questa inclusione è sempre vera; infatti, sia $u \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$, allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che $u = \lambda_1 \cdot A^{(1)} + \dots + \lambda_n \cdot A^{(n)}$; allora $u = \lambda_1 \cdot A^{(1)} + \dots + \lambda_n \cdot A^{(n)} + 0 \cdot b$, ovvero abbiamo che $u \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$.
"$\supseteq$" sia $u \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$, allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in K$ tali che $u = \lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)} + \lambda \cdot b$; ricordiamo che $b = s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)}$, allora
$$u = \lambda_1 \cdot A^{(1)} + \dots + \lambda_n \cdot A^{(n)} + \lambda \cdot (s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)})$$
$$= (\lambda_1 + \lambda \cdot s_1) A^{(1)} + \dots + (\lambda_n + \lambda \cdot s_n) \cdot A^{(n)}$$
quindi u è combinazione lineare di $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$, ovvero vale $u \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$.
pertanto abbiamo mostrato che
$$\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$
da ciò segue che:
$$\underbrace{\dim(\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}))}_{= rg(A)} = \underbrace{\dim(\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b))}_{= rg(A|b)}$$
"$\Leftarrow$" supponiamo che $rg(A) = rg(A|b)$, dobbiamo mostrare che $AX = b$ è compatibile; scriviamo
$$U_1 := \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$$
$$U_2 = \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$
allora per ipotesi, $\dim(U_1) = \dim(U_2)$; notiamo che vale $U_1 \subseteq U_2$ (con ragionamento descritto nell'implicazione precedente); dunque abbiamo due sottospazi vettoriali, uno contenuto nell'altro, che hanno la stessa dimensione; da una delle proprietà della dimensione enunciate in precedenza segue che questo può verificarsi solamente nel caso $U_1 = U_2$; pertanto
$$\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$
ora, $b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$, pertanto $b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ ovvero esistono $s_1, \dots, s_n \in K$ tali che $b = s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)}$; per il lemma precedente il sistema lineare $AX = b$ è compatibile e vale che $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ è soluzione.

questo dimostra la prima parte dell'enunciato; supponiamo ora che valga $rg(A) = rg(A|b)$, ovvero che $AX = b$ abbia soluzione; chiamiamo una soluzione di $AX = b$ con il nome di $\tilde{s}$ (sappiamo che $\tilde{s}$ esiste)
ora, per il teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare arbitrario, sappiamo che la generica soluzione s di $AX = b$ è del tipo
$$s = \tilde{s} + s_0$$
dove s_0 è soluzione di $AX = 0$, ovvero s_0 è un elemento di
$$W := \{ r \in K^n :\ A \cdot r = 0 \}$$
per il teorema di dimensione delle soluzioni, vale che
$$\dim W = n - rg(A)$$
sia $k := n - rg(A)$, allora W ammette una base
$$\mathcal{B} = \{ w_1, \dots, w_k \}$$
e pertanto ogni elemento di W si scrive in maniera unica come combinazione lineare di $w_1, \dots, w_k$; pertanto, per ogni $s_0 \in W$, esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ tali che
$$s_0 = \lambda_1 \cdot w_1 + \dots + \lambda_k \cdot w_k$$
e questo significa che ogni soluzione s di $AX = b$ si scrive nella forma
$$s = \tilde{s} + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k$$
ovvero la generica soluzione dipende da k parametri liberi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.